

УДК 519.6

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СЧЕТНОЙ СЕТКИ В МЕТОДИКЕ ТИМ-2D

А. И. Панов, А. В. Шурыгин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводится описание алгоритмов, по которым осуществляются различные преобразования неструктурированной многоугольной сетки в методике ТИМ-2D и которые используются при подготовке начальных данных для этой методики. На примерах продемонстрировано выполнение преобразований как по отдельности, так и в композиции. Даны практические рекомендации по использованию тех или иных преобразований в зависимости от типа конструкции и особенностей решения задачи.

*Ключевые слова:* методика ТИМ-2D, неструктурированная сетка, геометрические преобразования, расчет начальных данных.

### Введение

Методика ТИМ-2D [1] предназначена для решения задач механики сплошной среды в многообластной постановке на неструктурированных лагранжевых сетках. При этом важным этапом является построение начальной сетки. Для придания рассчитываемой сетке необходимых свойств в алгоритмах расчета начальных данных методики ТИМ-2D предусмотрена возможность использования различных преобразований.

Преобразования могут быть структурными и геометрическими. К структурным преобразованиям относятся операции, изменяющие топологию сетки, например объединение ячеек, удаление узлов и т. д. К геометрическим преобразованиям относятся операции, изменяющие положение узлов сетки в пространстве, но не изменяющие структуру сетки: перемещение, сдвиг, поворот сетки вокруг произвольной оси, сжатие ячеек и т. д. В данной статье речь пойдет именно о них.

Геометрические преобразования в методике ТИМ-2D можно использовать двумя способами. Первый способ — когда прямое преобразование действует на границу области, а обратное — на координаты узлов счетной сетки. Второй способ — когда прямое преобразование сразу действует на всю сетку, а обратное преобразование не используется.

### Построение начальной сетки в методике ТИМ-2D

Подробное описание построения начальной сетки для методики ТИМ-2D приведено в работе [2]. Здесь укажем лишь основные этапы данного построения.

Расчет начальной сетки производится отдельно для каждого материала общей конструкции, выделяемого в счетную область. Границы счетных областей определяются совокупностью прямых, окружностей и эллипсов, заданных аналитически.

Сначала выполняется дискретизация границы области, в результате чего она представляется в виде ломаной линии, т. е. совокупности последовательных отрезков. Далее, в зависимости от геометрии исходной области, к границе может применяться композиция прямых преобразований, после чего она меняет форму. Область с новой границей вписывается в прямоугольник.

В полученном прямоугольнике строится сетка из правильных шестиугольников. Для области, имеющей прямоугольную форму, вычисление координат узлов правильных шестиугольников не составляет труда.

Далее из имеющегося сеточного покрытия путем *разрезания* ячеек границей области строится вписанная в границу области сетка. При этом в соответствии с определенным набором критериев (например, если центр ячейки оказался за границей) мелкие граничные ячейки удаляются путем объединения с более крупными ячейками из внутреннего слоя.

Затем к полученной сетке применяются обратные преобразования. Они необходимы для перевода сетки в исходную систему координат; другими словами, область с построенной в ней сеткой принимает первоначальную форму.

Такой способ построения начальной сетки требует минимального количества вычислительных операций и является удобным и эффективным, поэтому широко используется в методике ТИМ-2D.

### Основные преобразования при построении начальной сетки для методики ТИМ-2D

Для придания рассчитываемой сетке необходимых свойств в алгоритмах расчета начальных данных методики ТИМ-2D предусмотрена возможность использования композиции элементарных преобразований:

$$C = C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_n.$$

Все алгоритмы, реализующие преобразования начальной сетки, собраны в специальную библиотеку преобразований методики ТИМ-2D. Каждое преобразование имеет свой порядковый номер и свои наборы скалярных и векторных параметров (координаты точек, коэффициенты сжатия или растяжения, угол поворота и т. д.).

Библиотека преобразований счетной сетки методики ТИМ-2D подключена к единому пакету расчета двумерных сеток и начальных данных 2D-РНД [3]. Подготовка начальных данных для методики ТИМ-2D осуществляется с помощью редакторов геометрий 2D-VisRed [4] и SolidEditor [5].

**Конформные преобразования.** Конформные отображения (преобразования) обладают свойством сохранения углов и постоянством растяжений. По определению, если функция  $\omega = f(z)$  является однозначной и аналитической в окрестности некоторой точки  $z_0$  и производная  $f'(z_0) \neq 0$ , то отображение, осуществляемое этой функцией, в точке  $z_0$  является конформным. То есть угол между двумя любыми гладкими кривыми, пересекающимися в точке  $z_0$ , равен по абсолютной величине и направлению углу между их образами на плоскости  $\omega$  в точке  $\omega_0 = f(z_0)$ , а бесконечно малые линейные элементы, выходящие из точки  $z_0$ , преобразуются подобным образом [6].

Благодаря этим свойствам сохраняется выпуклость ячеек, поэтому конформные преобразования широко используются при построении начальной сетки. Далее будут рассмотрены некоторые функции, осуществляющие конформное отображение.

Отображение  $\omega = Az + B$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные комплексные числа, соответствует вращению на угол  $\arg A$ , растяжению в  $|A|$  раз и параллельному сдвигу на вектор  $B$ . Это есть самое общее конформное отображение, которое сохраняет подобие геометрических фигур. Данное отображение осуществляется преобразованием, имеющим четыре скалярных параметра, — это действительные и мнимые части комплексных чисел  $A$  и  $B$ . Обратное преобразование координат области выполняет функция  $z = \frac{1}{A}\omega - \frac{B}{A}$ .

Отображение  $\omega = 1/z$  представляет геометрически инверсию точки  $z$  относительно единичной окружности с центром в начале координат с последующим симметричным отображением относительно действительной оси. Пример такого отображения показан на рис. 1.

Для построения симметричной сетки в равнотолщинном полукольце применяется прямое конформное преобразование вида  $\omega = \ln \sqrt{u^2 + v^2} + i \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$ , или  $\omega = \ln(r) + i\alpha$  (рис. 2). Обратное преобразование записывается в виде  $\omega = e^z$ .

Построение сетки в полукольце с использованием конформного преобразования выполняется следующим образом (геометрия сетки, построенной без использования преобразований, показана на

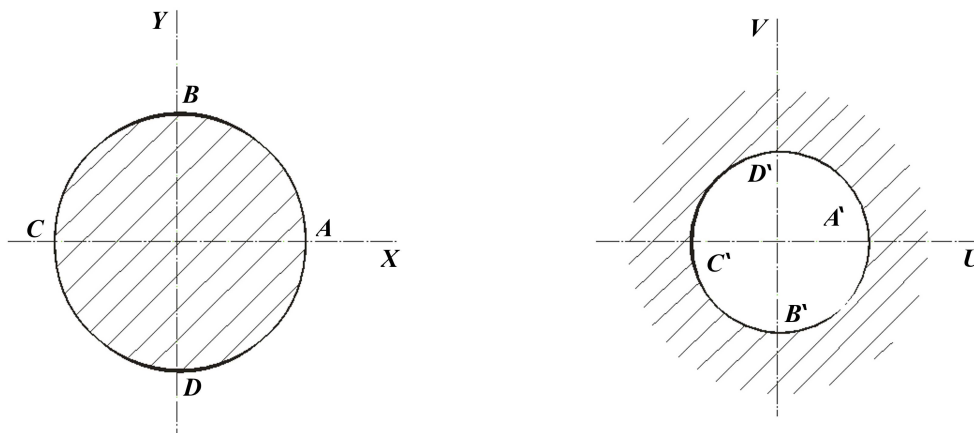


Рис. 1. Пример конформного преобразования  $\omega = 1/z$

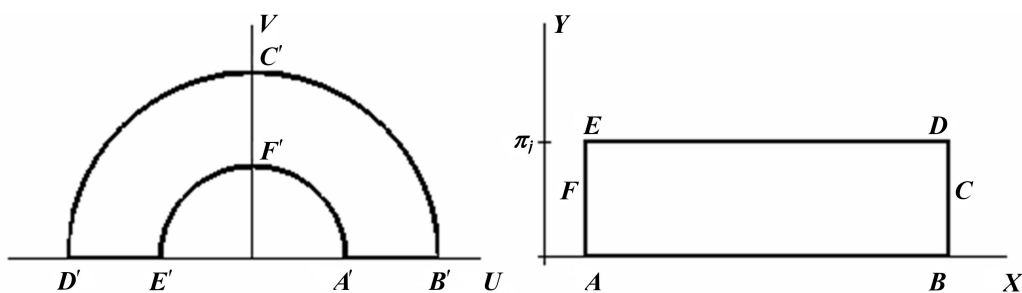


Рис. 2. Конформное преобразование  $\omega = \ln(r) + i\alpha$

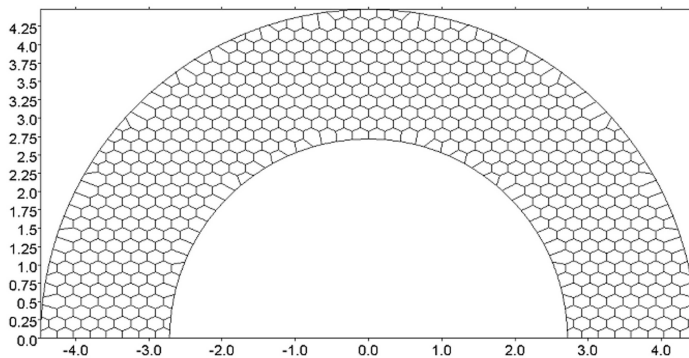


Рис. 3. Сетка, построенная в полукольце без использования преобразований

рис. 3). Сначала исходная геометрия с помощью прямого преобразования переводится в прямоугольник (рис. 4, а). В этом прямоугольнике строится сетка (рис. 4, б). Затем при помощи обратного преобразования сетка переводится в исходную геометрию (рис. 4, в).

Рассмотрим еще один пример использования конформных преобразований. На рис. 5, а показана геометрия сетки, построенной без использования преобразований. Для построения биполярной сетки воспользуемся функцией  $\omega = \ln \frac{a+z}{a-z}$ , где  $a = 0,5$ . Эту функцию можно представить в виде композиции простых конформных преобразований следующим образом. Сначала эту функцию представим в виде  $\ln \left( \frac{a+z}{a-z} \right) = \ln \left( \frac{2a}{a-z} - 1 \right)$ . Далее выполняется последовательность преобразований:

- 1)  $\omega_1 = a - z$  — осуществляется функцией  $\omega = Az + B$ ;

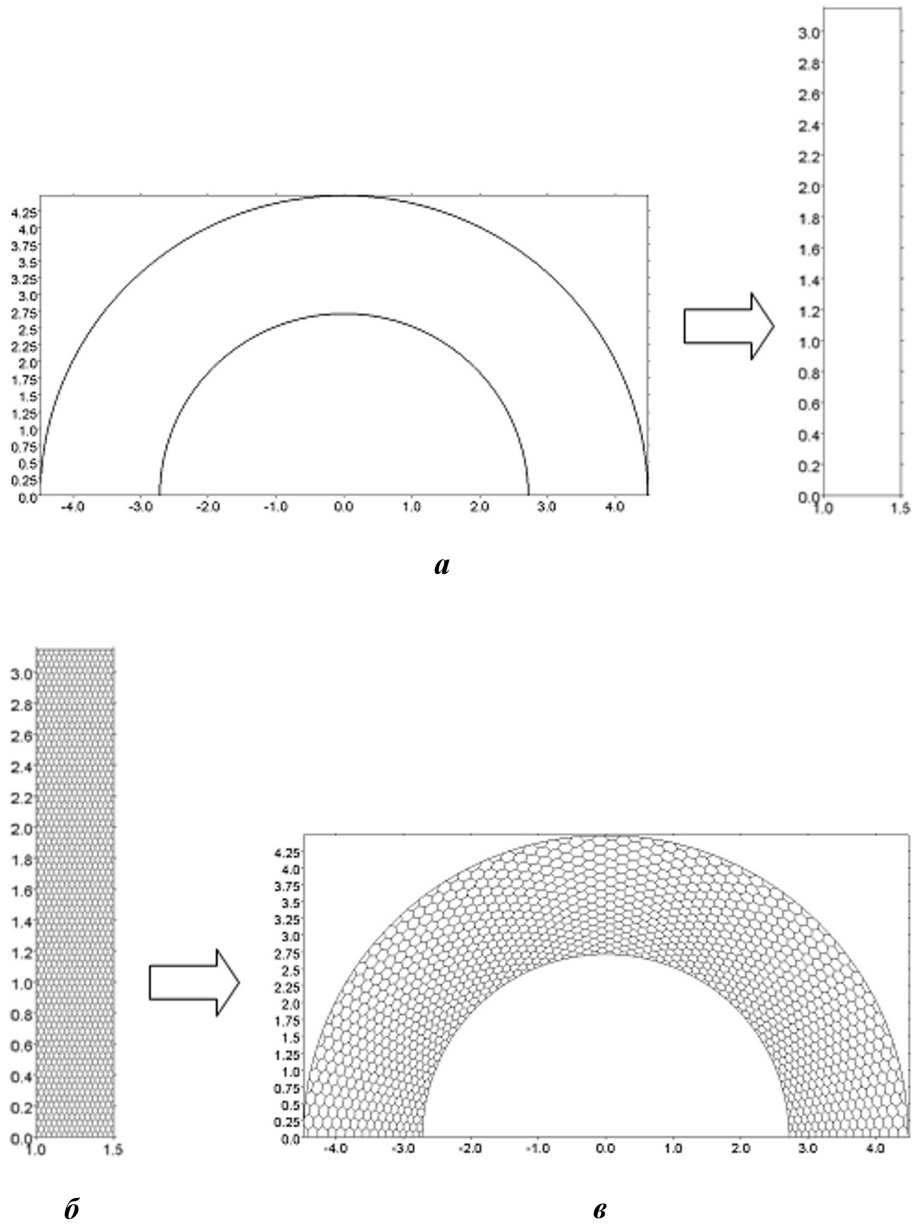
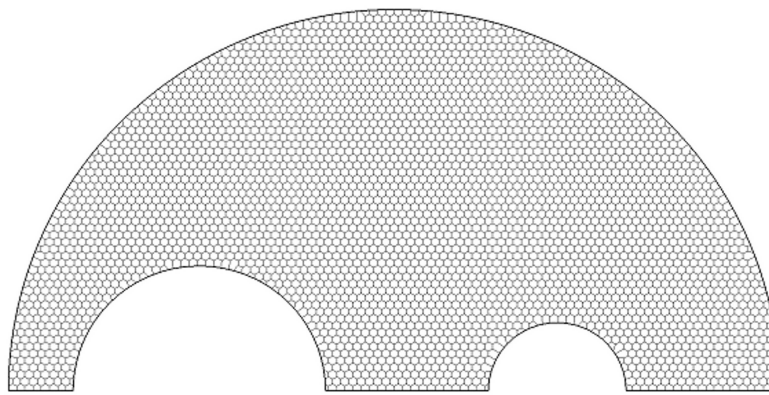


Рис. 4. Процесс построения сетки в полукольце при помощи конформного преобразования: *а* — прямое преобразование; *б* — построение сетки; *в* — обратное преобразование

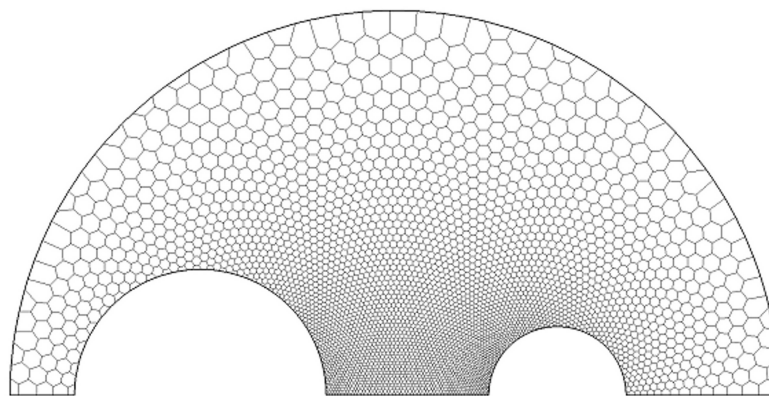
- 2)  $\omega_2 = 1/\omega_1$  — осуществляется функцией:  $\omega = 1/z$ ;
- 3)  $\omega_3 = 2a\omega_2 - 1$  — осуществляется функцией  $\omega = Az + B$ ;
- 4)  $\omega_4 = \ln(\omega_3)$  — осуществляется функцией  $\omega = \ln(z)$ .

На рис. 5, *б* показана построенная таким образом биполярная сетка. Из рисунка видно, что эта сетка лучше описывает внутреннюю границу области.

**Переход в систему координат с криволинейной осью абсцисс.** Преобразование имеет один геометрический параметр — линию — и задается в виде  $C(N, K(\dots))$ , где  $N$  — номер преобразования,  $K(\dots)$  — контур, описывающий криволинейную ось абсцисс. Данный контур является частью границы исходной счетной области. Начальная точка контура является точкой отсчета для криволинейной системы координат. Данное преобразование обычно используется в тех случаях, когда



*a*



*б*

Рис. 5. Пример построения сетки: *a* — без использования преобразований; *б* — с помощью композиции конформных преобразований

надо получить мало отличающиеся между собой ячейки вдоль некоторой кривой — части границы области. Равномерная сетка, построенная в криволинейной системе координат, после перехода к исходным координатам преобразуется в счетную сетку, ориентированную вдоль заданной части границы области, с одинаковыми по форме и близкими по размерам ячейками вблизи этой границы. Например, при помощи такого преобразования осуществляется переход в новую систему координат, в которой по оси  $OX$  расположены координаты точек исходной области вдоль заданной линии, а по оси  $OY$  — расстояния точек исходной области до линии преобразования.

На рис. 6 изображены счетные сетки двух областей, полученные с использованием криволинейных линий преобразования (отмечены пунктиром).

Контур, описывающий криволинейную ось абсцисс, аппроксимируется ломаной линией, состоящей из  $n$  отрезков. Сначала вычисляются расстояния от начала координат новой системы отсчета до каждого отрезка ломаной по формуле:

$$S_{ip} = S_{ip-1} + \sqrt{(X_{ip} - X_{ip-1})^2 + (Y_{ip} - Y_{ip-1})^2},$$

где  $X_{ip-1}, Y_{ip-1}$  — координаты начала, а  $X_{ip}, Y_{ip}$  — координаты конца текущего отрезка,  $ip = \overline{2, n}$ . При этом  $S_1 = 0$ ;  $X_1, Y_1$  — координаты начальной точки контура.

После этого производится прямое преобразование заданного контура. Для каждой  $i$ -й точки ( $i = \overline{1, N}$ ) с координатами  $X_i, Y_i$ , принадлежащей границе области и участвующей в аппроксима-

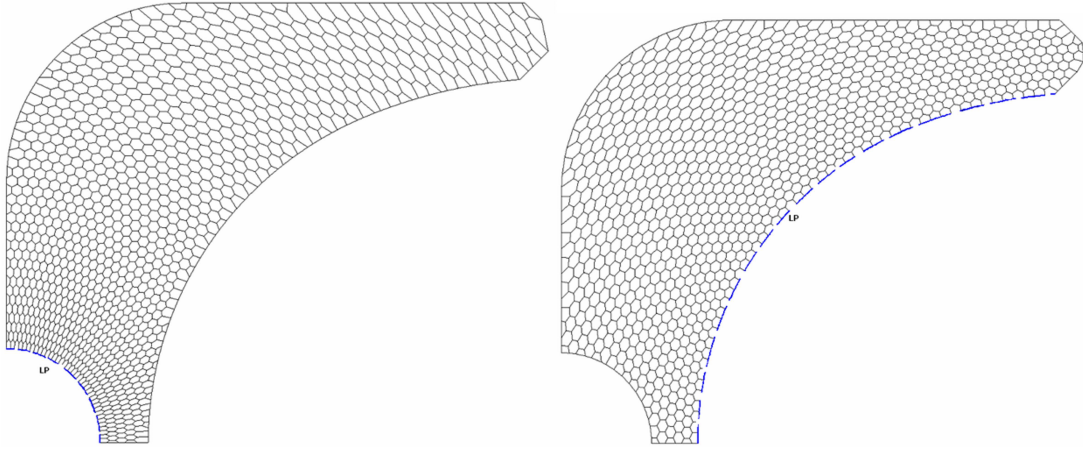


Рис. 6. Примеры использования криволинейной линии преобразования

ции, находим ее проекцию на ломаную линию (точка с координатами  $XP_i, YP_i$ ) и номер отрезка ломаной  $ip$ , на который попала эта точка. Координаты точки преобразованной границы  $XT_i, YT_i$  вычисляются по формулам

$$XT_i = S_{ip} + \sqrt{(XP_i - X_{ip})^2 + (YP_i - Y_{ip})^2};$$

$$YT_i = \sqrt{(X_i - XP_i)^2 + (Y_i - YP_i)^2}.$$

В итоге получаем преобразованную границу области. Далее в области с преобразованной границей строится сетка. После того как сетка построена, выполняется обратное преобразование по следующим формулам:

$$XT_i = X_{ip} + \frac{(X_i - S_{ip})(X_{ip+1} - X_{ip})}{Q} - \frac{Y_i(Y_{ip+1} - Y_{ip})}{Q},$$

$$YT_i = Y_{ip} + \frac{(X_i - S_{ip})(Y_{ip+1} - Y_{ip})}{Q} + \frac{Y_i(X_{ip+1} - X_{ip})}{Q},$$

$$Q = \sqrt{(X_{ip+1} - X_{ip})^2 + (Y_{ip+1} - Y_{ip})^2}.$$

**Сжатие счетных ячеек вдоль одной из координатных осей.** Данное преобразование имеет скалярный параметр  $L$  — коэффициент сжатия (сгущения) ячеек счетной сетки по оси абсцисс или оси ординат, в зависимости от номера преобразования  $N$ , и задается в виде  $C(N, L)$ . Если сжатие осуществляется по направлению оси, то  $L < 1$ , если в противоположном направлении, то  $L > 1$ . Это преобразование обычно используется в тех случаях, когда надо иметь неравномерную сетку вдоль одной из координатных осей.

На рис. 7 изображены начальные сетки четырех областей, полученные с одновременным использованием сжатия счетных ячеек вдоль оси абсцисс и оси ординат. Для построения таких сеток выполнялись последовательные преобразования: сначала сжатие счетных ячеек вдоль одной координатной оси, затем — вдоль другой.

Координаты преобразованной границы области при сжатии счетных ячеек вдоль оси абсцисс вычисляются по формулам

$$XT_i = X_{\min} + \frac{\ln\left(1 - \frac{X_i - X_{\min}}{R2}\right)}{R3}, \quad R2 = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 - L}, \quad R3 = \frac{\ln L}{X_{\max} - X_{\min}},$$

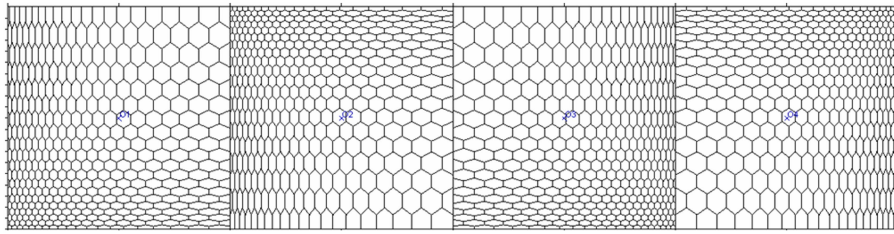


Рис. 7. Вид начальных сеток с одновременным использованием сжатия счетных ячеек вдоль оси абсцисс и оси ординат

где  $X_i, XT_i$  — абсциссы  $i$ -й точки ( $i = \overline{1, N}$ ) границы области до и после преобразования соответственно;  $N$  — число точек аппроксимации;  $X_{\max}$  и  $X_{\min}$  — максимальная и минимальная абсциссы точек, принадлежащих границе области. При этом ординаты точек не изменяются.

Обратное преобразование выполняется по формуле

$$XT_i = X_{\min} + R2 \left[ 1 - \exp \left( R3 (X_i - X_{\min}) \right) \right].$$

Аналогичная процедура выполняется при сжатии счетных ячеек вдоль оси ординат, но при этом не изменяются абсциссы точек.

**Учет разнотолщинности области при построении сетки.** Данное преобразование используется для построения одинакового числа слоев ячеек между двумя криволинейными участками границы области. Преобразование имеет четыре параметра — точки и задается в виде  $C(N, T1, T2, T3, T4)$ . При этом  $T1, T2$  — граничные точки на одном участке границы;  $T3, T4$  — граничные точки на противоположном участке границы (рис. 8, *a*).

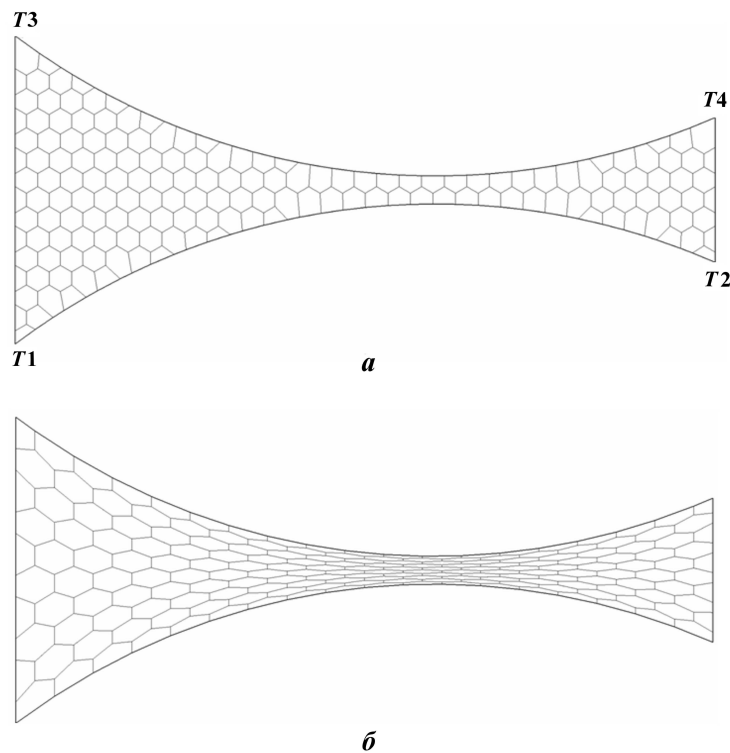


Рис. 8. Сетка в разнотолщинной области: *a* — исходная; *b* — после преобразования

На рис. 8, *a* изображена счетная сетка разнотолщинной области без использования описанного преобразования. Применение данного преобразования позволяет сохранить одинаковое число слоев ячеек между криволинейными участками границы области (рис. 8, *б*).

По известным координатам точек  $T1, T2, T3, T4$  из точек с координатами  $X_i, Y_i$ , описывающих всю границу области, выделяются те, которые принадлежат криволинейным участкам  $T1-T2$  и  $T3-T4$ .

Пусть  $KH$  точек участвует в аппроксимации первого криволинейного участка границы и их координаты  $XH_i, YH_i$  ( $i = \overline{1, KH}$ );  $KB$  — число точек, участвующих в аппроксимации второго криволинейного участка границы, и их координаты  $XB_i, YB_i$  ( $i = \overline{1, KB}$ ).

Тогда ординаты всех точек границы области преобразуются по формуле

$$YT_i = YH_{\min} + (YB_{\max} - YH_{\min}) \frac{Y_i - Y_1}{Y_2 - Y_1}.$$

Здесь  $i = \overline{1, N}$  ( $N$  — число точек, участвующих в аппроксимации границы области);  $YH_{\min}$  — минимальная ордината точки первого криволинейного участка границы;  $YB_{\max}$  — максимальная ордината точки второго криволинейного участка границы;

$$Y_1 = YH_k + (YH_{k+1} - YH_k) \frac{X_k - X_1}{X_2 - X_1}, \quad \text{где } k = \overline{1, KH};$$

$$Y_2 = YB_k + (YB_{k+1} - YB_k) \frac{X_k - X_1}{X_2 - X_1}, \quad \text{где } k = \overline{1, KB}.$$

$X_1$  и  $X_2$  вычисляются по следующему алгоритму.

Сначала переменные  $X_1$  и  $X_2$  получают начальные значения:  $X_1 = -1\,000\,000$ ;  $X_2 = 1\,000\,000$ . Далее в цикле по  $j$  ( $j = \overline{1, KH}$ ) выполняются следующие действия:

$$X_j = XH_j;$$

если  $(X_j - X_1) < 0$ , то

$$\text{если } (X_1 - X_j) < 0, \text{ то } X_1 = X_j,$$

иначе, если  $(X_1 - X_j) > 0$  или  $(X_1 - X_j) = 0$ , то  $j = j + 1$ ,

иначе, если  $(X_j - X_1) > 0$ , то

$$\text{если } (X_j - X_2) < 0, \text{ то } X_2 = X_j,$$

иначе, если  $(X_j - X_2) > 0$  или  $(X_j - X_2) = 0$ , то  $j = j + 1$ .

Заметим, что преобразованию подлежат только ординаты точек границы области. Обратное преобразование ординат точек границы области выполняется по формуле

$$YT_i = Y_1 + (Y_2 - Y_1) \frac{Y_i - YH_{\min}}{YB_{\max} - YH_{\min}}.$$

### Пример построения сетки с использованием композиции нескольких преобразований

Продemonстрируем выполнение композиции нескольких преобразований при построении начальной сетки. На рис. 9, *a* показана геометрия с сеткой, построенной без использования преобразований, на рис. 9, *б* — с сеткой, построенной с помощью композиции трех преобразований:

- 1) переход в криволинейную систему координат (по внутренней дуге области);
- 2) учет разнотолщинности области для построения одинакового числа слоев ячеек между криволинейными участками границы области (внутренней и внешней дугами области);
- 3) сгущение ячеек сетки по радиусу с коэффициентом сгущения 0,5.



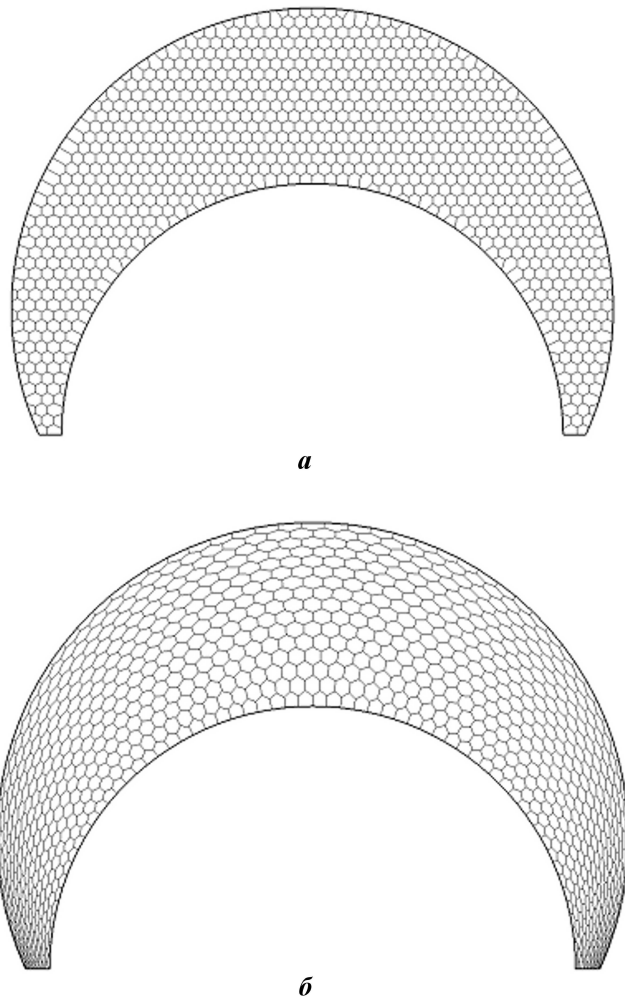


Рис. 9. Пример построения сетки: *a* — без использования преобразований; *b* — с использованием композиции трех преобразований

### Заключение

В методике ТИМ-2D предусмотрены методы, позволяющие строить начальную сетку с необходимыми свойствами, в частности использующие различные преобразования. При этом можно выполнять как отдельные преобразования, так и их композицию.

В качестве практических рекомендаций можно отметить следующее. В задачах, имеющих симметрию, для лучшей аппроксимации границ можно использовать конформные преобразования. В задачах со сложной криволинейной границей области целесообразнее выполнять преобразование, осуществляющее переход в криволинейную систему координат. Сгущение ячеек необходимо использовать в тех фрагментах, где ожидается возникновение больших градиентов решения задачи.

Применимость описанных алгоритмов проверена на ряде геометрий, в которых использовались различные преобразования двумерной сетки в процессе ее построения.

### Список литературы

1. Соколов С. С., Воропинов А. А., Новиков И. Г. и др. Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством

- связей в узлах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 29—43.
2. *Панов А. И., Шурьгин А. В.* Некоторые алгоритмы построения неструктурированных многоугольных сеток для методики ТИМ-2D // Там же. 2015. Вып. 1. С. 56—65.
  3. *Тарасов В. И., Борисенко О. Н., Олесницкая К. К.* Программа расчета начальных данных двумерных задач // Сб. тез. докл. VI науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 1 ноября 2007 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007. С. 10.
  4. *Тарасов В. И., Борисенко О. Н., Калмыкова К. К., Шабуров В. М.* Единая технология расчета начальных данных двумерных газодинамических задач для численных методик РФЯЦ-ВНИИЭФ // Тез. докл. конф. "Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления". Т. 2. Москва, 28 июня — 1 июля 2004 г. М.: ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, 2004. С. 198—207.
  5. *Черенков П. В., Борисенко О. Н., Черенкова М. В. и др.* Подготовка начальных данных двумерных задач по программам SolidEditor и 2D-РНД // Сб. докл. VIII науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 28 октября 2010 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 141—146.
  6. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Физматлит, 2001.

Статья поступила в редакцию 10.04.14.

USING VARIOUS COMPUTING GRID TRANSFORMATIONS IN THE TIM-2D TECHNIQUE / A. I. Panov, A. V. Shurygin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod region).

The algorithms used for various transformations of unstructured polygonal grid in the TIM-2D technique and for preparation of initial data for this technique are described. The standard way of building the initial grid for the TIM-2D technique is presented. The provided examples show the way the transformations are performed both separately and in composition. We also provide practical recommendations on the use of different transformations depending on the type of the structure and special features of the problem solving.

*Keywords:* TIM-2D technique, non-structured grid, geometric transformations, initial data calculation.

---