

УДК 519.6

**ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС.  
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА  
ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ  
С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ФИЗИЧЕСКОЙ  
И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

О. Л. Александрова, Р. А. Барабанов, Д. Ю. Дьянов, С. С. Косарим, А. О. Наумов,  
В. Ф. Спиридонов, Е. А. Филимонкин, К. В. Циберев  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Рассматривается конечно-элементная методика, реализованная в пакете программ ЛОГОС для расчета квазистатических задач прочности конструкций с учетом эффектов физической и геометрической нелинейности. Методика реализует схему метода конечных элементов в форме метода перемещений, основанную на минимизации функционала потенциальной энергии деформируемой системы. Для линейно-упругого случая приводятся базовые соотношения и основные расчетные формулы конечно-элементной аппроксимации. Дается описание алгоритмов, обобщающих конечно-элементную методику на случай нелинейных квазистатических задач прочности конструкций.

*Ключевые слова:* пакет программ ЛОГОС, квазистатическая прочность, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность.

### Введение

В настоящее время в РФЯЦ-ВНИИЭФ разрабатывается многофункциональный пакет программ ЛОГОС [1], который предназначен для решения широкого круга задач вычислительной аэрогидрогазодинамики и прочности. Функциональные компоненты комплекса ЛОГОС для решения задач механики деформируемого твердого тела построены на основе математической методике и программного пакета ЛЭГАК-ДК [2, 3], в рамках которого реализованы возможности моделирования нелинейных динамических, квазистатических и вибрационных задач прочности. Одной из основных частей данного пакета программ является модуль решения задач расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций при квазистатических термосиловых воздействиях на основе метода конечных элементов (МКЭ). Статический анализ применяется для задач, в которых действие сил инерции не оказывает существенного влияния на поведение конструкции.

В работе дается обзор основных функциональных возможностей модуля пакета программ ЛОГОС, используемого для решения задач статической прочности конструкций как в линейном приближении, так и с учетом эффектов физической и геометрической нелинейности.

Многие практически важные инженерные задачи являются нелинейными, и для их успешного решения приходится учитывать два основных типа нелинейных эффектов в постановке и дискретизации математической модели. Первый тип нелинейности — это физическая, или материальная нелинейность, обусловленная нелинейной зависимостью между тензорами деформаций и напряжений либо зависимостью материальных параметров от времени или истории нагружения [4, 5]. Учет физической нелинейности обеспечивает возможность численного моделирования таких механических процессов, как пластичность, ползучесть, усталость, вязкоупругость и т. д. Второй тип нелинейности — геометрическая нелинейность — учитывается в случае больших перемещений/вращений

при сильном деформировании систем (например, при изгибе балок или других тонкостенных конструкций), а также в случае больших перемещений при малых деформациях (задачи с гибкими телами, пружинами) [4, 6—9]. В этих случаях классический для МКЭ метод малых деформаций и использование линейных соотношений между перемещениями и деформациями могут давать неправильные результаты, поэтому для решения такого класса задач применяются специальные методы.

В работе приводится описание конечно-элементной методики, реализованной в пакете программ ЛОГОС для расчета задач статической прочности конструкций. Представлен обзор методов и алгоритмов для учета эффектов физической и геометрической нелинейности. Для демонстрации применимости и эффективности реализованных алгоритмов представлены результаты численного моделирования ряда инженерных задач, выполненного с использованием пакета программ ЛОГОС.

## **1. Основные функциональные возможности пакета программ ЛОГОС для решения задач статической прочности конструкций**

Можно выделить следующие основные особенности модуля для решения задач статической прочности в пакете программ ЛОГОС:

- библиотека поддерживаемых типов конечных элементов включает в себя набор трехмерных элементов сплошной среды первого и второго порядков аппроксимации (шестигранники, треугольные призмы, тетраэдры и пирамиды с четырехугольным основанием), а также плоские оболочечные элементы и одномерные балочные элементы;
- широкий набор реализованных граничных условий и специальная функциональность позволяют имитировать конструктивные элементы расчетных моделей: жесткие связи, заклепочные и сварные соединения, одноточечные и многоточечные ограничения и т. д.;
- набор материальных моделей включает в себя модели линейно-упругого и упругопластического материалов. Поддерживаются изотропные, ортотропные и анизотропные материальные свойства, а также учет температурных зависимостей материальных параметров;
- конечно-элементная методика обеспечивает возможность расчетов как на связных, так и на несогласованных сетках путем контакта-склейки поверхностей или прямого моделирования контактного взаимодействия;
- адаптивная схема расчета шага статической прочности обеспечивает разбиение прикладываемой нагрузки на шаги и подшаги с процедурой автоматического выбора подшага по нагрузке. Использование автоматической схемы выбора подшагов по нагружению способствует ускорению процесса сходимости численного линеаризованного решения при сильно нелинейном характере деформирования;
- для решения глобальной системы линейных алгебраических уравнений предоставлены интерфейсы с библиотеками прямых и итерационных решателей.

Реализованная функциональность обеспечивает возможность проведения имитационных расчетов широкого класса промышленных задач с использованием моделей различного уровня сложности. Это позволяет пакету программ ЛОГОС в части решения задач квазистатической прочности быть сравнимым по своим возможностям с ведущими пакетами программ инженерного анализа, такими как ANSYS [10], ABAQUS [11], MSC.NASTRAN [12]. К настоящему времени программные средства ЛЭГАК-ДК в составе многофункционального программного комплекса ЛОГОС [13] отестированы, верифицированы и переданы в эксплуатацию на ряд предприятий отечественной промышленности — ОАО "ОКБ Сухого", ОАО "КАМАЗ" и др.

## **2. Описание схемы МКЭ в форме метода перемещений**

В этом разделе приводится описание базиса конечно-элементной методики, реализованной в пакете программ ЛОГОС. Основные формулы конечно-элементной аппроксимации выводятся на примере простого и наглядного случая упругого нагружения в предположении малых деформаций,

когда соотношения между основными компонентами, определяющими НДС механической системы, полагаются линейными. В разд. 3 будет приведено обобщение конечно-элементной схемы с простого линейно-упругого случая на случай статических задач в нелинейной постановке, когда базовые соотношения между перемещениями, деформациями и напряжениями являются нелинейными.

**Базовые соотношения теории упругости.** В пакете программ ЛОГОС для решения задач статической прочности используется распространенная схема МКЭ в форме метода перемещений [4, 14]. В этом случае неизвестными являются компоненты вектора узловых перемещений  $\{U\}$  системы, находящейся в равновесном НДС под действием внешних прикладываемых нагрузок. В трехмерном случае вектор перемещений определяется как<sup>1</sup>  $\{U\}^T = \{u, v, w\}$ , где  $u, v, w$  — проекции вектора перемещений на координатные оси  $x, y, z$ .

Разные значения перемещений двух соседних точек вызывают деформации в материале и связанные с ними напряжения. В общем случае деформации и напряжения в материале конструкции задаются шестью компонентами:  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}\}$  — вектор деформаций;  $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$  — вектор напряжений.

При малых деформациях связи между компонентами НДС (перемещения, деформации, напряжения) выражаются линейными соотношениями [15].

Линейная связь между перемещениями и деформациями имеет вид  $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$ , где  $[B]$  — матричный дифференциальный оператор:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Если тело одновременно находится под воздействием внешних механических нагрузок и температурного поля, то деформации  $\varepsilon$ , возникающие в нем, выражаются в виде суммы механической  $\{\varepsilon^m\}$  и температурной  $\{\varepsilon^t\}$  составляющих:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^m\} + \{\varepsilon^t\}. \quad (1)$$

Температурные деформации для изотропного материала определяются соотношением

$$\{\varepsilon^t\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

<sup>1</sup>В этом разделе векторные величины при обозначении выделяются фигурными скобками, матричные — квадратными.

где  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения,  $\Delta T$  — изменение температуры.

Связь между компонентами деформаций и напряжений в линейно-упругом случае выражается соотношением

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon^m\}. \quad (2)$$

В случае однородной изотропной линейно-упругой среды матрица материальных констант  $[D]$  имеет вид

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламе, которые выражаются через модуль упругости первого рода  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ :  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ ;  $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ .

С учетом (1) зависимость напряжений от деформаций (2) запишется в следующем виде:

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}). \quad (3)$$

**Принцип минимума потенциальной энергии.** Для единицы объема упругого тела удельная энергия деформации представляется в виде [3, 13, 15]  $W = \frac{1}{2} \{\varepsilon^m\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon^t\}^T) \{\sigma\}$ .

Полная потенциальная энергия деформации, накопленная телом, определяется через интеграл по всему объему тела  $V$ :  $\Pi = \iiint_V W dV = \frac{1}{2} \iiint_V (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon^t\}^T) [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) dV$ . Работа внешних сил, действующих на тело объемом  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , может быть записана в виде  $A = \iiint_V \{u\}^T \{F\} dV + \iint_S \{u\}^T \{P\} dS$ , где  $\{u\}^T$ ,  $\{F\}^T$ ,  $\{P\}^T$  — векторы перемещений, объемных и поверхностных сил для элемента объема  $dV$ . Полная потенциальная энергия системы определяется как разность между потенциальной энергией деформации и работой, произведенной внешними нагрузками:

$$L = \Pi - A = \frac{1}{2} \iiint_V (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon^t\}^T) [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) dV - \iiint_V \{u\}^T \{F\} dV - \iint_S \{u\}^T \{P\} dS. \quad (4)$$

Согласно вариационному принципу Лагранжа [3, 13] полная потенциальная энергия тела, находящегося в равновесии под действием внешних объемных и поверхностных сил, достигает минимума на истинном поле перемещений, т. е. на поле перемещений, удовлетворяющем полной системе уравнений теории упругости. Этот вариационный принцип минимума потенциальной энергии системы, находящейся в равновесии, является определяющим при дальнейшем построении конечно-элементной дискретизации и формировании глобальной системы уравнений статической прочности.

**Построение конечно-элементной аппроксимации.** Основная концепция конечно-элементной аппроксимации состоит в замене непрерывной функции перемещений дискретным набором кусочно-непрерывных функций. Минимизация функционала потенциальной энергии осуществляется на совокупности этих кусочно-непрерывных функций, каждая из которых определена в своей подобласти — на конечном элементе.

Процедура конечно-элементной дискретизации сплошной среды, реализованная в пакете программ ЛОГОС, определяется следующими положениями:

- сплошная среда разделяется линиями/поверхностями на некоторое количество конечных элементов, без самопересечений заполняющих весь объем исходной системы;
- предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, расположенных на границах элементов;
- значения перемещений в узлах конечных элементов являются искомым решением дискретной модели;
- для каждого типа конечного элемента определяется система базисных функций, в которой перемещения любой точки элемента однозначно выражаются через перемещения узловых точек;
- функции перемещений однозначно определяют деформации в любой точке элемента через узловые перемещения;
- найденные деформации при заданных материальных свойствах позволяют определить напряжения внутри элемента и на его границах;
- определяется система сосредоточенных узловых сил, уравновешивающих внешние нагрузки.

*Основные соотношения для конечного элемента.* Конечный элемент определяется набором своих узловых точек, на котором задается вектор узловых перемещений элемента [3, 15]  $\{q\} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots\}$ .

Для каждого типа элемента определяется система базисных функций, или функций формы,  $N_1, N_2, \dots, N_s$ . Перемещение любой точки элемента выражается через набор узловых перемещений и множество базисных функций:  $u = \sum_{i=1}^s N_i u_i$ ;  $v = \sum_{i=1}^s N_i v_i$ ;  $w = \sum_{i=1}^s N_i w_i$ , или в матричном виде  $\{u\} = [N] \{q\}$ , где

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_s & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_s & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_s \end{bmatrix}.$$

Деформации в произвольной точке элемента также выражаются через узловые перемещения:

$$\{\varepsilon\} = [\tilde{B}] \{q\}. \quad (5)$$

Здесь  $[\tilde{B}]$  — матрица градиентов элемента:  $[\tilde{B}] = [B][N] = \left[ [\tilde{B}_1] \quad [\tilde{B}_2] \quad [\tilde{B}_3] \quad \dots \quad [\tilde{B}_s] \right]$ , где

$$[\tilde{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Из (3) и (5) следует, что напряжения в произвольной точке элемента определяются как

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) = [D] \left( [\tilde{B}] \{q\} - \{\varepsilon^t\} \right). \quad (6)$$

Исходя из (4) и (6), полную энергию  $L^e$  конечного элемента можно выразить через вектор узловых перемещений элемента:

$$\begin{aligned} L^e = & \frac{1}{2} \iiint_V \left( ([\tilde{B}] \{q\})^T - \{\varepsilon^t\}^T \right) [D] \left( [\tilde{B}] \{q\} - \{\varepsilon^t\} \right) dV - \\ & - \iiint_V ([N] \{q\})^T \{F\} dV - \iint_S ([N] \{q\})^T \{P\} dS. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно принципу экстремума для вариационного принципа Лагранжа в точке минимума полной энергии производная по перемещениям равна нулю:  $\frac{\partial L^e}{\partial \{q\}} = 0$ .

С учетом общих формул матричного дифференцирования, справедливых для квадратной матрицы  $[M]$  и вектора  $\{\Phi\}$  одинакового размера [15]:

$$\frac{\partial ([M] \{\Phi\})}{\partial \{\Phi\}} = \frac{\partial (\{\Phi\}^T [M]^T)}{\partial \{\Phi\}} = [M]^T; \quad \frac{\partial}{\partial \{\Phi\}} \left( \{\Phi\}^T [M] \{\Phi\} \right) = 2 [M] \{\Phi\},$$

условие минимума потенциальной энергии конечного элемента сводится к уравнению

$$\iiint_V [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] \{q\} - \iiint_V [N]^T \{F\} dV - \iint_S [N]^T \{P\} dS - \iiint_V [\tilde{B}]^T [D] \{\varepsilon^t\} = 0,$$

или в упрощенном виде

$$[k^e] \{q\} = \{f^e\}, \quad (8)$$

где  $[k^e]$  — матрица жесткости элемента,  $\{f^e\}$  — вектор узловых нагрузки элемента:

$$[k^e] = \iiint_V [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] dV; \quad \{f^e\} = \iiint_V [N]^T \{F\} dV + \iint_S [N]^T \{P\} dS + \iiint_V [\tilde{B}]^T [D] \{\varepsilon^t\} dV.$$

Первое слагаемое в формуле для расчета вектора узловых нагрузки соответствует объемной нагрузке, второе — поверхностной нагрузке, третье — нагрузке, обусловленной тепловой деформацией. Помимо этого, в постановке задачи могут присутствовать другие источники деформаций, такие как начальные деформации или напряжения. Такого рода дополнительные внешние нагрузки преобразуются во вклады в правую часть аналогично вкладам от температурной нагрузки.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (8) однозначно определяет перемещения узловых точек элемента, находящегося под воздействием внешних нагрузок.

*Обобщение на всю область.* Для всего ансамбля конечных элементов, заполняющих всю исходную область, используется тот же подход [4, 14, 16], что и для отдельного элемента.

Можно считать, что выражение перемещения произвольной точки через узловые перемещения относится ко всей конструкции, т. е.  $\{f\} = [\tilde{N}] \{U\}$ . Здесь  $\{U\}$  — глобальный вектор узловых перемещений, определяемый полным набором узловых точек всего ансамбля конечных элементов, а  $[\tilde{N}]$  — глобальная матрица базисных функций, такая что  $\tilde{N}_i = N_i^e$ , если рассматриваемая точка  $i$  принадлежит элементу  $e$ , и  $\tilde{N}_i = 0$ , если точка  $i$  не принадлежит элементу.

Для удобства обобщения вводятся в рассмотрение так называемые элементные матрицы кинематических связей  $[a^e]$ , состоящие из нулей и единиц и определяющие взаимосвязь между локальной нумерацией узловых точек элемента и их индексами в глобальном векторе узловых перемещений:  $\{q\} = [a^e] \{U\}$ .

Исходя из конечно-элементного разбиения на непересекающиеся подобласти объемные и поверхностные интегралы, входящие в выражения потенциальной энергии деформации и работы внешних сил, равны сумме интегралов по конечным элементам. Принцип минимума потенциальной энергии применительно ко всей системе конечных элементов выражается в виде  $\frac{\partial}{\partial \{U\}} \sum_e L_e = 0$ .

Суммируя условия минимума потенциальной энергии (8) для всех элементов и переходя с помощью матриц  $[a^e]$  от локальной элементной индексации к глобальной индексации в векторе узловых перемещений, условие минимума потенциальной энергии для всей системы конечных элементов можно записать в виде  $\left( \sum_e [a^e]^T [k]^e [a^e] \right) \{U\} = \sum_e [a^e]^T \{f^e\}$ .

С введением понятий глобальной матрицы жесткости  $[K] = \sum_e [a^e]^T [k]^e [a^e]$  и глобального вектора внешних узловых сил  $\{F\} = \sum_e [a^e]^T \{f^e\}$  матричная система уравнений равновесия для всего набора конечных элементов примет вид системы линейных уравнений

$$[K] \{U\} = \{F\}. \quad (9)$$

Итак, процедура минимизации полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов для задач линейной теории упругости сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного глобального вектора узловых перемещений.

Однако решение системы уравнений (9) и нахождение поля узловых перемещений еще не есть окончательное решение линейной задачи теории упругости. Далее по известному полю перемещений требуется определить поля деформаций и напряжений в любом конечном элементе расчетной системы. Это осуществляется следующей последовательностью вычислений:

$$\{u^e\} = [N] [a^e] \{U\}; \quad \{\varepsilon^e\} = [B] \{u^e\}; \quad \{\sigma^e\} = [D] (\{\varepsilon^e\} - \{\varepsilon^t\}). \quad (10)$$

### 3. Учет нелинейных эффектов в конечно-элементной дискретизации

Линейно-упругий случай, рассмотренный выше при описании схемы конечно-элементной дискретизации, был взят для простоты изложения основных аспектов конечно-элементного подхода в форме метода перемещений и упрощения записи матрично-векторных соотношений. В общем случае нелинейной статической прочности связи между компонентами, определяющими НДС, не выражаются линейными соотношениями. Тем не менее основные идеи и процедуры конечно-элементной дискретизации, описанные в разд. 2, остаются прежними.

В нелинейном случае конечно-элементная аппроксимация задачи статической прочности сводится к глобальной системе нелинейных алгебраических уравнений [4]

$$K(U)U = R(U), \quad (11)$$

сформированной для компонент глобального вектора узловых перемещений  $U$ , где  $K(U)$  — глобальная матрица жесткости — является нелинейным матричным оператором, а  $R(U)$  — нелинейный глобальный вектор правой части<sup>2</sup>. Уравнение (11) представляет собой классическую общую форму системы дискретных уравнений МКЭ.

**Учет физической нелинейности.** При решении физически нелинейных задач матрица материальных констант  $D$  зависит от достигнутого уровня деформации [3, 4]:  $D = D(\varepsilon) = D(U)$ . Базовое соотношение между тензорами напряжений и деформаций является нелинейным и не описывается уравнением (3), а формулируется в общем виде:  $F(\sigma, \varepsilon) = 0$ . Глобальная система конечно-элементных уравнений в этом случае также является нелинейной и записывается в виде (11). Эту

<sup>2</sup>Для упрощения формульного представления в этом разделе векторные и матричные величины не выделяются фигурными и квадратными скобками.

систему можно решать одним из итерационных методов, на каждой итерации которого производится линейаризация базовой системы и решается линейная задача. При этом материальные константы, определяющие коэффициенты матрицы линейной системы, на каждой итерации выбираются так, чтобы удовлетворялись базовые уравнения между тензорами деформаций и напряжений.

В пакете программ ЛОГОС применяется классический метод итераций Ньютона—Рафсона [4, 17], основанный на использовании переменной касательной жесткости. Итерационный процесс Ньютона—Рафсона достаточно просто реализуем: выбирается начальное приближение  $U_0 = 0$ , вычисляется  $K(U_0) = K_0$  и находится  $U_1 = K_0^{-1}R$ . Процесс повторяется в соответствии с формулой  $U_n = K_{n-1}^{-1}R$  до тех пор, пока решение не перестает изменяться в пределах заданной точности. В последней формуле матрица  $K_n = K(U_n) = K(\varepsilon_n, \sigma_n)$  — касательная матрица жесткости системы, определенная для перемещений и деформаций, соответствующих приближенному решению  $U_n$  с предыдущей итерации.

**Особенности расчета шага по нагрузке для обеспечения сходимости итерационного процесса Ньютона—Рафсона.** Во многих случаях, когда сильны эффекты нелинейности, не удается установить связывающие соотношения типа  $F(\sigma, \varepsilon) = 0$  для полных деформаций и напряжений, но можно их вывести для приращений этих величин. Процедура линейаризации базовых соотношений, записанных для приращений, в случае приложения полной нагрузки может вносить определенную вычислительную погрешность. При решении практических вычислительных задач этот эффект может выражаться в том, что итерационный процесс Ньютона—Рафсона для линейаризованной дискретной конечно-элементной модели будет расходиться или сходиться очень медленно. Другой причиной расходимости итерационного процесса может быть немонотонность функции, описывающей нелинейное уравнение. В этом случае при удаленности начального приближения от точного решения и наличии локальных максимумов между точным решением и начальным приближением сходимость итерационного процесса не может быть достигнута.

Для преодоления возможных проблем со сходимостью итерационного процесса Ньютона—Рафсона во многих вычислительных пакетах успешно применяется так называемый метод приращений по нагрузке [4], когда ищется решение не для полной нагрузки, а для последовательного набора мелких подшагов, или инкрементов нагрузки. В пакете программ ЛОГОС реализована адаптивная автоматическая схема приращений по нагрузке с автоматическим дроблением подшага в случае расходимости итерационного процесса Ньютона—Рафсона и с увеличением подшага при хорошей скорости сходимости нескольких последовательных подшагов.

Следует отметить, что, на первый взгляд, решение с использованием набора подшагов по нагрузке кажется дорогостоящим по сравнению с приложением всей нагрузки сразу. Однако на практике именно использование мелких подшагов зачастую оказывается более выгодным, поскольку при малых приращениях нагрузки начальное приближение оказывается близким к точному решению и итерационный процесс Ньютона—Рафсона сходится за малое число итераций.

**Реализация материальных моделей с учетом физической нелинейности в пакете программ ЛОГОС.** Одним из характерных эффектов, связанных с физической нелинейностью, является процесс пластического деформирования материалов. Этот вид отклонения от линейно-упругого поведения характеризуется не зависящим от времени необратимым деформированием, начинающимся по достижении некоторого значения напряжения, известного как предел текучести. Нелинейные соотношения между деформациями и напряжениями для материалов с эффектом пластичности определяются законом/диаграммой деформирования  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , критерием текучести  $\Phi(\sigma, H) = 0$  (где  $H$  — параметр упрочнения), а также законом пластического течения (flow rule), связывающим приращения пластических деформаций с поверхностью текучести Мизеса (вектор приращений пластических деформаций ортогонален поверхности текучести в пространстве напряжений) [4].

В пакете программ ЛОГОС, помимо моделей линейно-упругого изотропного, ортотропного и анизотропного материалов, реализован набор материальных моделей пластичности с нелинейной зависимостью между тензорами напряжений и деформаций. Это модель пластичности с билинейной диаграммой деформирования, поддерживающая три вида деформационного упрочнения — изотропное, кинематическое, смешанное, а также модель упругопластического материала с кусочно-линейной



аппроксимацией диаграммы деформирования. Вся библиотека материальных моделей предполагает возможную зависимость материальных параметров от температуры.

Организация базовых программ расчета материальных соотношений и программ автоматического разбиения нагрузки на подшаги позволяет легко расширять и дополнять набор материальных моделей новыми моделями, учитывающими зависимость деформации от предыстории нагружения или от времени (в частности, вязкоупругих материалов или материалов с ползучестью/усталостью).

**Учет геометрической нелинейности.** Предположения малых деформаций и неизменяемой формы элементов в процессе нагружения, в которых строятся простейшие линейные конечно-элементные модели, на практике часто приводят к неправильным результатам для задач с большими деформациями и вращениями систем, например, при изгибе пластин, а также в расчетах с большими перемещениями при малых деформациях, имеющими место, например, при изгибе пружин. Для точного определения НДС подобных конструкций необходим учет геометрической нелинейности, когда растущие напряжения влияют на дальнейшее деформирование системы или внешние нагрузки зависят от степени деформации. При учете геометрической нелинейности можно использовать подходы, аналогичные тем, что применяются в расчетах с физической нелинейностью, только с соответствующими законами связи напряжений с деформациями.

Одним из широко используемых подходов к решению задач с учетом геометрической нелинейности является метод конечных деформаций [6–8], в различных вариантах применяемый во многих известных программных продуктах прочностного анализа [11, 17–19]. Данный подход реализован в пакете программ ЛОГОС для моделирования задач с большими деформациями, когда степень деформации и узловые перемещения влияют на процесс дальнейшего деформирования системы. Детально описать вычислительный базис метода конечных деформаций в рамках статьи не представляется возможным, поэтому кратко опишем основную идею метода.

Построение вычислительной модели метода конечных деформаций ведется в базисе, соответствующем начальному недеформированному состоянию, относительно которого вычисляются градиенты перемещений и деформации на текущий момент, а также строятся матрица вращения от начального состояния к текущему деформированному состоянию и матрица вращения от деформированного состояния к начальному.

Отметим, что при расчетах геометрически нелинейных задач в пакете программ ЛОГОС в качестве тензорной меры деформации используется логарифмическая, или мера деформаций Генки [20–22]. В отличие от другой используемой в нелинейной теории упругости меры деформации Коши–Грина [20–23] логарифмическая мера деформаций обладает свойством аддитивности к вращениям деформаций на рассматриваемом интервале нагружения. Иными словами, она является инвариантной к любому разбиению интервала нагружения на подшаги, вследствие чего широко используется в прикладном программном обеспечении для решения геометрически нелинейных задач с большими деформациями [10, 17–20].

В процедуру определения компонентов НДС вносятся следующие модификации, обусловленные учетом геометрической нелинейности:

- соответствующий текущим значениям перемещений тензор деформаций умножением на соответствующую матрицу вращения преобразуется к форме, избавленной от вращательных компонент;
- избавленный от вращательных компонент тензор деформаций используется в стандартной процедуре нахождения напряжений и определяет так называемое истинное напряжение Коши, т. е. напряжение, избавленное от вращательных компонент;
- истинное напряжение Коши с помощью матрицы вращения преобразуется к полному напряжению, соответствующему текущей конфигурации;
- полное напряжение учитывается при расчете вектора узловых внутренних сил, определяющих невязку итерационного процесса Ньютона–Рафсона.

Благодаря матрично-векторным преобразованиям величин от деформированного состояния к начальному и наоборот перечисленные выше модификации процедуры расчета компонентов НДС сводятся к формированию дополнительного вклада для матрицы жесткости.

Таким образом, для решения задач с учетом геометрически нелинейных эффектов в пакете программ ЛОГОС используется тот же итерационный метод Ньютона—Рафсона, что и для расчета физически нелинейных задач. Единственное отличие заключается в процедуре построения касательной матрицы жесткости на каждой итерации. Дополнительные слагаемые, характеризующие степень деформирования конструкции за счет изгибных и вращательных деформаций, дают вклад в глобальную матрицу жесткости в виде так называемой матрицы больших деформаций  $K_L(U, \varepsilon)$ . Глобальную матрицу жесткости конструкции при этом можно записать в виде  $K = K_0 + K_L$ , где  $K_0$  — матрица малых деформаций [3].

#### 4. Результаты расчетов

**Расчет НДС элемента тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя.** Целью данной задачи являлось определение параметров НДС, возникающего в элементе тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя под действием нагрузок, соответствующих одному из экспериментальных режимов работы. Внешний вид рассчитываемой конструкции приведен на рис. 1.

Пространственная дискретизация объекта исследования выполнена на основе элементов сплошной среды первого порядка. Деформирование наружной стенки, изготовленной из сплава ХН43БМТЮ-ВД, предполагалось упругим. Для моделирования упругопластического характера поведения внутренней стенки, изготовленной из медного сплава БрХ08-Ш, использовалась модель материала с кусочно-линейной аппроксимацией диаграммы деформирования. В качестве граничных условий при расчете приняты:

- условие циклической симметрии по местам разреза охлаждающего тракта;
- запрещение перемещения в окружном направлении по линии, проходящей через плоскость симметрии модели;
- давление со стороны охладителя, действующее на боковые поверхности охлаждающего тракта;
- давление газа, приложенное к внутренней поверхности камеры;
- температурное поле, которое было определено при решении тепловой задачи и посредством процедуры интерполяции загружено в данный расчет.

Решение задачи проведено для максимального рабочего режима с учетом температурных деформаций. На рис. 2 (см. также цветную вставку) приведена картина распределения накопленной пластической деформации, полученная при решении данной задачи в пакете программ ЛОГОС. В табл. 1 представлены рассчитанные по ЛОГОС значения характерных параметров деформирования конструкции.

Полученные результаты позволяют сделать вывод об адекватности моделирования процесса упругопластического деформирования в данном расчете.

**Расчетная оценка прочности несущей системы грузового автомобиля.** На рис. 3 показана модель исследуемого в Автомобильном институте (АМИ) НГТУ комплектного грузового автомобиля, которая включает в себя раму, кабину, платформу, переднюю и заднюю подвески с балками мостов. Постановка задачи и эталонные результаты, полученные по одному из ведущих коммерческих программных продуктов, предоставлены специалистами АМИ НГТУ.

Пространственная дискретизация объекта выполнена с использованием различных типов конечных элементов: объемных, оболочечных, балочных и стержневых. Построенная детализированная конечно-элементная модель включает в себя 230 подобластей, содержит  $\sim 365\,000$  узлов и  $\sim 452\,000$  элементов.

На рис. 4 показана схема нагружения кузова, приводящая к кручению передней части транспортного средства. Данный вид нагружения имитирует работу несущей системы автомобиля при действии скручивающих нагрузок, возникающих в условиях эксплуатации грузового автомобиля при движении по кособору и переезде несимметричных неровностей. Действующая на модель нагрузка составляла 1 000 Н.

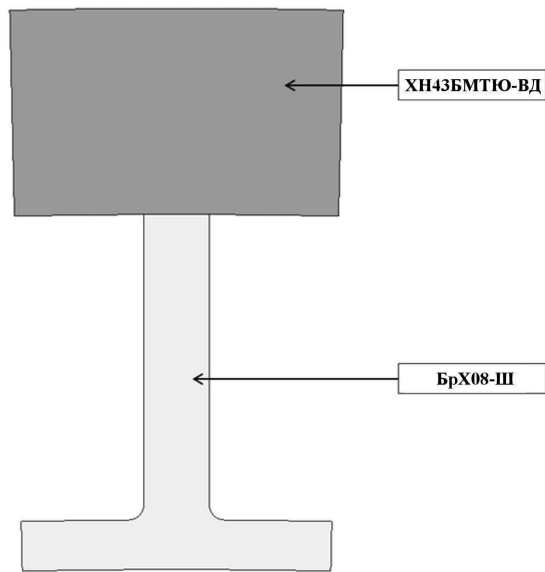


Рис. 1. Внешний вид элемента тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя

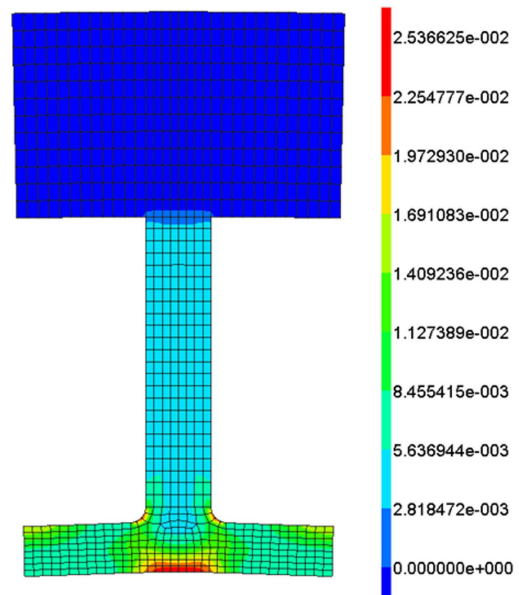


Рис. 2. Поле накопленной пластической деформации (отн. ед.) в элементе тракта охлаждения

Таблица 1

Результаты численного решения задачи расчета НДС элемента тракта охлаждения камеры жидкостного ракетного двигателя

Величина	ЛОГОС
Максимальное результирующее перемещение, мм	0,367
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу, МПа	54,63
Максимальная накопленная пластическая деформация, %	2,54



Рис. 3. Подробная модель комплектного грузового автомобиля

На рис. 5 (см. также цветную вкладку) представлено полученное по ЛОГОС поле результирующего перемещения, возникающее в конструкции под действием указанных внешних воздействий. В табл. 2 приводится сравнение некоторых важных характеристик процесса деформирования данной конструкции, полученных по ЛОГОС и по одному из ведущих программных комплексов решения задач рассматриваемого класса, результаты которого принимаются в качестве эталонного.

Сравнительный анализ основных параметров НДС конструкции показал очень хорошее качественное и количественное согласие результатов, полученных по ЛОГОС, с эталонным решением.

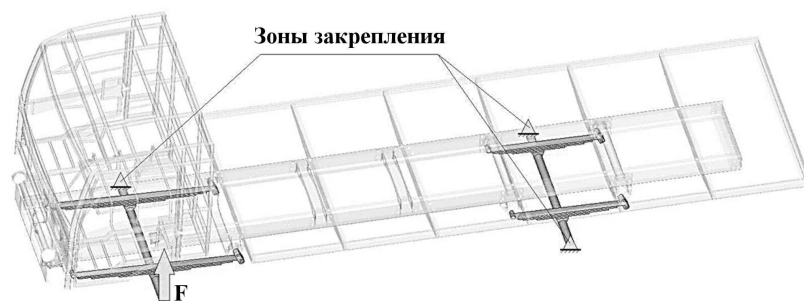


Рис. 4. Схема нагружения модели грузового автомобиля

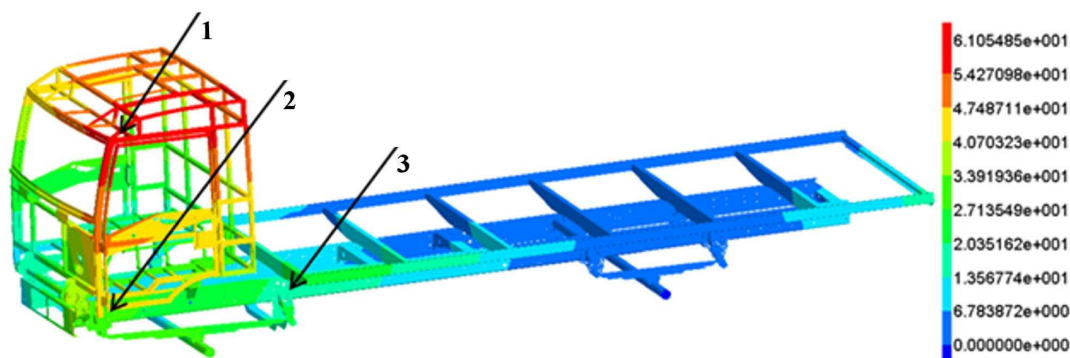


Рис. 5. Распределение результирующего перемещения (мм) в модели автомобиля (1–3 — контрольные узлы)

Таблица 2

Результаты численного решения задачи по оценке прочности несущей системы грузового автомобиля

Величина	ЛОГОС	Эталонное решение	Относительное отклонение, %
Результирующее перемещение в контрольном узле 1, мм	60,81	61,57	1,25
Результирующее перемещение в контрольном узле 2, мм	43,13	43,51	0,88
Результирующее перемещение в контрольном узле 3, мм	26,63	26,93	1,13
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу, МПа	166,4	167,4	0,6

**Расчет деформирования лопатки вентилятора авиационного двигателя с диском.** В данной задаче рассчитывались характеристики НДС, возникающего при совместном деформировании вентиляторной лопатки с диском авиационного двигателя под действием центробежной нагрузки. Исследовался один из промежуточных вариантов геометрии лопатки и диска двигателя. Общий вид рассчитываемой конструкции приведен на рис. 6.

Пространственная дискретизация объекта исследования выполнена на основе 8-узловых элементов сплошной среды. Общая размерность конечно-элементной модели составляет ~ 30 000 элемен-

тов,  $\sim 40\,000$  узлов. Кинематические граничные условия схематично изображены на рис. 7. Задавалось ограничение перемещений на торцах диска, а также условие склейки поверхностей в местах соединения лопатки с диском.

Ко всей модели прикладывалась центробежная нагрузка, вызванная угловой скоростью вращения, соответствующей одному из исследуемых режимов работы двигателя. Материал конструкции рассматривался как однородный, изотропный, упругопластический, с кусочно-линейной аппроксимацией диаграммы деформирования. Расчет проводился с учетом геометрической нелинейности.

На рис. 8, 9 (см. также цветную вкладку) приведены картины распределения полей результирующих перемещений и напряжений по Мизесу, полученные при решении данной задачи в пакете программ ЛОГОС. В табл. 3 представлены рассчитанные по ЛОГОС значения характерных параметров деформирования конструкции.

Полученные результаты свидетельствуют об адекватных распределениях перемещений, напряжений и остаточной пластической деформации в расчетной конструкции.

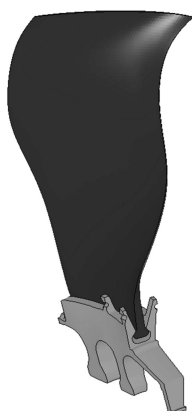


Рис. 6. Внешний вид лопатки с диском авиационного двигателя

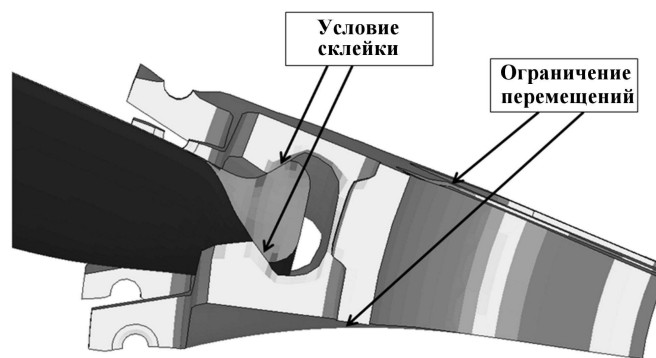


Рис. 7. Кинематические граничные условия в задаче с лопаткой авиационного двигателя

Таблица 3

Результаты численного решения задачи о деформировании лопатки и диска авиационного двигателя

Величина	ЛОГОС
Максимальное результирующее перемещение, мм	15,487
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу, МПа	75,524
Максимальная накопленная пластическая деформация, %	0,09

### Заключение

В работе приведено описание конечно-элементной схемы в форме метода перемещений, реализованной в пакете программ ЛОГОС для решения задач статической прочности конструкций. Представлены функциональные возможности данного программного продукта, предназначенные для учета эффектов физической и геометрической нелинейности.

Применимость и эффективность приведенных подходов продемонстрированы на примере численного решения ряда инженерных задач. Имеется хорошее согласие результатов расчетов как задач, рассмотренных авторами, так и широкого набора задач, посчитанных на российских предприятиях, с эталонными решениями, полученными по ведущим коммерческим программным продуктам

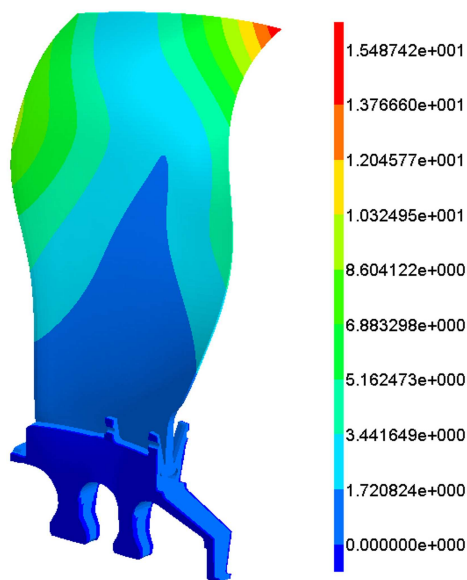


Рис. 8. Поле результирующего перемещения (мм) в задаче с лопаткой авиационного двигателя

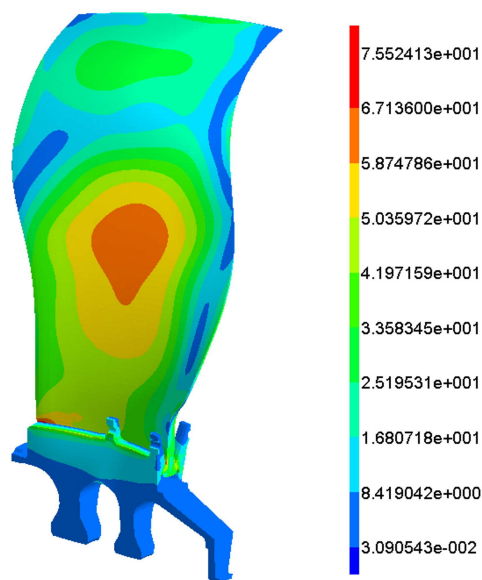


Рис. 9. Распределение напряжений по Мизесу (МПа) в задаче с лопаткой авиационного двигателя

инженерного анализа. Это свидетельствует о способности пакета программ ЛОГОС с достаточной степенью точности описывать процессы статического деформирования конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности.

### Список литературы

1. Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф. и др. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач теплопереноса и прочности // Сб. тез. докл. Санкт-Петербургского науч. форума "Наука и общество". С.-Пб. Изд-во Политехнического ун-та, 2012. С. 102.
2. Корсакова Е. И., Дьянов Д. Ю., Симонов Г. П. и др. Результаты верификации моделей упругопластического деформирования и разрушения, реализованных в пакете программ ЛЭГАК-ДК // Тр. XII межд. семинара "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 163—173.
3. Пакет программ ЛЭГАК-ДК, версия 4.0. Сертификат соответствия № РОСС RU.МЕ20.Н02378; № 1086633, 2012. www.gost.ru.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
5. Ишлинский А. Ю., Ивлеев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003.
6. Key S. W., Krieg R. D. On the numerical implementation of inelastic time dependent and time independent, finite strain constitutive equations in structural mechanics // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 1982. Vol. 33. P. 439—452.
7. Flanagan D. P., Taylor L. M. An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations // Ibid. 1987. Vol. 62. P. 305—320.
8. Hughes T. J., Winget J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis // Int. J. for Num. Meth. in Eng. 1980. Vol. 15. P. 1862—1867.
9. Simo J. C., Hughes T. J. R. Elastoplasticity and Viscoplasticity: Computational Aspects. Stanford University, 1988.

10. ANSYS. [www.ansys.com](http://www.ansys.com).
11. ABAQUS. [www.simulia.com](http://www.simulia.com).
12. MSC.NASTRAN. [www.mscsoftware.com](http://www.mscsoftware.com).
13. Речкин В. Н., Спиридонов В. Ф., Цибереv К. В. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения квазистатических задач прочности и модального анализа // Тр. XIII межд. семинара "Супер-вычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2011. С. 493—502.
14. Шабров Н. Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. Л.: Машиностроение, 1983.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
16. Сегерлинд Л.. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
17. Gullerud A. S., Korpenhoefer K. C., Roy A., Dodds R. H., Jr. WARP3D: 3-D Dynamic Nonlinear Fracture Analysis of Solids Using Parallel Computers and Workstations. University of Illinois, 2004.
18. Hallquist J. O. NIKE 3-D — A Vectorized, Implicit, Finite Deformation, Finite-Element Code for Analyzing the Static and Dynamic Response of 3-D Solids. Lawrence Livermore Laboratory Report UCID—18822, 1984.
19. Taylor L. M., Flanagan D. P. PRONTO 3D, A Three-Dimensional Transient Solid Dynamics Program. Sandia National Laboratories Report SAND87-1912, 1989.
20. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986.
21. Bonet J., Wood R. D. Nonlinear Continuum Mechanics For Finite Element Analysis. Cambridge University Press, 1997.
22. Kojic M., Bathe K.-J. Inelastic Analysis of Solids and Structures. Springer-Verlag, 2005.
23. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.

Статья поступила в редакцию 26.12.13.

---