

УДК 519.6

## ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ SPH-СИСТЕМЫ ГАЗОДИНАМИКИ И СХЕМА ИХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

И. Д. Блажнов, М. Н. Вишнякова, С. Н. Полищук, Б. П. Тихомиров  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Во множестве систем обыкновенных дифференциальных уравнений метода сглаженных частиц (SPH), описывающих двумерные осесимметричные течения газа, указаны системы, обладающие свойством полной консервативности. Вариационным методом построена полностью консервативная SPH-система, являющаяся "двойником" известной системы Брукшоу для уравнений в цилиндрических координатах. Предложен модифицированный метод *предиктор–корректор* для численного интегрирования SPH-систем, в основе которого лежит полностью консервативная центровая разностная схема лагранжевой газовой динамики, и показана возможность его использования при моделировании двумерных осесимметричных течений газа.

*Ключевые слова:* метод SPH, осесимметричные течения, принцип наименьшего действия, лагранжева газовая динамика, центровые разностные схемы, модифицированный метод *предиктор–корректор*, задача о сильном взрыве.

### Введение

В работе рассматривается приложение метода сглаженных частиц [1, 2] к решению двумерных плоских и осесимметричных задач газовой динамики (для краткости газодинамики), исследуются несколько систем обыкновенных дифференциальных уравнений метода на предмет их полной консервативности, предложена полностью консервативная (ПК) схема численного интегрирования SPH-систем.

Понятие полной консервативности было введено в работе [3] для разностных схем уравнений газовой динамики. Разностная схема называется ПК-схемой, если для нее, во-первых, выполняются законы сохранения массы, полной энергии и закон изменения количества движения и, во-вторых, соблюдается правильный баланс между внутренней и кинетической энергией. Одним из необходимых условий полной консервативности является требование, чтобы из разностных уравнений движения и внутренней энергии, а также из уравнений движения и энтропийного уравнения можно было получить разностное консервативное уравнение полной энергии. Возможность такого преобразования была продемонстрирована Харлоу в разностной схеме метода частиц в ячейке [4]. В работе [4] также обращается внимание на необходимость строгого выполнения законов сохранения при использовании недивергентных разностных уравнений.

Определение полной консервативности, естественно, применимо и к другим методам дискретизации газодинамики, в частности SPH. Метод SPH состоит из двух этапов дискретизации: пространственной и временной. Сначала исследуемая область представляется совокупностью макрочастиц, обладающих массой, скоростью, плотностью, внутренней энергией, заданными параметрами вещества, и формулируются SPH-уравнения газодинамики в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем эта система интегрируется по времени. Заметим, что если SPH-система является ПК, то естественно требовать от схемы ее интегрирования, чтобы она сохраняла это свойство.

Для численного решения могут использоваться различные схемы: метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, метод Эйлера—Коши, метод Эйлера—Коши с итерациями и другие подходы. В данной статье предложена новая SPH-схема численного интегрирования.

Заметим, что в общем случае исследование SPH-схем является сложной задачей, поэтому их изучение обычно проводится на более простых моделях, например, разностных уравнениях. Разностные схемы газодинамики по способу определения величин на сетке можно разделить на центроузловые и центровые. В центроузловых схемах скорости задаются в узлах (на ребрах или гранях) счетных ячеек, а остальные величины — в центрах. Такой, например, является схема, представленная в работе [5]. Однако, центроузловые схемы не могут использоваться для моделирования, так как в методе SPH неизвестные величины приписаны к центру масс макрочастицы. Поэтому подходящую модель нужно искать среди центровых разностных схем. В них все величины приписаны к центрам ячеек. Примером подобной схемы является ПК-схема Харлоу [4], которая, к сожалению, неустойчива.

В настоящей работе при исследовании метода сглаженных частиц предложена условно устойчивая центровая разностная схема, обладающая свойством полной консервативности. На ее основе построен ПК-метод численного интегрирования SPH-уравнений. Метод применим в общем случае, в произвольной ортогональной системе координат. В работе он изложен в цилиндрических координатах для осесимметричного газодинамического движения.

Заметим, что SPH-представление уравнений газодинамики, вообще говоря, неоднозначно, и прежде всего из-за формализма метода SPH, допускающего различную запись исходных газодинамических уравнений. Кроме того, в цилиндрических координатах имеет место неоднозначность при интерполяции плотности. В области действия интерполяционного ядра плотность можно либо определять как среднюю по пространству, либо находить из среднего значения "плоских" плотностей. Каждый из этих подходов приводит к своей системе SPH-уравнений газодинамики. В работе из всего многообразия SPH-систем газодинамики предпочтение отдается ПК-системам, вытекающим из вариационного принципа наименьшего действия Гамильтона—Остроградского.

Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе рассматривается постановка задачи и формулируются основные положения метода SPH. Во втором разделе приводится несколько систем SPH-уравнений газодинамики в цилиндрических координатах, дается определение ПК-систем SPH, приводятся примеры неконсервативной системы, полностью и просто консервативных систем, вариационным методом строится новая система SPH, обладающая свойством полной консервативности. В третьем разделе для одномерной газодинамики рассматривается центровая разностная схема, моделирующая при малом числе частиц метод SPH, и на ее основе формулируется ПК-схема интегрирования SPH-уравнений. В последнем разделе приведен численный пример.

## 1. Постановка задачи. Основные положения метода SPH

Изучается движение нетеплопроводного идеального газа, которое описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \quad (4)$$

с уравнением состояния

$$P = P(\rho, S); \quad E = E(\rho, S), \quad (5)$$

где  $t$  — время;  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки;  $\vec{u}$  — скорость;  $\rho$  — плотность,  $E$  — удельная внутренняя энергия,  $P$  — давление,  $S$  — энтропия.

В двумерном случае

$$\vec{r} = x\vec{l}_x + y\vec{l}_y; \quad \vec{u} = u\vec{l}_x + v\vec{l}_y; \quad \nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{y^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x} (y^\nu u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu v) \right),$$

где  $x, y$  — координаты точки;  $u, v$  — составляющие вектора скорости;  $\vec{l}_x, \vec{l}_y$  — единичные векторы;  $\nu = 0$  — декартовы,  $\nu = 1$  — цилиндрические координаты. В дальнейшем основное внимание будет уделено уравнениям в цилиндрических координатах.

Заметим, что уравнение внутренней энергии (3) вытекает из энтропийного уравнения

$$\frac{dE}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (6)$$

и уравнения неразрывности (2), а из уравнения движения (1) и уравнения (3) следует уравнение полной энергии

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P\vec{u}) = 0. \quad (7)$$

Решение системы (1)–(5) ищется в области  $D = \{x_a < x < x_b, y_a < y < y_b\}$ , на границе которой задается условие непроницаемости газа. В начальный момент времени задаются распределения скорости, плотности и внутренней энергии.

Поставленную краевую задачу будем решать методом сглаженных частиц. Для определенности рассмотрим случай осесимметричного движения газа ( $\nu = 1$ ), описываемого в цилиндрических координатах ( $x$  — осевая,  $y$  — радиальная).

Основная идея метода SPH отражена в двух ключевых формулах: приближенного интегрального представления функций и приближенного вычисления интегралов.

Пусть  $A(\vec{r})$  — произвольная функция, определенная и непрерывная в области  $D$ . По основному свойству  $\delta$ -функции справедливо равенство

$$A(\vec{r}) = \iint A(\vec{r}^*) \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) d\vec{r}^*, \quad \vec{r}^*, \vec{r} \in D. \quad (8)$$

Возьмем гладкую функцию  $W(\vec{r} - \vec{r}^*, h)$ ,  $\vec{r}, \vec{r}^* \in D$ ,  $h > 0$ , называемую ядром или функцией сглаживания. Она имеет конечный носитель, определяемый радиусом сглаживания  $h$ . Предполагаем, что функция сглаживания обладает следующими свойствами:

- 1)  $\iint W(\vec{r} - \vec{r}^*, h) d\vec{r}^* = 1$ ;
- 2)  $\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}^*, h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}^*)$ .

Под сходимостью здесь понимается сходимость в пространстве обобщенных функций.

Заменяя в формуле (8)  $\delta$ -функцию на функцию сглаживания, приходим к следующему приближенному выражению:

$$A(\vec{r}) = \iint A(\vec{r}^*) W(\vec{r} - \vec{r}^*, h) d\vec{r}^* + O(h^2), \quad \vec{r}^*, \vec{r} \in D. \quad (9)$$

В качестве конкретной функции сглаживания [6] используется кубический сплайн дефекта 1

$$W = \frac{1}{a} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}R^2 + \frac{3}{4}R^3, & 0 \leq R < 1; \\ \frac{1}{4}(2 - R)^3, & 1 \leq R \leq 2; \\ 0, & 2 < R, \end{cases}$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}^*|/h$ ;  $a = 1,5h$ ;  $0,7\pi h^2$ ;  $\pi h^3$  в одномерном, двумерном и трехмерном случае соответственно. Нетрудно доказать, что данная функция обладает указанными выше свойствами.

Для вычисления интеграла в формуле (9) разобьем область  $D$  (в плоскости  $Oxy$ ) на подобласти  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).  $D_j$  назовем макрочастицей (частицей  $j$ ) и обозначим через  $\vec{r}_j$  радиус-вектор ее центра масс. В осесимметричном случае частица является телом вращения. Она имеет плотность  $\rho_j$ , внутреннюю энергию  $E_j$ , осевую  $u_j$  и радиальную  $v_j$  компоненты скорости, а также массу  $m_j = 2\pi y_j \sigma_j \rho_j$ , где  $\sigma_j$  — площадь подобласти. Заметим, что форма частицы четко не определена.

Представим интеграл в виде суммы интегралов по подобластям

$$\sum_{j=1}^N \iint_{D_j} A(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h) \frac{2\pi y_j \rho_j}{2\pi y_j \rho_j} d\vec{r}_j \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j y_j} A(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (10)$$

Итак, формула (9) приводится к следующему приближенному выражению:

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j y_j^\nu} A(\vec{r}_j) W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (11)$$

Это основная интерполяционная формула метода SPH. Она позволяет выразить значение скалярной функции  $A$  в точке  $\vec{r}$  через значения  $A$  в частицах, находящихся в области действия ядра сглаживания, и перенести дифференцирование с неизвестной функции  $A$  на известную функцию  $W$ . Например, градиент давления и дивергенцию скорости можно записать следующим образом:

$$(\nabla P)_i = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j y_j^\nu} P_j \nabla_i W_{ij}; \quad (\nabla \cdot \vec{u})_i = \frac{1}{(2\pi y_i)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \vec{u}_j \cdot \nabla_i W_{ij}.$$

Значение  $\nu = 0$  соответствует декартовым координатам.

Заметим, что погрешность интерполяционной формулы (11) зависит, как видно из приближенного равенства (9), от радиуса сглаживания, а также, как следует из преобразования (10), от числа частиц, попадающих в круг  $|\vec{r} - \vec{r}_j| < 2h$ .

## 2. Системы SPH-уравнений для описания в цилиндрических координатах осесимметричного движения газа

**2.1. Неконсервативная система SPH-уравнений газодинамики.** Система обыкновенных дифференциальных SPH-уравнений газодинамики должна удовлетворять законам сохранения массы, импульса и энергии. В методе SPH закон сохранения массы выполняется автоматически, поскольку сплошная среда заменена на совокупность частиц, массы которых не меняются в процессе движения. Два других закона нуждаются в проверке, при этом следует иметь в виду, что в осесимметричном случае закон сохранения осевой компоненты импульса должен выполняться точно.

Для уравнений газодинамики с помощью основной формулы (11) можно построить несколько систем SPH-уравнений. Среди них наибольший интерес представляют ПК-системы, а также системы, для которых выполняется вариационный принцип наименьшего действия Гамильтона—Остроградского.

Заметим, что в формуле (11) радиус сглаживания является постоянной величиной. В данном разделе ради простоты мы придерживаемся такого допущения. В следующих разделах предполагается, что радиус сглаживания может быть переменным:  $h = \frac{1}{2} |h_i - h_j|$ .

Рассмотрим некоторые SPH-системы. От уравнений газодинамики (1)–(3) перейдем к уравнениям для частиц, заменив градиент и дивергенцию на выражения, приведенные в конце предыдущего раздела. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных  $\vec{u}_i$ ,  $\rho_i$ ,  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Для нее выполняется закон сохранения энергии. Действительно, складывая уравнение внутренней энергии с уравнением движения, умноженным на скорость,

приходим к уравнению энергии в консервативной форме для частицы  $i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i + \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left( \frac{P_i}{y_i^\nu} \vec{u}_j + \frac{P_j}{y_j^\nu} \vec{u}_i \right) \nabla_i W_{ij} = 0.$$

Умножив это уравнение на  $m_i$  и просуммировав по всем частицам, окончательно, в силу антисимметрии градиента ядра, получаем

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i = 0.$$

Таким образом, сохранение энергии имеет место, чего нельзя сказать об импульсе. На простых примерах нетрудно показать, что для рассматриваемой SPH-системы импульс не сохраняется даже в декартовых координатах. Причиной нарушения закона является отсутствие непосредственного парного взаимодействия частиц.

**2.2. Близкая к ПК система SPH-уравнений.** Из анализа преобразования (11), переводящего газодинамические уравнения в уравнения SPH, вытекает, что одним из возможных способов организации парного взаимодействия является предварительное приведение уравнений движения и неразрывности к виду, содержащему градиент плотности. Для этой цели в работе [6] при формировании исходных газодинамических уравнений используются известные формулы векторного анализа

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla (\rho); \quad \rho \nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\rho \vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla (\rho). \quad (12)$$

В цилиндрических координатах интерполяционная формула (11) не дает однозначного представления функций. Так, например, плотность можно определить двумя способами:

$$1) \quad \rho_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{y_j} W_{ij}; \quad (13)$$

$$2) \quad \rho_i = \frac{1}{2\pi y_i} \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}. \quad (14)$$

Эти представления, вообще говоря, могут приводить к разным системам SPH-уравнений.

Пусть газодинамические уравнения преобразованы в соответствии с формулами (12). Тогда, если взять плотность в виде (13), из уравнений газодинамики получается следующая система уравнений для частиц:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{y_j} \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} &= 0; \\ \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\vec{u}_j}{y_i} - \frac{\vec{u}_i}{y_j} \right) \nabla_i W_{ij} &= 0; \\ \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \left( \frac{\vec{u}_j}{y_i} - \frac{\vec{u}_i}{y_j} \right) \nabla_i W_{ij} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (15)$$

В систему введена искусственная вязкость, поделенная на квадрат плотности. Она составлена из линейной и квадратичной частей с коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\rho_{ij}}, & \text{если } (\vec{u}_i - \vec{u}_j) (\vec{r}_i - \vec{r}_j) < 0; \\ 0, & \text{если } (\vec{u}_i - \vec{u}_j) (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \geq 0. \end{cases}$$

Здесь  $\mu_{ij} = h \frac{(\vec{u}_i - \vec{u}_j)(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 + (0,1h)^2}$ ;  $c_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j)$ , где  $c_i, c_j$  — адиабатические скорости звука;  $\rho_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$ .

Отметим, что система уравнений (15) использовалась в работе [7] для моделирования гидродинамической неустойчивости Рэля—Тейлора.

Пусть над уравнениями SPH-системы и уравнением (6) совершаются формальные алгебраические преобразования. Систему SPH-уравнений газодинамики будем называть ПК-системой, если:

- 1) из энтропийного уравнения  $\left(\frac{dE_i}{dt} - \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{d\rho_i}{dt} = 0\right)$ , записанного для частицы  $i$ , и уравнения неразрывности следует уравнение внутренней энергии;
- 2) из уравнений движения и внутренней энергии вытекает консервативное уравнение полной энергии;
- 3) из уравнения движения следует закон изменения количества движения.

В дальнейшем первое условие полной консервативности будем называть энтропийным. Из него следует, что в уравнении внутренней энергии из (15) давление под знаком суммы вычисляется только в частице  $i$ .

Вместе с газодинамической SPH-системой можно рассматривать сопутствующую ей систему. В ней сохраняются все дифференциальные уравнения исходной системы, кроме уравнения неразрывности, а вместо последнего используется интегральное представление плотности, соответствующее исходной системе. Будем называть сопутствующую систему ПК-системой, если исходная SPH-система является ПК.

Заметим, что в декартовых координатах (убираем  $2\pi, y_i, y_j$ ) система (15) является ПК. Проверим, выполняются ли для системы (15) условия полной консервативности в цилиндрических координатах. Добавим к системе (15) энтропийное уравнение (6) для частицы  $i$ . Заменяя в нем производную по времени от плотности на производную из уравнения неразрывности, получим уравнение внутренней энергии. Далее, сложив его с умноженным на скорость уравнением движения, придем к уравнению полной энергии

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \frac{\vec{u}_j}{y_i} + \left( \frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \frac{\vec{u}_i}{y_j} \right] \nabla_i W_{ij} = 0,$$

имеющему консервативный вид, поскольку выражение в квадратных скобках симметрично. Из этого уравнения следует закон сохранения полной энергии. Итак, два условия полной консервативности выполняются. Третье условие — закон изменения количества движения — не выполняется. Действительно, осевая компонента импульса, вообще говоря, не сохраняется:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{l}_x \frac{d\vec{u}_i}{dt} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{l}_x \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{y_j} \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} \right] \neq 0.$$

Таким образом, система SPH-уравнений (15) не является ПК-системой, однако приближается к ней при удалении от оси симметрии.

**2.3. Первая ПК-система SPH-уравнений.** Пусть теперь плотность представлена формулой (14). Тогда градиент плотности вычисляется следующим образом:

$$\nabla \rho_i = \frac{1}{2\pi y_i} \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij} - \frac{\rho_i}{y_i} \nabla y_i, \quad (16)$$

а система SPH-уравнений для двумерных осесимметричных течений газа может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_i} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} &= \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i; \\ \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{1}{2\pi y_i} \sum_{j=1}^N m_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\vec{u}_i \frac{\rho_i}{y_i} \nabla y_i; \\ \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_i} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\frac{P_i}{\rho_i y_i} \vec{u}_i \nabla y_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (17)$$

Искусственная вязкость в этих уравнениях немного отличается от вязкости в системе (15), а именно, вместо величины  $\rho_j$  берется  $\rho_{ij} = (\rho_i y_i + \rho_j y_j) / 2$ .

Записанная в другой форме система SPH-уравнений (17) приведена в работе [8]. В ней уравнение движения получено вариационным методом на основе принципа наименьшего действия Гамильтона—Остроградского, а также показано, что оно может быть выведено формальным преобразованием уравнения (1) с последующим применением интерполяционной формулы (11) метода SPH.

Система замечательна тем, что для нее выполнены все условия полной консервативности. Действительно, из энтропийного уравнения (6) и уравнения неразрывности из (17) следует уравнение, совпадающее после добавления вязкости с уравнением внутренней энергии в системе (17). Далее, из уравнений движения и внутренней энергии легко получается уравнение полной энергии в консервативной форме

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_i} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \vec{u}_j + \left( \frac{P_j}{\rho_j^2 y_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \vec{u}_i \right] \nabla_i W_{ij} = 0.$$

Таким образом, с учетом уравнений движения и неразрывности имеется алгебраическая эквивалентность уравнений полной энергии, внутренней энергии и сохранения энтропии. Наконец, умножая уравнение движения на массу частицы и суммируя по всем частицам, приходим к следующей цепочке равенств:

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_i} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} \right] = \sum_{i=1}^N m_i \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i.$$

Отсюда получаем закон изменения импульса для совокупности частиц

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i,$$

из которого следует, что осевая компонента импульса сохраняется, а радиальная изменяется в соответствии с действующей силой. Итак, система SPH-уравнений (17) является ПК.

Заметим, что систему (17) можно было получить, не привлекая непосредственно формулу (16). Для этого достаточно было заменить формулы (12) преобразования газодинамических уравнений на тождества

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla (\rho) - \frac{P}{\rho y} \nabla y; \quad \rho \nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\rho \vec{u}) - \frac{1}{y} \vec{u} \cdot \nabla (\rho) + \frac{\rho}{y} \vec{u} \cdot \nabla y.$$

Интересно, что в этом случае представление плотности в виде (13) приводит к той же системе (17). Однако использование двух разных представлений плотности с различной настройкой исходных

уравнений газодинамики приводит к двум разным ((15) и (17)) SPH-системам. Первая система не консервативна относительно осевой компоненты импульса, вторая, напротив, — консервативна.

**2.4. Вторая ПК-система SPH-уравнений.** Заметим, что для плотности в форме (13) можно построить еще одну SPH-систему, если при преобразовании исходных уравнений использовать тождества

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{1}{y} \nabla \left( y \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho - \frac{P}{\rho y} \nabla y; \quad \rho \nabla \cdot \vec{u} = \tilde{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla \rho + \frac{\rho}{y} \vec{u} \cdot \nabla y,$$

где

$$\tilde{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}.$$

Эта система отличается от (17) только тем, что под знаком суммы у радиальной переменной индекс  $i$  заменен на индекс  $j$  и, наоборот, индекс  $j$  — на  $i$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_j} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_i} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} &= \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i; \\ \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{y_j} (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\vec{u}_i \frac{\rho_i}{y_i} \nabla y_i; \\ \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\frac{P_i}{\rho_i y_i} \vec{u}_i \nabla y_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (18)$$

Система (18) является ПК. Для нее выполняются все условия полной консервативности, в частности, уравнение полной энергии имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_j} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \vec{u}_j + \left( \frac{P_j}{\rho_j^2 y_i} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) \vec{u}_i \right] \nabla_i W_{ij} = 0.$$

Покажем, что уравнение движения в (18) можно вывести из вариационного принципа наименьшего действия Гамильтона—Остроградского.

Будем рассматривать движение совокупности частиц. Введем обозначения:

$$T = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\vec{u}_j^2}{2} \text{ — кинетическая энергия;}$$

$$U = \sum_{j=1}^N m_j E_j(\rho_j, S_j) \text{ — внутренняя энергия.}$$

Функция  $L = T - U$  называется функцией Лагранжа, а функционал  $\int_{t_0}^{t_1} L dt$  — действием.

Согласно принципу Гамильтона—Остроградского истинное движение частиц в промежутке времени  $(t_0, t_1)$  описывается функциями  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ , доставляющими минимум функционалу действия. Если этот минимум достигается, то выполняются уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Предположим, что движение газа изоэнтропическое. Тогда, поскольку в силу первого начала термодинамики  $\frac{\partial E}{\partial \rho} = \frac{P}{\rho^2}$ , уравнения Эйлера—Лагранжа можно привести к виду

$$m_i \frac{du_i}{dt} + \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_i} = 0; \quad m_i \frac{dv_i}{dt} + \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial \rho_j}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$



С использованием представления плотности (13) заменим в этой системе уравнений дифференцирование плотности на дифференцирование интерполяционного ядра. Преобразуем группу уравнений, соответствующих радиальному направлению движения:

$$\begin{aligned} -m_i \frac{dv_i}{dt} &= \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial \rho_j}{\partial y_i} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial y_i} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial \rho_j}{\partial y_i} = \\ &= -\frac{m_i}{y_i^2} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} W_{ij} + m_i \frac{1}{2\pi} \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \frac{m_j}{y_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{1}{y_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i} \right) = \\ &= -m_i \left( \frac{P}{\rho y} \right)_i + m_i \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_j} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_i} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_i}. \end{aligned}$$

Уравнения осевого направления преобразуются аналогично:

$$\begin{aligned} -m_i \frac{du_i}{dt} &= \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_i} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{y_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{y_k} W_{jk} \right) = m_i \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_j} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_i} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Приравняв в этих цепочках первый член к последнему, сократив на  $m_i$  и добавив искусственную вязкость, получим уравнение движения в системе (18).

**2.5. Третья ПК-система SPH-уравнений.** Приведем еще одну систему SPH-уравнений. В ней для организации парного взаимодействия частиц применяется совершенно другой подход. Он основан на предположении, что константа достаточно точно воспроизводится интерполяционной формулой (11). Введем два тождества:

$$\nabla(aP) = \frac{a}{y^\nu} \nabla(y^\nu P) + P \nabla a - \nu a \frac{P}{y} \nabla y; \quad \nabla \cdot \vec{u} = \tilde{\nabla} \cdot \vec{u} - \vec{u} \nabla a + \nu \vec{u} \frac{\nabla y}{y},$$

где  $\nu = 0$  или  $1$ ;  $a \equiv 1$ ;  $\tilde{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ .

Воспользуемся этими тождествами для предварительного преобразования уравнений газовой динамики, а затем применим формулу (11). В результате получим следующую систему SPH-уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left( \frac{P_i}{y_j^\nu} + \frac{P_j}{y_i^\nu} + \Omega_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} &= \nu \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i; \\ \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{\rho_i}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{1}{y_j} (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\nu \vec{u}_i \frac{\rho_i}{y_i} \nabla y_i; \\ \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left( \frac{P_i}{y_j} + \frac{1}{2} \Omega_{ij} \right) (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\nu \frac{P_i}{\rho_i y_i} \vec{u}_i \nabla y_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь  $\Omega_{ij} = \rho_{ij}^2 \frac{1}{y_{ij}^\nu} \Pi_{ij}$ ;  $y_{ij}^\nu = \frac{1}{2} (y_i^\nu + y_j^\nu)$ ;  $\Pi_{ij}$  — из системы (15). При  $\nu = 1$  система уравнений (19) немного в другой форме приведена в работе [9], посвященной численному моделированию методом

SPH кумулятивных зарядов. Нетрудно показать, что для системы (19) выполнены все условия полной консервативности. В частности, из (19) следует консервативное уравнение полной энергии

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_i + \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left[ \left( \frac{P_i}{y_j'} + \frac{1}{2} \Omega_{ij} \right) \vec{u}_j + \left( \frac{P_j}{y_i'} + \frac{1}{2} \Omega_{ij} \right) \vec{u}_i \right] \nabla_i W_{ij} = 0.$$

Итак, для решения осесимметричных газодинамических задач имеется несколько систем SPH-уравнений:

- 1) (15); 2) (17); 3) (18); 4) (19).

Первая система из данного списка не является ПК. В ней нарушен закон изменения количества движения (не сохраняется осевая компонента импульса). В декартовых же координатах все четыре системы являются ПК, причем любопытно, что первые три совпадают. Уравнение движения во второй и третьей SPH-системах может быть получено вариационным методом. В этом состоит их основное отличие от четвертой системы. Поэтому при выборе подходящей системы, по-видимому, следует отдать предпочтение SPH-системе (17) или системе (18).

*Замечание.* В области, удаленной от оси симметрии ( $y_i \gg h_i$ ), SPH-система (15) практически близка к ПК.

**2.6. Еще пять систем SPH-уравнений газодинамики.** Очевидно, что список SPH-систем можно продолжить, используя другие представления для градиента и дивергенции в исходных уравнениях. Например, с помощью дополнительных тождественных преобразований

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} &= \nabla \cdot \left( \frac{P}{\rho} \vec{u} \right) - \vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right); \\ \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} &= \tilde{\nabla} \cdot \left( \frac{P}{\rho} \vec{u} \right) - \vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho y} \vec{u} \nabla y; \\ \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} &= \nabla \cdot \left( \frac{P}{\rho} \vec{u} \right) - \frac{1}{y} \vec{u} \cdot \nabla \left( y \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho y} \vec{u} \nabla y; \\ \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{u} &= \frac{P}{\rho} \tilde{\nabla} \cdot \vec{u} + \nu \frac{P}{\rho y} \vec{u} \nabla y \end{aligned}$$

соответственно для первой, второй, третьей и четвертой систем нетрудно построить их варианты, в которых вместо уравнения внутренней энергии берутся соответственно следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 5) \quad \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \left( \frac{\vec{u}_j}{y_i} - \frac{\vec{u}_i}{y_j} \right) \nabla_i W_{ij} &= 0; \\ 6) \quad \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_i} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_j} + \Pi_{ij} \right) (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\frac{P_i}{\rho_i y_i} \vec{u}_i \nabla y_i; \\ 7) \quad \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_j} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_i} + \Pi_{ij} \right) (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\frac{P_i}{\rho_i y_i} \vec{u}_i \nabla y_i; \\ 8) \quad \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left( \frac{P_i}{y_j'} + \frac{P_j}{y_i'} + \Omega_{ij} \right) (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \nabla_i W_{ij} &= -\nu \frac{P_i}{\rho_i y_i} \vec{u}_i \nabla y_i. \end{aligned}$$

По сравнению с вышеприведенными системами 1–4 их варианты — системы 5–8 — имеют более низкий уровень консервативности. Действительно, для систем 5–8 не выполняется энтропийное условие, так как из энтропийного уравнения (6) и уравнений неразрывности систем 1–4 непосредственно не следуют представленные выше уравнения внутренней энергии. Таким образом, консервативные системы 6–8 не являются ПК, а неконсервативная система 5 при удалении от оси симметрии не стремится к ПК, так как в декартовых координатах она не является ПК.

Нетрудно построить SPH-систему, для которой выполняются энтропийное условие и закон сохранения импульса, но нарушен закон сохранения полной энергии. Такой, например, является SPH-система газодинамики

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{1}{(2\pi)^\nu} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{P_i}{\rho_i^2 y_i^\nu} + \frac{P_j}{\rho_j^2 y_j^\nu} \right) \nabla_i W_{ij} &= \nu \frac{P_i}{\rho_i y_i} \nabla y_i; \\ \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{\rho_i}{(2\pi y_i)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \vec{u}_j \nabla_i W_{ij} &= 0; \\ \frac{dE_i}{dt} + \frac{1}{(2\pi y_i)^\nu} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} P_i \vec{u}_j \nabla_i W_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

В этой системе уравнение движения совпадает с уравнением движения системы (17), а уравнения неразрывности и внутренней энергии взяты из неконсервативной системы подраздела 2.1.

### 3. Интегрирование системы SPH-уравнений газодинамики

**3.1. Центровая разностная ПК-схема.** Идею построения ПК-схемы интегрирования SPH-уравнений изложим на простой системе разностных уравнений, аппроксимирующих на гладких решениях и равномерной сетке со вторым порядком одномерные уравнения газовой динамики в лагранжевых переменных для плоской геометрии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(P+q)}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u; \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial t} + (P+q) \frac{\partial u}{\partial m} = 0.$$

Здесь  $m$  — лагранжева массовая координата;  $q$  — искусственная вязкость [10];  $V = 1/\rho$  — удельный объем. Уравнение состояния (5) берется в виде  $P = P(\rho, E)$ .

Второе уравнение системы — это уравнение (4), описывающее перемещение материальных точек (частиц). Энтропийное уравнение (6) и уравнение полной энергии (7) в лагранжевых координатах соответственно имеют вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \left( E + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial(P+q)u}{\partial m} = 0.$$

При построении разностной схемы для определения давления на полуцелом слое будет использоваться вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial m} = 0,$$

где  $a^2 = \rho^2 \frac{\partial P}{\partial \rho} + (P+q) \frac{\partial P}{\partial E}$ . На гладких решениях оно следует, как легко видеть, из двух последних уравнений приведенной выше системы. Заметим, что при нулевой псевдовязкости  $a = \rho c$ .

Введем разностную сетку  $(m_k, t^n)$  ( $k = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ). На ней рассматриваются сеточные функции  $f(m_k, t^n) \equiv f_k^n$ . Для записи разностных уравнений будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tau &= t^{n+1} - t^n; \quad r_k = \frac{\tau}{\Delta m_k}; \quad \Delta f_k = f_{k+1/2} - f_{k-1/2}; \quad \bar{f}_k = 0,5 (f_k^{n+1} + f_k^n); \\ P_{k+1/2} &= \frac{P_k \Delta x_k + P_{k+1} \Delta x_{k+1}}{\Delta x_k + \Delta x_{k+1}}; \quad u_{k+1/2} = \frac{u_k \Delta x_{k+1} + u_{k+1} \Delta x_k}{\Delta x_k + \Delta x_{k+1}}; \\ \Delta x_k &= 0,5 (x_{k+1} - x_{k-1}); \quad \Delta m_k = m_{k+1/2} - m_{k-1/2}. \end{aligned}$$

Уравнения газовой динамики интегрируются разностным модифицированным методом *предиктор—корректор*. От момента времени  $t^n$  до момента  $t^{n+1}$  решение строится в два этапа. Сначала (предиктор) определяется давление на промежуточном слое. Его можно находить двумя способами: либо из уравнения состояния

$$P_k^{n+1/2} = P\left(\rho_k^{n+1/2}, E_k^{n+1/2}\right),$$

где

$$\begin{aligned} E_k^{n+1/2} - E_k^n + 0,5(P_k^n + q_k^n)r_k\Delta u_k^n &= 0; \\ V_k^{n+1/2} - V_k^n - 0,5r_k\Delta u_k^n &= 0; \\ x_k^{n+1/2} &= x_k^n + \tau u_k^n, \end{aligned}$$

либо из вспомогательного уравнения

$$P_k^{n+1/2} - P_k^n + 0,5a_k^2r_k\Delta u_k^n = 0.$$

На втором этапе (корректор) производится окончательный расчет величин на верхнем временном слое:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} - u_k^n + r_k\Delta(P_k^{n+1/2} + q_k^n) &= 0; \\ E_k^{n+1} - E_k^n + (P_k^{n+1/2} + q_k^n)r_k\Delta\bar{u}_k &= 0; \\ V_k^{n+1} - V_k^n - r_k\Delta\bar{u}_k &= 0; \\ x_k^{n+1} &= x_k^n + \tau\bar{u}_k. \end{aligned}$$

Приведенная разностная схема обладает свойством полной консервативности. Действительно, масса счетной ячейки в силу лагранжовости сохраняется по построению, закон сохранения импульса в плоском случае выполняется точно, из разностных уравнений энтропии и сохранения объема непосредственно вытекает разностное уравнение внутренней энергии. Наконец, умножая разностное уравнение движения на  $\bar{u}_k$  и складывая с разностным уравнением внутренней энергии, получаем разностное уравнение полной энергии в консервативной форме

$$\left(E + \frac{u^2}{2}\right)_k^{n+1} - \left(E + \frac{u^2}{2}\right)_k^n + r_k\left((Pu)_{k+1/2} - (Pu)_{k-1/2}\right) = 0,$$

где  $(Pu)_{k+1/2} = \frac{\left(P_k^{n+1/2} + q_k^n\right)\bar{u}_{k+1}\Delta x_k + \left(P_{k+1}^{n+1/2} + q_{k+1}^n\right)\bar{u}_k\Delta x_{k+1}}{\Delta x_k + \Delta x_{k+1}}$ .

Исследование устойчивости системы разностных уравнений в акустическом приближении при "замороженных" коэффициентах и равномерной по массе сетке методом Фурье приводит к следующему спектральному необходимому условию устойчивости фон Неймана:

$$\frac{\alpha\tau}{\Delta m} \leq 2.$$

**3.2. Схема интегрирования SPH-уравнений газодинамики.** Для интегрирования всех приведенных SPH-систем используется модифицированный метод *предиктор—корректор*. В нем на втором этапе расчета в качестве скорости на промежуточном слое берется среднеарифметическое значение скоростей на верхнем и нижнем слоях. Такой прием повышает устойчивость метода и обеспечивает правильный расчет изменения кинетической энергии.

Следуя изложенному выше алгоритму построения разностной ПК-схемы, опишем метод интегрирования SPH-системы (17). При этом не будем останавливаться на разрешении граничных условий, эта проблема требует специального рассмотрения. Заметим, что в разд. 1 при постановке задачи

приведены граничные условия, для которых проблема решается относительно просто с помощью алгоритмов отражения частиц от жестких стенок.

Введем обозначение:  $A = \frac{P}{\rho^2 y}$ .

*Первый этап (предиктор).* Рассчитываем на промежуточном слое координаты частиц, внутреннюю энергию, плотность и давление в каждой частице ( $i = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \vec{r}_i^{n+1/2} &= \vec{r}_i^n + \frac{\tau}{2} \vec{u}_i^n; \\ E_i^{n+1/2} &= E_i^n + \frac{\tau}{2} \left[ - \left( \frac{Pv}{\rho y} \right)_i^n + \frac{1}{2\pi} \sum_j m_j \left( A_i + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right)^n (\vec{u}_i - \vec{u}_j)^n \nabla_i W_{ij}^n \right]; \\ \rho_i^{n+1/2} &= \rho_i^n + \frac{\tau}{2} \left[ - \left( \frac{\rho v}{y} \right)_i^n + \frac{1}{2\pi y_i^n} \sum_j m_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j)^n \nabla_i W_{ij}^n \right]; \\ P_i^{n+1/2} &= P \left( \rho_i^{n+1/2}, E_i^{n+1/2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

*Второй этап (корректор).* Второй этап состоит из двух шагов. Сначала вычисляются скорости частиц на верхнем и промежуточном слоях, а затем определяются внутренняя энергия, плотность и положение каждой частицы:

1)  $i = 1, 2, \dots, N$ ;

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\tau}{2\pi} \sum_j m_j \left( A_i^{n+1/2} + A_j^{n+1/2} + \Pi_{ij}^n \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( W_{ij}^{n+1/2} \right); \\ v_i^{n+1} &= v_i^n - \frac{\tau}{2\pi} \sum_j m_j \left( A_i^{n+1/2} + A_j^{n+1/2} + \Pi_{ij}^n \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \left( W_{ij}^{n+1/2} \right) + \tau \left( \frac{P}{\rho y} \right)_i^{n+1/2}; \\ \vec{u}_i^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (\vec{u}_i^n + \vec{u}_i^{n+1}); \end{aligned}$$

2)  $i = 1, 2, \dots, N$ ;

$$\begin{aligned} E_i^{n+1} &= E_i^n + \tau \left[ - \left( \frac{Pv}{\rho y} \right)_i^{n+1/2} + \frac{1}{2\pi} \sum_j m_j \left( A_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij}^n \right) (\vec{u}_i - \vec{u}_j)^{n+1/2} \nabla_i W_{ij}^{n+1/2} \right]; \\ \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \tau \left[ - \left( \frac{\rho v}{y} \right)_i^{n+1/2} + \frac{1}{2\pi y_i^{n+1/2}} \sum_j m_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j)^{n+1/2} \nabla_i W_{ij}^{n+1/2} \right]; \\ \vec{r}_i^{n+1} &= \vec{r}_i^n + \tau \vec{u}_i^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Схема интегрирования является ПК. Действительно, из разностного энтропийного уравнения

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} - \frac{P_i^{n+1/2}}{\left( \rho_i^{n+1/2} \right)^2} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} = 0$$

и уравнения неразрывности непосредственно следует уравнение внутренней энергии, т. е. энтропийное условие выполнено. Умножая уравнения движения на массу частицы и суммируя по всем частицам, убеждаемся в справедливости закона сохранения количества движения. Наконец, из уравнений движения и внутренней энергии вытекает консервативное уравнение полной энергии

$$(EP)_i^{n+1} - (EP)_i^n + \frac{\tau}{2\pi} \sum_j m_j \left[ \left( A_j^{n+1/2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij}^n \right) \vec{u}_i^{n+1/2} + \left( A_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij}^n \right) \vec{u}_j^{n+1/2} \right] \nabla_i W_{ij}^{n+1/2} = 0,$$

где  $EP = E + \vec{u}^2/2$ .

*Замечание 1.* Метод сглаженных частиц допускает расчет плотности, используя как дифференциальное (20), (21), так и интегральное ее представление (14). В связи с этим возможен следующий алгоритм расчета:

1) на первом этапе вместо выражения (20) используется формула

$$\rho_i^{n+1/2} = \frac{1}{2\pi y_i^{n+1/2}} \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}^{n+1/2};$$

2) на втором этапе вместо выражения (21) берется формула

$$\rho_i^{n+1} = \frac{1}{2\pi y_i^{n+1}} \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}^{n+1},$$

т. е. плотность полностью определяется из интегрального представления.

*Замечание 2.* Если для описания осесимметричного течения используется SPH-система (15) или (18), то в качестве интегрального представления плотности берется выражение (13).

#### 4. Численный пример

Рассматривается одномерная сферическая задача о сильном взрыве [11]. Начальная геометрия задачи представляет собой две области: в первой области, шаре радиусом  $r = 0,1$  с центром в начале координат, задана энергия  $E_0 = 10^7$ , во второй, цилиндрической области энергия равна нулю. Газ находится в состоянии покоя, плотность  $\rho = 1$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

Задача решается в осесимметричной постановке до момента времени  $t = 0,75$ . Аналитическое положение фронта ударной волны на данный момент времени  $r_{\text{ф}} = 7,737$ ; плотность на ударной волне  $\rho_{\text{ф}} = 6$ , давление  $p_{\text{ф}} = 14,189$ , скорость  $u_{\text{ф}} = 3,439$  [11]. На оси использовался особый алгоритм расчета с переходом к решению трехмерной задачи.

Расчетная область ограничена цилиндром  $0 \leq x, y \leq 10$ , который для генерации частиц был разбит на 6 сферических слоев и один внешний слой. Шаг расстановки частиц при переходе из одного слоя в другой увеличивался в 1,5 раза. В первом слое, соответствующем области с заданной энергией взрыва, частицы расставлены с шагом 0,00087. Общее число частиц в задаче составило 1,8 млн.

На рис. 1 представлено распределение плотности на конечный момент времени.

На рис. 2–4 показаны усредненные по углу зависимости плотности, давления и скорости от значения радиуса на конечный момент времени. Видно хорошее согласие с аналитическим решением. Дисбаланс энергии в расчете не превысил 0,013%. Причиной появления дисбаланса является несовершенство механизма перехода в окрестности оси вращения от двумерной осесимметричной задачи к решению в декартовых координатах трехмерной задачи. В расчетах без перехода дисбаланс был на уровне вычислительных погрешностей. Например, в задаче о сильном цилиндрическом взрыве в плоской постановке дисбаланс на момент времени, когда ударная волна прошла 60 начальных радиусов, составил  $2,2 \cdot 10^{-11}$ %. Начальная энергия, плотность, уравнение состояния, число частиц и их начальная расстановка были такими же, как в приведенной выше сферической задаче.

#### Заключение

Подведем итоги работы:

1. Формализм метода сглаженных частиц позволяет построить для уравнений газовой динамики несколько различных систем SPH-уравнений. В настоящей работе дается определение ПК-систем SPH-уравнений газодинамики и из множества всех систем выделяются обладающие

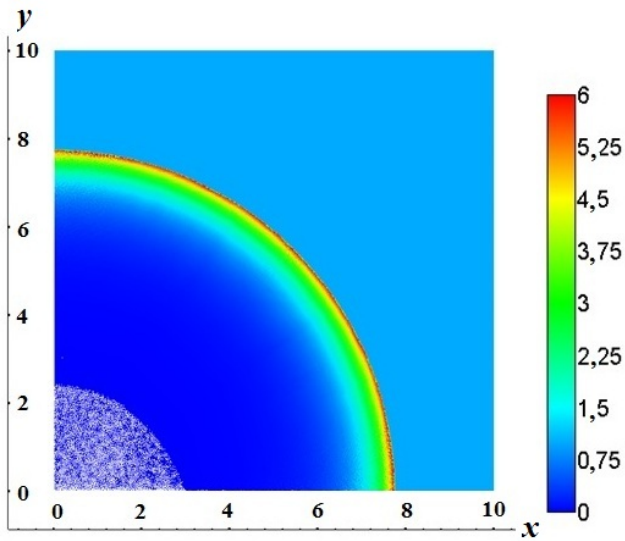


Рис. 1. Распределение плотности

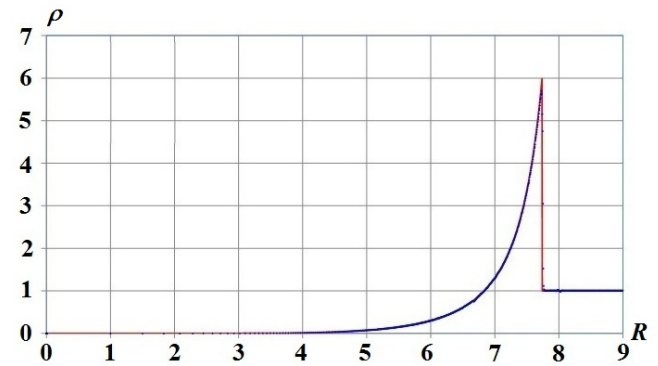


Рис. 2. Зависимости плотности от радиуса: — точное решение; • — расчет

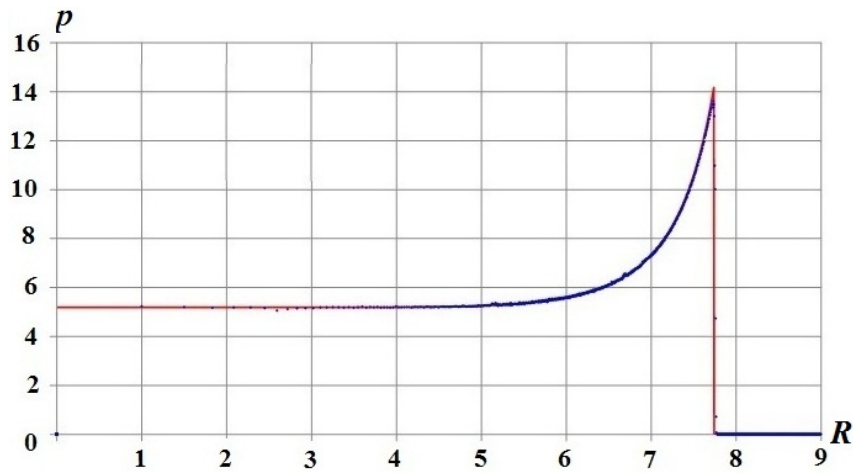


Рис. 3. Зависимости давления от радиуса: — точное решение; • — расчет

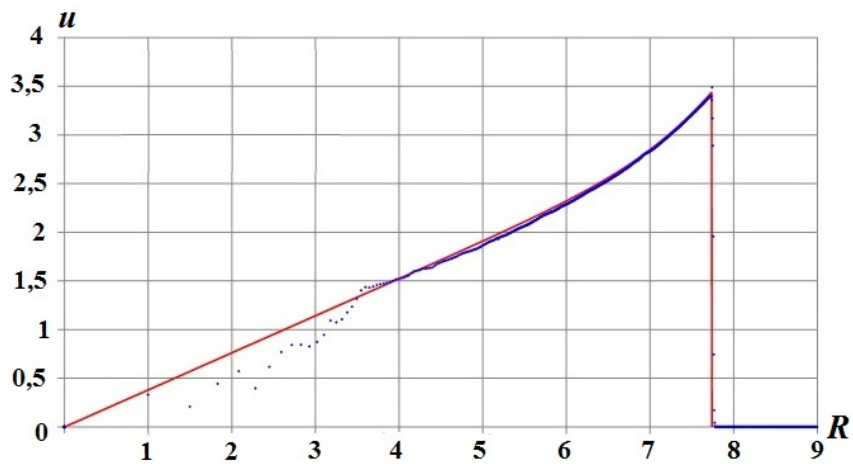


Рис. 4. Зависимости скорости от радиуса: — точное решение; • — расчет

- указанным свойством. Приводится десять систем, четыре из которых не консервативны, причем две из них не консервативны даже в декартовых координатах, три удовлетворяют свойству полной консервативности, остальные — консервативны, но не полностью.
2. Две из приведенных ПК-систем известны, они опубликованы в работах [8, 9]. В третьей ПК-системе, точно так же, как в работе Брукшоу [8], уравнение движения строится вариационным методом с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона—Остроградского. Новая система почти совпадает с системой Брукшоу [8], отличия порождены разным представлением плотности: либо как среднее "плоских" плотностей, либо как среднее значение по пространству.
  3. Для численного интегрирования систем SPH-уравнений предложен модифицированный метод *предиктор—корректор*, в основе которого лежит центровая разностная ПК-схема лагранжевой газодинамики. Модифицированный метод сохраняет полную консервативность исходной SPH-системы. В работе схема интегрирования построена для системы SPH-уравнений Брукшоу [8], для других систем модифицированный метод реализуется аналогично.
  4. Возможность использования ПК-схемы интегрирования при численном моделировании двумерных осесимметричных течений газа продемонстрирована на задаче о сильном сферическом взрыве.

### Список литературы

1. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1977. No 181. P. 375.
2. *Lucy L. B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *Astron. J.* 1977. Vol. 82, No 12. P. 1013.
3. *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 1969. Т. 9, № 4. С. 953—958.  
*Popov Yu. P., Samarskiy A. A.* Polnostyu konservativnyye raznostnyye skhemy // *Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz.* 1969. Т. 9, № 4. С. 953—958.
4. *Харлоу Ф. Х.* Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // *Вычислительные методы в гидродинамике.* М.: Мир, 1967. С. 316—342.  
*Kharlou F. Kh.* Chislennyy metod chastits v yacheykakh dlya zadach gidroinamiki // *Vychislitelnye metody v gidroinamike.* М.: Mir, 1967. S. 316—342.
5. *Бондаренко Ю. А.* Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.  
*Bondarenko Yu. A.* Konservativnoe rasshchepleniye uravneniya energii v raznostnykh skhemakh tipa "krest" dlya lagranzhevoy gazodinamiki // *Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz.* 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
6. *Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 1992. Vol. 30. P. 543—574.
7. *Herant M., Benz W.* Postexplosion hydrodynamics of SN 1987A // *Astrophys. J.*, 1992. Vol. 387. P. 294—308.
8. *Brookshaw L.* Smooth particle hydrodynamics in cylindrical coordinates // *ANZIAM J.*, 2003. Vol. 44 (E). P. C114—C139.
9. *Ba ê ta-Neves A. P., Ferreira A.* Shaped charge simulation using SPH in cylindrical coordinates // *Int. J. for Comp.-Aided Eng. and Software.* 2015. Vol. 32, No 2. P. 370—386.
10. *Риктмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.  
*Rikhtmayer R., Morton K.* Raznostnyye metody resheniya kraevykh zadach. М.: Mir, 1972.



11. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.  
*Sedov L. I.* Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. M.: Nauka, 1981.

Статья поступила в редакцию 03.07.19.

FULLY CONSERVATIVE SPH-SYSTEMS IN GAS DYNAMICS AND A SCHEME FOR NUMERICALLY INTEGRATING THEM / I. D. Blazhnov, M. N. Vishnyakova, S. N. Polishchuk, B. P. Tikhomirov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

Fully conservative systems are identified among a set of ordinary differential equation systems of the smoothed particles hydrodynamics (SPH) method describing two-dimensional axially symmetric flows. A fully conservative SPH system has been constructed with the variational method and is a "duplicate" of the known Brookshaw system for equations in cylindrical coordinates. A modified *predictor-corrector* method for the numerical integration of SPH systems, which is based on the fully conservative central difference scheme of Lagrangian fluid dynamics, is proposed and it is demonstrated how the method can be used to simulate 2D axially symmetric gas flows.

*Keywords:* SPH-method, axially symmetric flows, the least action principle, Lagrangian fluid dynamics, central difference schemes, a modified *predictor-corrector* method, the problem of an intense explosion.

---