

УДК 533.9

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПЛОСКИМ СЛОЕМ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

А. И. Голубев, Н. П. Пятаков
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Сформулирована модельная задача о взаимодействии лазерного излучения с плоским слоем пространственно-однородной электронной плазмы. При этом сделан ряд предположений, позволяющих перейти от кинетического уравнения Власова для электронной плазмы к простой гидродинамической модели.

Получено аналитическое решение модельной задачи. Оно может быть использовано для тестирования программ, с помощью которых выполняются численные исследования взаимодействия лазерного излучения с плазмой, и для предварительных оценок пространственных шагов при таких исследованиях.

Ключевые слова: бесстолкновительная плазма, уравнения Максвелла, уравнение Власова, гидродинамическая модель.

Введение

Численное моделирование широко применяется при проведении исследований во многих областях физики плазмы. Одной из таких областей является взаимодействие лазерного излучения с плазмой. Отметим, что при этом, как правило, для моделирования поведения плазмы используется численный метод *частица в ячейке* [1].

Для указанных задач трудно получить априорные оценки характерных пространственных масштабов изменения решения, и поэтому сложно заранее сделать обоснованный выбор пространственных шагов, требуемых при их расчете. Важность вопроса о выборе счетных параметров при численном моделировании взаимодействия лазерного излучения с плазмой подтверждается тем, что в каждой публикации по данной теме обычно приводятся сведения о пространственных шагах использованных сеток и, зачастую, о числе модельных частиц в ячейке (см., например, [2–4]).

В данной работе сформулирована и решена аналитически модельная задача о взаимодействии лазерного излучения с плоским слоем пространственно-однородной электронной плазмы. При ее формулировке сделан ряд предположений, позволяющих перейти от кинетического уравнения Власова для электронной плазмы к простой гидродинамической модели.

Полученное аналитическое решение может оказаться полезным для тестирования программ, с помощью которых выполняются численные исследования взаимодействия лазерного излучения с плазмой, и для предварительных оценок пространственных шагов при таких исследованиях.

Уравнения модельной задачи

Напомним, что математическая модель, используемая при численном исследовании взаимодействия лазерного излучения с бесстолкновительной плазмой, как правило, включает в себя релятивистские кинетические уравнения Власова для функций распределения ионов и электронов $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ (индекс α обозначает сорт частиц) и уравнения Максвелла для напряженностей электромагнитного

поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$. Здесь t — время, (\mathbf{r}, \mathbf{p}) — координаты в фазовом пространстве. В дальнейшем при записи этих уравнений будем использовать декартову систему координат (x, y, z) .

Сформулируем модельную задачу, последовательно упрощая систему кинетических уравнений и уравнений Максвелла. Прежде всего предположим, что ионные компоненты плазмы на рассматриваемой стадии взаимодействия лазерного излучения с плазмой остаются неподвижными. Тогда останется только кинетическое уравнение Власова для функции распределения электронов, так что индекс α в дальнейшем будем опускать. Будем также полагать, что все входящие в уравнения величины не зависят от переменных y, z , а дополнительные условия таковы, что компоненты E_z, H_x, H_y электромагнитного поля равны нулю. В этом случае получаем типичную пространственно-одномерную математическую модель, которая находит широкое применение при изучении различных задач физики плазмы.

Уравнения этой модели имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - (E_x + v_y H_z) \frac{\partial f}{\partial p_x} - (E_y - v_x H_z) \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (3)$$

Функция распределения в (1) зависит от переменных t, x, p_x, p_y . Скорость \mathbf{v} , кинетическая энергия электронов ϵ , а также их плотность тока \mathbf{j} и концентрация n вычисляются по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + p^2} - 1, \quad \text{где } p^2 = p_x^2 + p_y^2; \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = - \int \int dp_x dp_y \mathbf{v} f(t, x, p_x, p_y); \quad n = \int \int dp_x dp_y f(t, x, p_x, p_y). \quad (5)$$

Уравнения пространственно-одномерной математической модели (1)–(5) записаны в специальной системе единиц измерения, связь которой с системой единиц СГС, обычно используемой при записи исходных уравнений, имеет вид ([s] означает единицу измерения величины s)

$$[t] = \tau_*; \quad [x] = x_* = c\tau_*; \quad [p] = p_* = m_e c; \quad [f] = \frac{n_*}{p_*^2}; \quad [\epsilon] = m_e c^2; \quad [E] = [H] = E_* = \frac{m_e c}{e\tau_*}.$$

Здесь e, m_e — заряд и масса электрона; время τ_* равно обратной плазменной частоте ω_p , $\tau_* = \omega_p^{-1} = (4\pi n_* e^2 / m_e)^{-1/2}$.

Далее предполагается, что решение уравнений (1)–(3) вычисляется в области $D = \{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ при следующих дополнительных условиях:

- в начальный момент времени $t = 0$ электроны холодные, т. е.

$$f(t = 0, x, p_x, p_y) = n_0(x) \delta(p_x) \delta(p_y);$$

- в начальный момент времени все компоненты электромагнитного поля в области D равны нулю;
- граничные условия для компонент электромагнитного поля заданы в виде

$$x = x_{\min}: E_y + H_z = 0; \quad x = x_{\max}: -E_y + H_z = 2\beta\varphi(t), \quad (6)$$

где β — некоторый параметр, характеризующий интенсивность линейно поляризованного лазерного излучения;

- электроны могут свободно переходить через границы области D .

При оценке точности результатов численного моделирования взаимодействия лазерного излучения с плазмой полезно использовать уравнение баланса энергии в системе *плазма — электромагнитное поле*. Из уравнений (1)–(3) нетрудно получить следующее уравнение для суммы плотности кинетической энергии w_k и плотности энергии поля w_p :

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_k + w_p) = - \frac{\partial}{\partial x} \int \int dp_x dp_y \varepsilon v_x f - \frac{\partial}{\partial x} H_z E_y,$$

где $w_p = (E^2 + H^2)/2$; $w_k = \int \int dp_x dp_y \varepsilon f$; $E^2 = E_x^2 + E_y^2$; $H^2 = H_z^2$. После интегрирования этого уравнения по области $D = \{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ и по времени t получим искомое уравнение баланса энергии:

$$W(t) + W_{k1}(t) + W_{k2}(t) + W_{f1}(t) + W_f^r(t) = W(t=0) + W_f^\beta(t). \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (w_k + w_p) dx; \\ W_{k1}(t) &= - \int_0^t dt' \int \int dp_x dp_y \varepsilon v_x f(t', x_{\min}, p_x, p_y); \quad W_{k2}(t) = \int_0^t dt' \int \int dp_x dp_y \varepsilon v_x f(t', x_{\max}, p_x, p_y); \\ W_{f1}(t) &= \int_0^t dt' E_y^2|_{x=x_{\min}}; \quad W_f^r(t) = \int_0^t dt' P_2^r, \quad P_2^r = (E_y|_{x=x_{\max}} + \beta\varphi)^2; \quad W_f^\beta(t) = \int_0^t dt' P_2^\beta, \quad P_2^\beta = (\beta\varphi)^2. \end{aligned}$$

Компоненты вектора Пойнтинга на границах области D преобразованы с учетом дополнительных условий (6).

Из уравнения (7) следует, что коэффициент отражения $R(t)$ лазерного излучения от слоя плазмы равен

$$R(t) = \frac{W_f^r(t)}{W_f^\beta(t)}. \quad (8)$$

Сформулированная таким образом одномерная задача (1)–(3), (6) остается достаточно сложной для аналитического исследования. Перейдем от нее к более простой задаче, которую назовем модельной.

Будем считать движение электронов нерелятивистским; тогда в кинетическом уравнении (1) можно полагать, что $|H_z v_x| \ll |E_y|$. Дополнительно опустим в этом уравнении (конечно, без особых на то оснований) слагаемое с производной по x и не будем учитывать влияние на движение электронов компоненты $F_x = -(E_x + v_y H_z)$ силы Лоренца. Существенным упрощением в модельной задаче является отсутствие движения электронов вдоль оси x . Это означает, что их концентрация n остается неизменной по времени, т. е. $n = n_0(x)$. Кроме того, для холодной плазмы в качестве следствия упрощенного кинетического уравнения можно получить уравнение для компоненты j_y плотности тока

$$\frac{\partial j_y}{\partial t} = E_y n. \quad (9)$$

Отметим, что для модельной задачи имеет место уравнение баланса энергии вида (7) с той лишь разницей, что в нем потоки кинетической энергии через границы области D равны нулю: $W_{k1}(t) = W_{k2}(t) = 0$, а плотность энергии поля равна $w_p = (E_y^2 + H_z^2)/2$.

Аналитическое решение уравнений модельной задачи

Аналитическое решение уравнений (3), (9) с условиями (6) получим, полагая, что область D имеет вид $D = \{-\infty < x \leq x_{\max}\}$ ($x_{\max} > 0$), а плазма занимает область $x < 0$. Перейдем от переменной t

к новой переменной (к задержанному времени) $\tau = x + t - x_{\max}$, $\tau \geq 0$. Уравнение (9) при этом не изменится (только следует t заменить на τ), а уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + j_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_z}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем в рассмотрение инварианты Римана $F = H_z - E_y$; $G = H_z + E_y$. Из системы (10) для них получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + j_y = 0; \quad 2 \frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial x} + j_y = 0. \quad (11)$$

Согласно (6) дополнительные условия для функций F , G имеют вид

$$F(\tau, x = x_{\max}) = 2\beta\varphi(\tau); \quad G(\tau, x = -\infty) = 0. \quad (12)$$

Отметим, что, поскольку при $0 < x < x_{\max}$ $j_y = 0$, то из (11), (12) следует, что на этом интервале $F(\tau, x) = 2\beta\varphi(\tau)$.

Проще всего аналитическое решение поставленной задачи можно найти, сформулировав предварительно краевую задачу для компоненты E_y . Дифференцируя первое уравнение в (11) по переменной τ и учитывая определение инварианта F и второе уравнение из (10), получаем следующее уравнение для E_y :

$$2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial \tau \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = n_0 E_y. \quad (13)$$

Дополнительное условие для E_y при $x = -\infty$ получается из условия для G (12) и второго уравнения (10); оно имеет вид $\frac{\partial E_y}{\partial x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Дополнительное условие при $x = x_{\max}$ получается после дифференцирования по τ условия (12) для функции F и учета второго уравнения (10); оно имеет вид

$$2 \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = -2\beta \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Сформулированная краевая задача будет решена аналитически для случая, когда в области $x < 0$, занимаемой плазмой, концентрация электронов постоянна: $n = n_0 = \text{const}$.

Используем для ее решения преобразование Лапласа. Положим

$$E(p, x) = \int_0^\infty e^{-p\tau} E_y d\tau; \quad g(p) = \beta \int_0^\infty e^{-p\tau} \varphi d\tau,$$

где p — аргумент преобразования Лапласа. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (13), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для E

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + 2p \frac{dE}{dx} = n_0 E, \quad (14)$$

которое следует решать при дополнительных краевых условиях

$$\frac{dE}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \quad 2pE + \frac{dE}{dx} = -2pg \quad \text{при } x = x_{\max}.$$

При этом на границе $x = 0$ должны быть непрерывны функция E и ее производная по x (это следует из непрерывности на этой границе функций E_y , H_z).

Нетрудно убедиться, что решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям, имеет следующий вид:

$$\text{при } x > 0 \quad E = -g + B_2 e^{-2px}; \quad \text{при } x < 0 \quad E = A_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \lambda_2 = \sqrt{p^2 + n_0} - p. \quad (15)$$

Постоянные A_2 и B_2 определяются из условий непрерывности функции $E(x)$ и ее производной на границе $x = 0$:

$$-g + B_2 = A_2; \quad -2pB_2 = \lambda_2 A_2. \quad (16)$$

С учетом формул (15) и соотношений (16) искомое решение уравнения (14) может быть представлено в следующей форме:

$$\text{при } x > 0 \quad E = g \left(\frac{\sqrt{p^2 + n_0} - p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{-2px} - 1 \right); \quad \text{при } x < 0 \quad E = -2g \frac{p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}. \quad (17)$$

Поскольку согласно второму уравнению в системе (10) образ по Лапласу H для компоненты H_z связан с E соотношением $H = -E - p^{-1} \frac{dE}{dx}$, то для H находим

$$\text{при } x > 0 \quad H = g \left(\frac{\sqrt{p^2 + n_0} - p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{-2px} + 1 \right); \quad \text{при } x < 0 \quad H = 2g \frac{\sqrt{p^2 + n_0}}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}. \quad (18)$$

Сначала, исходя из формул (17), (18), получим временное представление решения в области $x > 0$. Отметим, что при $x = 0$

$$E = e(p) = -2g \frac{p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p}. \quad (19)$$

С учетом этого выражения формулу (17) для E при $x > 0$ можно записать в виде

$$E = -g(p) + g(p) e^{-2px} + e(p) e^{-2px}.$$

Отметим, что прообраз $\psi(\tau)$ для функции $e(p)$ можно представить в виде [5]

$$\psi(\tau) = -2\beta \int_0^\tau \frac{d\varphi(t')}{dt'} \frac{J_1(\sqrt{n_0}(\tau - t'))}{\sqrt{n_0}(\tau - t')} dt', \quad (20)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Следовательно, временное представление для E_y при $x > 0$ можно записать следующим образом:

$$E_y(\tau, x) = -\beta\varphi(\tau) + (\beta\varphi(\tau - 2x) + \psi(\tau - 2x)), \quad (21)$$

где слагаемые в правой части отличны от нуля только при положительных значениях аргументов.

Временное представление для H_z при $x > 0$ легко найти из соотношения $H_z = F + E_y = 2\beta\varphi(\tau) + E_y$:

$$H_z(\tau, x) = \beta\varphi(\tau) + (\beta\varphi(\tau - 2x) + \psi(\tau - 2x)). \quad (22)$$

Формулы (20)–(22) дают при $x > 0$ аналитическое решение модельной задачи с плотностью тока (9). Отметим, что слагаемые в скобках в (21), (22) соответствуют излучению, отраженному от плазмы.

Для аналитического решения (21), как и следовало ожидать,

$$P_2^r(t) = (\beta\varphi(t - 2x_{\max}) + \psi(t - 2x_{\max}))^2,$$

причем $P_2^r(t) = 0$ при $t < 2x_{\max}$.

Теперь, снова исходя из формул (17), (18), получим временное представление решения в области $x < 0$. Согласно (17) в этой области $E(p, x) = e(p) e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}$. Учитывая вид прообраза для

экспоненты в этой формуле ([5], формула (23)), временное представление $E_y(\tau, x)$ при $x < 0$ можно записать следующим образом:

$$E_y(\tau, x) = \psi(\tau) + \sqrt{n_0}x \int_0^\tau \psi(\tau - t') \frac{J_1\left(\sqrt{n_0}\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}\right)}{\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}} dt'. \quad (23)$$

Выражение для компоненты $H_z(\tau, x)$ в области $x < 0$ несложно написать, если учесть, что в ней согласно (18), (19) $H(p, x) = (2g(p) + e(p))e^{(\sqrt{p^2+n_0}-p)x}$. Следовательно,

$$H_z(\tau, x) = 2\beta\varphi(\tau) + \psi(\tau) + \sqrt{n_0}x \int_0^\tau (2\beta\varphi(\tau - t') + \psi(\tau - t')) \frac{J_1\left(\sqrt{n_0}\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}\right)}{\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}} dt'. \quad (24)$$

Формулы (20)–(24) дают искомое аналитическое решение модельной задачи в области $D = \{-\infty < x \leq x_{\max}\}$; напомним, что в них $\tau = x + t - x_{\max}$, $\tau \geq 0$. В этом решении в силу линейности модельной задачи компоненты электромагнитного поля пропорциональны параметру β , характеризующему интенсивность лазерного излучения.

Полученное аналитическое решение имеет довольно сложный вид. Однако современные пакеты прикладных программ дают возможность вычислить значения компонент $E_y(\tau, x)$, $H_z(\tau, x)$ при требуемых значениях аргументов по приведенным выше формулам без особых усилий со стороны пользователя этих пакетов. Авторами статьи для этих целей использовался пакет Mathcad 14.

Замечание. В книге [1] для тестирования программ, в которых реализована пространственно-одномерная математическая модель (1)–(3), предлагается так называемая задача о предвестнике [6]. В ней рассматривается распространение имеющей малую амплитуду электромагнитной волны с частотой ω из вакуума в разреженную незамагниченную плазму, плазменная частота которой $\omega_p < \omega$. В этом случае в плазме можно наблюдать сигналы (предвестники), опережающие основную часть волны. В книге [6] (формула (22.13)) приведено полученное А. Зоммерфельдом приближенное аналитическое решение этой задачи. Отметим, что в книге [1] в аналогичной формуле (7.2) допущена опечатка; чтобы согласовать эту формулу с формулой (22.13) из [6] (и восстановить в ней правильную размерность), выражение (7.2) для $f(x, t)$ в [1] следует (в обозначениях книги [1]) дополнителью умножить на функцию $x^{-1/2}$.

Покажем, что это же решение для предвестника может быть найдено в рамках рассмотренной выше модельной задачи, если при этом сделать те же предположения, что в книге [6].

Пусть зависимость $\varphi(t)$ в (6) задана в виде $\varphi(t) = \sin(\omega t)$. Будем, следуя А. Зоммерфельду, пренебречь отражением волн от границы плазмы $x = 0$ и получим решение модельной задачи в области $x < 0$ для малых моментов времени τ , таких что $\omega\tau \ll 1$. В этом случае можно считать, что при выполнении обратного преобразования Лапласа основной вклад даст область значений параметра $p \gg \sqrt{n_0}$. Тогда при значениях $x < 0$ вместо исходного выражения для E (17) можно записать $E \approx -g \exp(n_0 x / 2p)$. Учитывая, что прообразом функции $p^{-1} \exp(-n_0 |x| / 2p)$ служит $J_0(\sqrt{2n_0|x|\tau})$ [5], где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, получаем для $E_y(\tau, x)$ при $x < 0$ следующее выражение:

$$E_y(\tau, x) \approx -\beta \int_0^\tau \frac{d\varphi(t')}{dt'} J_0\left(\sqrt{2n_0|x|(\tau - t')}\right) dt' = -\beta\omega \int_0^\tau \cos(\omega t') J_0\left(\sqrt{2n_0|x|(\tau - t')}\right) dt'.$$

Для моментов времени τ , таких что $\omega\tau \ll 1$, последовательно имеем

$$E_y(\tau, x) \approx -\beta\omega \int_0^\tau J_0\left(\sqrt{2n_0|x|t'}\right) dt' = -\frac{\beta\omega}{n_0|x|} \int_0^{\sqrt{2n_0|x|\tau}} t' J_0(t') dt' = -\frac{\beta\omega}{\sqrt{n_0}} \sqrt{2|x|^{-1}\tau} J_1\left(\sqrt{2n_0|x|\tau}\right).$$

Эта формула (с учетом отличий в принятых обозначениях и в выборе направления распространения волны) совпадает с формулой Зоммерфельда (22.13) [6] и с исправленной формулой (7.2) [1].

Обсуждение результатов численного моделирования

В дальнейшем более подробно рассмотрим важный частный случай, для которого зависимость $\varphi(t)$ в (6) имеет вид $\varphi(t) = \sin(\omega t)$, а частота лазерного излучения ω меньше плазменной частоты ω_p . При этом будем считать, что единица измерения концентрации электронов равна $n_* = n_0$, так что в формулах (20)–(24) надо положить $n_0 = 1$ и под частотой ω понимать отношение частоты лазерного излучения к плазменной частоте. При дальнейшем рассмотрении предполагается, что длительность лазерного импульса $\tau_i = 10\pi/\omega$, так что $\varphi(t) = 0$ при $\omega t > 10\pi$.

Для иллюстрации на рис. 1, 2 приведены временные зависимости для компонент E_y и H_z соответственно, полученные при разных частотах ω лазерного излучения на границе плазмы $x = 0$.

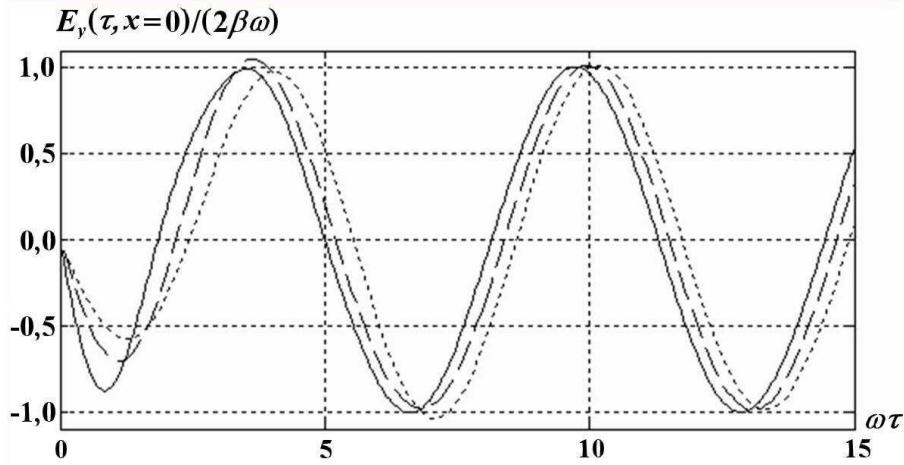


Рис. 1. Временные зависимости компоненты E_y на границе плазмы для разных частот: — $\omega/\omega_p = 0,3$; — — $\omega/\omega_p = 0,5$; - · - $\omega/\omega_p = 0,7$

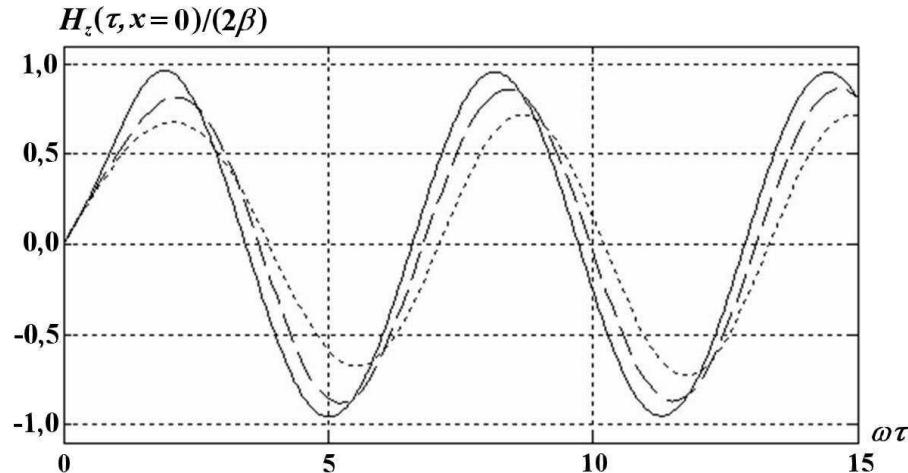


Рис. 2. Временные зависимости компоненты H_z на границе плазмы для разных частот: — $\omega/\omega_p = 0,3$; — — $\omega/\omega_p = 0,5$; - · - $\omega/\omega_p = 0,7$

Видно, что наиболее изменена по сравнению с остальными форма первой полуволны во временной зависимости для компоненты E_y (см. рис. 1).

На рис. 3, 4 для разных частот ω приведены при фиксированных значениях времени t_m зависимости этих компонент от переменной x в области $x < 0$, занимаемой плазмой. Значения t_m — моменты времени, при которых компоненты E_y и H_z на границе плазмы $x = 0$ достигают вторых максимумов (согласно рис. 1, 2 для компоненты $E_y \omega(t_m - x_{\max}) = 10$, для компоненты $H_z \omega(t_m - x_{\max}) = 8,5$). Как и следовало ожидать, в области $x < 0$ происходит сильное затухание этих компонент.

При интерпретации полученных результатов воспользуемся дисперсионным соотношением, связывающим частоту ω и волновой вектор k электромагнитной волны, распространение которой описывается линейной системой уравнений (3), (9). Полагая, что все искомые величины в этой системе имеют пространственно-временную зависимость вида $\exp(i(-\omega t + kx))$, $i^2 = -1$, для амплитуд E_{y0} , H_{z0} , j_{y0} получим следующую однородную систему уравнений:

$$\omega E_{y0} - j_{y0} - k H_{z0} = 0; \quad k E_{y0} - \omega H_{z0} = 0; \quad n E_{y0} + \omega j_{y0} = 0,$$

где $n = 1$ (в системе СГС вместо n будет ω_p^2 , вместо k — произведение $k c$). Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к хорошо известному дисперсионному соотноше-

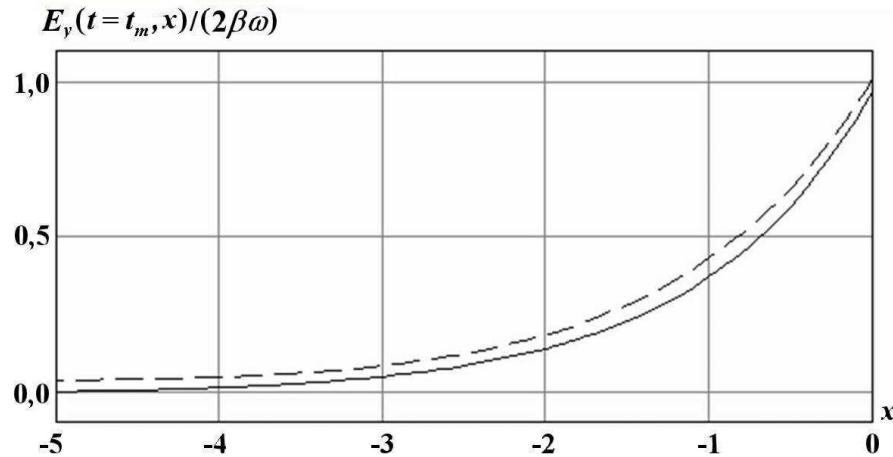


Рис. 3. Зависимость компоненты E_y от координаты x для разных частот: — $\omega/\omega_p = 0,3$; - - - $\omega/\omega_p = 0,5$

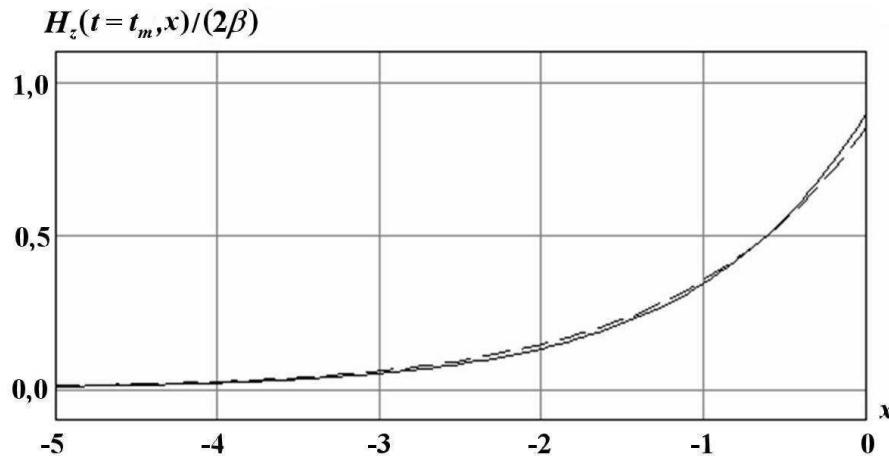


Рис. 4. Зависимость компоненты H_z от координаты x для разных частот: — $\omega/\omega_p = 0,3$; - - - $\omega/\omega_p = 0,5$

нию для распространения поперечных волн в холодной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля [7]: $k^2 = \omega^2 - 1$.

Согласно этому дисперсионному соотношению уменьшение в e раз амплитуды волны с частотой $\omega < 1$ при распространении ее в плазменном слое происходит на характерном масштабе $x_0 = (1 - \omega^2)^{-1/2}$. Для частоты $\omega = 0,3$ этот масштаб равен $x_0 = 1,05$, для частоты $\omega = 0,5$ $x_0 = 1,15$. Отметим, что амплитуды компонент E_y и H_z на рис. 3, 4 уменьшаются в $e^2 = 7,4$ раза на интервале $-2,05 < x < 0$ для частоты $\omega = 0,3$ и на интервале $-2,35 < x < 0$ для частоты $\omega = 0,5$. Длины этих интервалов хорошо согласуются со значениями $2x_0$, полученными выше из дисперсионного соотношения.

В таблице для различных частот ω приведены значения коэффициента отражения $R(\omega)$ лазерного излучения (8) на момент времени $t = \tau_i = 10\pi/\omega$; в рассматриваемом случае этот коэффициент вычисляется по формуле

$$R(\omega) = \frac{2}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} \left(\sin \omega t + \frac{\psi(t)}{\beta} \right)^2 dt.$$

Приведенные данные иллюстрируют хорошо известный факт, что при частотах лазерного излучения, много меньших плазменной частоты, происходит почти полное отражение этого излучения от слоя плазмы, а при частотах, превышающих плазменную частоту, отражение становится малым.

При постановке модельной задачи исходная система (1)–(3) уравнений Власова–Максвелла была существенно упрощена. Поэтому возникает естественный вопрос, как согласуется аналитическое решение модельной задачи с решением исходной пространственно-одномерной математической модели (1)–(3). Для ответа на этот вопрос проведем сравнение аналитического решения (20)–(24) модельной задачи с численным решением уравнений исходной одномерной модели (1)–(3).

Алгоритм решения этих уравнений содержит три этапа, типичных для численного моделирования динамики плазмы:

- 1) решение уравнений Максвелла при заданной плотности тока \mathbf{j} ;
- 2) расчет изменения распределения электронов в фазовом пространстве (решение уравнений движения для модельных частиц);
- 3) вычисление плотности тока по известному распределению электронов.

На каждом этапе применялись численные методы, хорошо зарекомендовавшие себя при моделировании поведения плазмы. Для решения уравнений Максвелла (3) использовалась разностная схема крест (см., например, [8]). Траектории модельных частиц определялись из системы уравнений движения, для численного решения которых применялась схема Бориса [1]. При вычислении силы, действующей на частицу, использовалась линейная интерполяция значений соответствующих величин из узлов ячейки разностной сетки, в которой находится частица в данный момент времени. Эта же интерполяция применялась и при определении плотности тока в узлах сетки при заданном распределении модельных частиц в расчетной области [1]. При задании распределений модельных частиц, соответствующих начальным условиям, использовался так называемый *спокойный старт* [9]. При этом каждой модельной частице приписывался вес, равный числу реальных частиц плазмы, находящихся в объеме фазового пространства, занимаемом данной модельной частицей в начальный момент времени. Веса модельных частиц не меняются при их движении.

Далее будет представлено сравнение аналитического решения с численным решением уравнений исходной одномерной модели для задачи, в которой концентрация электронов, частота лазерного излучения и длительность лазерного импульса соответственно равны $n_0 = 1,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $\omega = 2,07 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $\tau_i = 5 (2\pi/\omega)$, а интенсивность лазерного излучения может иметь значения $I_1 =$

Зависимость коэффициента отражения от частоты лазерного излучения

ω/ω_p	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$R(\omega/\omega_p)$	0,998	0,987	0,958	0,895	0,532	0,124	0,059	0,035	0,025	0,019

$= 10^{17}$ Вт/см², $I_2 = 10^{18}$ Вт/см², близкие к релятивистским. В этой задаче безразмерное значение частоты $\omega = 0,3$; значения параметра β равны соответственно $\beta_1 = 0,074$, $\beta_2 = 0,23$.

Численное решение этой задачи получено в расчетной области D с границами $x_{\min} = -100$, $x_{\max} = 300$. Шаг по переменной x выбирался равным $\Delta x = 0,125$ (в единицах системы СГС $\Delta x = 0,125c/\omega_p$); шаг по времени полагался равным $\Delta t = 0,5\Delta x$; в начальный момент времени в каждую ячейку разностной сетки помещалось равное количество частиц $pr = 4$ (эти счетные параметры выбраны по результатам расчетов на сходимость).

На рис. 5, 6 для двух указанных выше значений интенсивности лазерного излучения приведены временные зависимости для компонент E_y и H_z , вычисленные на границе плазмы $x = 0$ с использованием аналитического решения модельной задачи и на основе численного решения уравнений исходной одномерной модели (1)–(3) при интенсивностях I_1 , I_2 . Видно, что даже при интенсивности лазерного излучения $I = I_2 = 10^{18}$ Вт/см² аналитическое и численное решения для компонент E_y и H_z все еще неплохо согласуются между собой. Отметим, что в представленных выше расчетах с интенсивностями I_1 , I_2 счетный дисбаланс δ в энергии (вычисленный как абсолютное значение от-

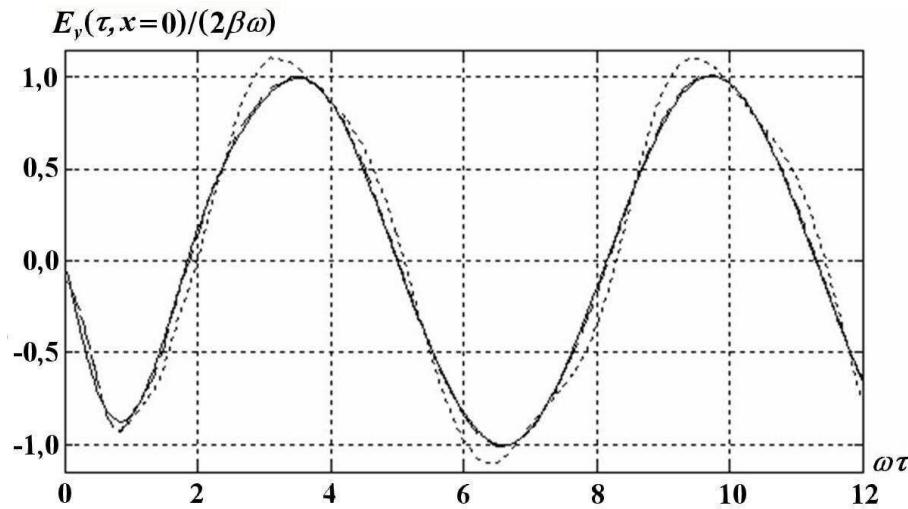


Рис. 5. Временные зависимости компоненты E_y на границе плазмы: — — аналитическое решение модельной задачи; — — — численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности излучения 10^{17} Вт/см²; - - - — численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности 10^{18} Вт/см²

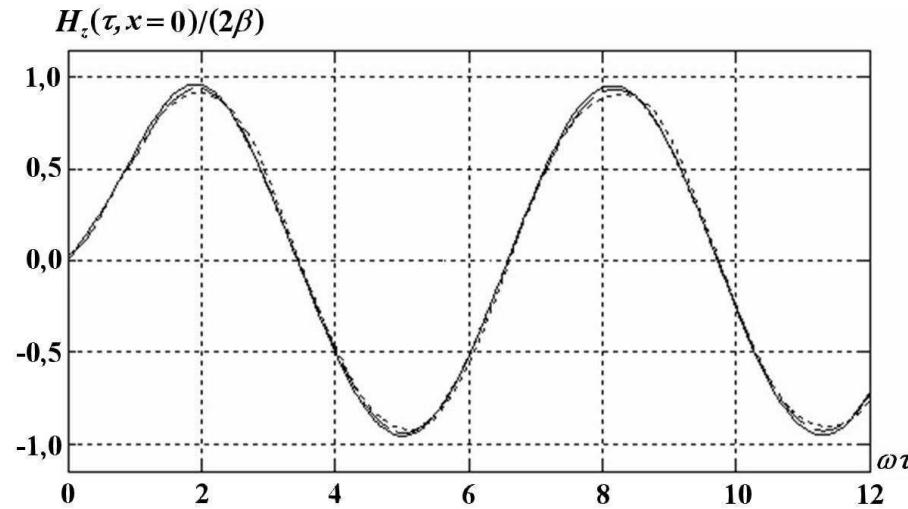


Рис. 6. Временные зависимости компоненты H_z на границе плазмы: — — аналитическое решение модельной задачи; — — — численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности излучения 10^{17} Вт/см²; - - - — численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности 10^{18} Вт/см²

ношения разности левой и правой частей уравнения (7) к правой его части) не превышал значения $\delta = 8 \cdot 10^{-5}$.

Заключение

Аналитическое решение модельной задачи, полученное в данной работе, прежде всего использовалось авторами для тестирования программ, с помощью которых выполняются численные исследования взаимодействия лазерного излучения с плазмой. При этом, например, в программу, предназначенную для решения уравнений (1)–(3), вносились соответствующие несложные изменения, которые позволяли получать непосредственно численное решение модельной задачи.

Кроме того, аналитическое решение оказалось полезным и при анализе результатов численного моделирования взаимодействия лазерного излучения с плазмой при значениях интенсивности излучения, приближающихся к релятивистским.

Авторы благодарят Б. П. Якутова за постоянную поддержку и полезные обсуждения работы.

Список литературы

1. *Бэдсл Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. *Буланов С. В., Есиркепов Т. Ж., Каменец Ф. Ф. и др.* О создании пучков с высоким качеством в процессе ускорения ионов мощным лазерным излучением // Физика плазмы. 2002. Т. 28, № 12. С. 1059–1076.
3. *Andreev A. A., Platonov K. Yu.* Nonlinear absorption of a short intense laser pulse in a nonuniform plasma // Physics of Plasma. 2003. Vol. 10, No 1. P. 220–226.
4. *Yan X. Q., Lin C., Sheng Z. M. at al.* Generating high-current monoenergetic proton beams by a circularly polarized laser pulse in the phase-stable acceleration regime // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 135003(1–4).
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
6. *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.
7. *Франк-Каменецкий Д. А.* Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964.
8. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
9. *Рошаль А. С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.

Статья поступила в редакцию 06.08.13.