

УДК 517.956+519.635.8+533.6.011+534.22

ВЛИЯНИЕ СПОСОБА УЧЕТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЧЕТА ДВУХЭТАПНОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Ю. А. Бондаренко

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Проведено с учетом теплопроводности исследование устойчивости двухэтапной разностной схемы счета газовой динамики в переменных Лагранжа. Получено, что условия на шаг по времени типа Куранта сильно зависят от способа использования в разностной схеме неявной теплопроводности. В большинстве случаев условие устойчивости определяется изэнтропической скоростью звука. Предложена модификация с учетом неявной теплопроводности в двух уравнениях энергии. В условиях устойчивости модифицированной схемы присутствует непрерывный переход от изэнтропической скорости звука к изотермической при увеличении теплового числа Куранта.

Ключевые слова: газовая динамика с теплопроводностью, разностные схемы, расщепление по физическим процессам, устойчивость разностных схем, изэнтропическая скорость звука, изотермическая скорость звука, тепловая дисперсия звука.

Введение

В условиях устойчивости типа Куранта для разностных схем счета газовой динамики в переменных Лагранжа [1, 2] обычно используется изэнтропическая скорость звука c_S . В то же время известно [3, 4], что в газовой динамике с "сильной" теплопроводностью скорость распространения коротковолновых возмущений близка к изотермической скорости звука c_T . Изотермическая скорость звука меньше изэнтропической: $c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{T=\text{const}}} < c_S = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S=\text{const}}}$. Поэтому, взяв в условии типа Куранта изотермическую скорость звука, получим шаг по времени больше, чем при использовании изэнтропической скорости звука.

Для уравнения состояния $p = (\gamma - 1)\rho E$, $E = E_T T$, $\gamma = \text{const} > 1$, $E_T = \text{const} > 0$, имеем $c_T/c_S = \gamma^{-1/2} < 1$. Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ изотермическая скорость звука меньше изэнтропической приблизительно в 1,3 раза. Но в высокотемпературном случае, когда вещество находится в равновесии с излучением, эффект может быть большим. Для уравнения состояния идеального газа с равновесным излучением [5]

$$P(\rho, T) = (\gamma - 1)\rho C_V T + \frac{\sigma T^4}{3}; \quad E(\rho, T) = C_V T + \frac{\sigma T^4}{\rho}; \quad (1)$$

$$\gamma = \text{const} > 1; \quad C_V = \text{const} > 0; \quad \sigma = 1,373$$

зависимости отношения изэнтропической скорости звука к изотермической от температуры приведены на рис. 1. Видно, что переход в газодинамических условиях устойчивости типа Куранта от изэнтропической скорости звука к изотермической может дать серьезное удешевление расчетов, когда имеются вещества с низкой плотностью ρ и высокой температурой T .

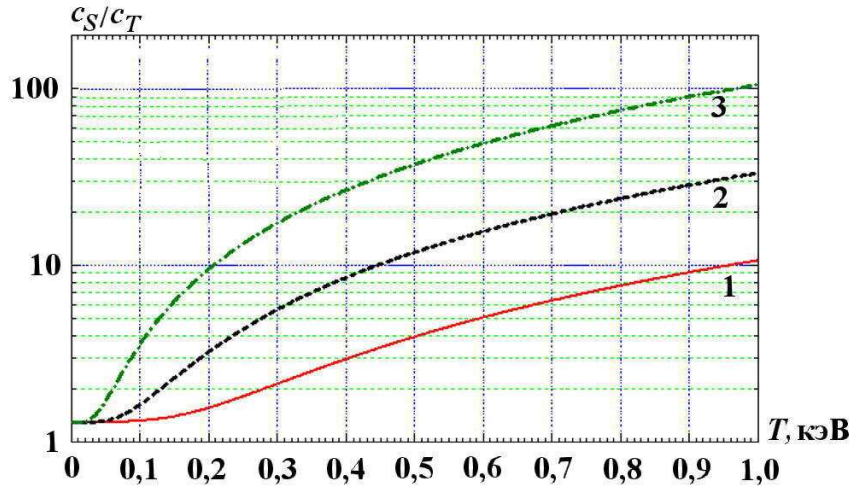


Рис. 1. Отношение изэнтропической скорости звука к изотермической в зависимости от температуры для уравнения состояния (1) идеального газа с излучением ($\gamma = 5/3$, $C_V = 8,25$): 1 — $\rho = 10^{-3}$; 2 — $\rho = 10^{-4}$; 3 — $\rho = 10^{-5}$

Нужны формулы, описывающие непрерывный переход от одной скорости звука к другой по мере "усиления" теплопроводности. Но известные из акустики зависимости скорости звука в газах от теплопроводности [3] могут не соответствовать условиям устойчивости конкретной разностной схемы. Настоящая работа посвящена исследованию влияния теплопроводности на устойчивость двухэтапной разностной схемы типа *предиктор—корректор* счета газовой динамики в переменных Лагранжа. Во избежание громоздких формул ограничимся одномерным плоским случаем и равномерными по массе сетками без учета вязкости.

Фазовая скорость звука в дифференциальных уравнениях газовой динамики с учетом теплопроводности (одномерный случай)

Уравнения одномерной плоской газовой динамики в переменных Лагранжа с учетом теплопроводности имеют вид

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial m}; \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial m}; \quad \frac{dE}{dt} = -p \frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial m} \right). \quad (2)$$

Здесь t — время; $m = \int \rho(t, x) dx$ — массовая лагранжева координата; $\eta = \rho^{-1}$ — удельный объем; ρ — плотность; u — скорость; p — давление; E — внутренняя энергия единицы массы; T — температура; κ — коэффициент теплопроводности (считаем его постоянным). Уравнения состояния берем в следующих формах:

$$p = P(\rho, E) = P(\eta, E) = P(\rho, T) = P(\eta, T); \quad E = E(\rho, T) = E(\eta, T); \quad T = T(\rho, E) = T(\eta, E). \quad (3)$$

Для малых возмущений состояния покоя, пренебрегая квадратичными по малым возмущениям слагаемыми, из (2) получаем линейную систему

$$\frac{d\delta\eta}{dt} = \frac{\partial\delta u}{\partial m}; \quad \frac{d\delta u}{dt} = -\frac{\partial\delta p}{\partial m}; \quad \frac{d\delta E}{dt} = -p_0 \frac{\partial\delta u}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} \left(\kappa \frac{\partial\delta T}{\partial m} \right), \quad (4)$$

которая замыкается соотношениями (линеаризацией уравнений состояния (3))

$$\delta p = P_\eta \delta \eta + P_E \delta E; \quad \delta E = E_\eta \delta \eta + E_T \delta T. \quad (5)$$

Здесь и далее используются обозначения для величин, которые считаем постоянными:

$$\begin{aligned} P_\eta &= \frac{\partial P(\eta, E)}{\partial \eta} < 0; & P_E &= \frac{\partial P(\eta, E)}{\partial E}; & E_\eta &= \frac{\partial E(\eta, T)}{\partial \eta}; & E_T &= \frac{\partial E(\eta, T)}{\partial T} > 0; \\ a_S^2 &= (\rho c_S)^2 = -P_\eta + p P_E > 0; & a_T^2 &= (\rho c_T)^2 = -P_\eta - P_E E_\eta > 0; & 0 < c_T < c_S; & 0 < a_T < a_S; & (6) \\ \varepsilon_T &= \frac{a_T}{a_S} = \frac{c_T}{c_S}; & 0 < \varepsilon_T < 1; & Q &= \frac{\kappa}{E_T} > 0. \end{aligned}$$

Величины a_S и a_T — изэнтропическая и изотермическая массовые скорости звука; c_S и c_T — изэнтропическая и изотермическая обычные скорости звука; Q — коэффициент температуропроводности.

После подстановки в (4) и (5) решения в виде $\delta f(t, m) = \delta f_0 e^{i(\omega t - \xi m)}$ получаем дисперсионное уравнение

$$(i\omega) \left[(i\omega)^2 + \xi^2 a_S^2 \right] + \xi^2 Q \left[(i\omega)^2 + \xi^2 a_T^2 \right] = 0. \quad (7)$$

Ограничимся рассмотрением зависимости частоты ω от вещественного волнового числа ξ , как это обычно делается в математике и в разностных схемах для гиперболических задач при изучении фазовой ошибки (разностной дисперсии) и ошибки диссипации [6–9]. Будем называть *фазовой скоростью* величину

$$a(\xi) = \frac{\operatorname{Re}(\omega(\xi))}{\xi}, \quad \operatorname{Im}(\xi) = 0, \quad \xi \neq 0, \quad (8)$$

а величину $\lambda(\xi) = \operatorname{Im}(\omega(\xi))$, $\operatorname{Im}(\xi) = 0$, $\xi \neq 0$, будем называть *скоростью диссипации*. Обычно используемое в акустике [3, 4] решение дисперсионного уравнения для вещественной частоты $\operatorname{Im}(\omega) = 0$, когда рассматриваются комплексные волновые числа $\xi(\omega) = \psi(\omega) - i\Gamma(\omega)$, в настоящей работе не потребуются.

Лемма 1. Для ненулевых вещественных волновых чисел ξ корни $\omega(\xi)$ дисперсионного уравнения (7) обладают следующими свойствами:

1. Все корни $\omega = \omega_{1,2,3}(\xi)$ уравнения (7) являются комплексными (невещественными), лежат в верхней полуплоскости, и верна оценка

$$0 < \operatorname{Im}(\omega) < \xi^2 Q, \quad \forall \xi \neq 0 : \operatorname{Im}(\xi) = 0. \quad (9)$$

2. Один корень $\omega_1(\xi)$ — всегда чисто мнимый, с положительной мнимой частью; он описывает стоячее затухающее возмущение.
3. Если выполнено условие

$$4(\xi^2 Q^2 a_T - a_S^3)^2 + \xi^2 Q^2 (3a_T - a_S)^3 (a_T + a_S) > 0, \quad \operatorname{Im}(\xi) = 0, \quad (10)$$

то остальные два корня имеют одинаковую по абсолютной величине ненулевую вещественную часть с разными знаками и одинаковую мнимую часть:

$$\omega_{2,3}(\xi) = \pm \xi a(\xi) + i\lambda(\xi), \quad a(\xi) > 0, \quad \lambda(\xi) > 0; \quad (11)$$

они описывают распространяющиеся с фазовой скоростью $\pm a(\xi)$ затухающие волны. Условие (10) выполнено для всех ненулевых вещественных ξ тогда и только тогда, когда

$$3a_T > a_S. \quad (12)$$

4. Если вещественные волновые числа $\xi \neq 0$ удовлетворяют условию

$$4(\xi^2 Q^2 a_T - a_S^3)^2 + \xi^2 Q^2 (3a_T - a_S)^3 (a_T + a_S) \leq 0, \quad \text{Im}(\xi) = 0, \quad (13)$$

то все три корня $\omega_{1,2,3}(\xi)$ дисперсионного уравнения (7) будут чисто мнимыми, с положительной мнимой частью; они описывают три типа стоячих волн. Такие вещественные волновые числа ξ существуют тогда и только тогда, когда

$$3a_T \leq a_S. \quad (14)$$

Если неравенство (14) выполнено в строгом смысле, то условие (13) удовлетворяется для всех ξ из некоторого интервала ненулевой длины.

Пример наличия диапазона длин волн с нулевой фазовой скоростью показан ниже на рис. 3. В литературе по акустике упоминаний этого факта автор не нашел, возможно, потому что в акустике не рассматриваются среды, в которых $c_T < c_S/3$.

Доказательство леммы. Вместо (7) рассмотрим уравнение

$$z^3 + z^2 \xi^2 Q + z \xi^2 a_S^2 + \xi^4 Q a_T^2 = 0, \quad z = i\omega. \quad (15)$$

Оценка (9) в утверждении 1 доказывается применением критерия Рауса—Гурвица [10] к (15) и к уравнению, которое получается заменой $z = -(x + \xi^2 Q)$. Утверждение 2 тогда очевидно.

Утверждения 3 и 4 сводятся к выяснению, когда уравнение (15) имеет два невещественных корня или таких не имеет. Для этого находится дискриминант $D = q^2 + p^3$ приведенного уравнения $y^3 + 3py + 2q = 0$. Уравнение (15) будет иметь одно вещественное решение и два невещественных тогда и только тогда, когда дискриминант строго положительный: $D = q^2 + p^3 > 0$ [11], откуда получаем (10). Неравенство (12) получается из леммы 6 (см. Приложение) для $x = \xi^2 Q^2$ в (10). После этого утверждение 4 очевидно.

Фазовая скорость распространяющихся затухающих волн (11) обладает ожидаемыми свойствами в длинноволновом и коротковолновом пределах:

$$a(\xi) \xrightarrow{|\xi Q| \rightarrow +0} (a_S - 0); \quad a(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} a_T; \quad \lambda(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \lambda_\infty = \frac{a_S^2 - a_T^2}{2Q}.$$

На чисто техническом доказательстве этих свойств останавливаться не будем.

Базовая двухэтапная разностная схема для одномерной газовой динамики

Опишем двухэтапную разностную схему, которая аппроксимирует уравнения (2), пока без учета теплопроводности. Искусственные вязкости учитывать не будем (обычно их значения просто прибавляются к соответствующим давлениям). Это некоторая модификация разностной схемы типа Ладагина—Пастушенко [12], двумерное обобщение которой используется в методике МИМОЗА [13]. В одномерном плоском случае эта схема определяется разностными уравнениями, которые записаны в порядке их использования:

$$\frac{u_j^{n+\sigma} - u_j^n}{\sigma\tau} = -\frac{p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n}{\Delta m_j}; \quad (16)$$

$$\frac{X_j^{n+\sigma} - X_j^n}{\sigma\tau} = u_j^{n+\sigma}; \quad (17)$$

$$\eta_{j-1/2}^{n+\sigma} \equiv \frac{1}{\rho_{j-1/2}^{n+\sigma}} = \frac{X_j^{n+\sigma} - X_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m_{j-1/2}}; \quad (18)$$

$$\frac{E_{j-1/2}^{n+\sigma} - E_{j-1/2}^n}{\sigma\tau} = -p_{j-1/2}^n \frac{u_j^{n+\sigma} - u_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m_{j-1/2}}; \quad (19)$$

$$p_{j-1/2}^{n+\sigma} = P \left(\rho_{j-1/2}^{n+\sigma}, E_{j-1/2}^{n+\sigma} \right); \quad (20)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = -\frac{p_{j+1/2}^{n+\sigma} - p_{j-1/2}^{n+\sigma}}{\Delta m_j}; \quad (21)$$

$$\frac{X_j^{n+1} - X_j^n}{\tau} = u_j^{n+(1/2)} \equiv \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}; \quad (22)$$

$$\eta_{j-1/2}^{n+1} \equiv \frac{1}{\rho_{j-1/2}^{n+1}} = \frac{X_j^{n+1} - X_{j-1}^{n+1}}{\Delta m_{j-1/2}}; \quad (23)$$

$$\frac{E_{j-1/2}^{n+1} - E_{j-1/2}^n}{\tau} = -p_{j-1/2}^{n+\sigma} \frac{u_j^{n+(1/2)} - u_{j-1}^{n+(1/2)}}{\Delta m_{j-1/2}}; \quad (24)$$

$$p_{j-1/2}^{n+1} = P \left(\rho_{j-1/2}^{n+1}, E_{j-1/2}^{n+1} \right). \quad (25)$$

Постоянный параметр σ удовлетворяет условию

$$2\sigma \geq 1. \quad (26)$$

Уравнения (16)–(20) образуют первый этап (предиктор), уравнения (21)–(25) – второй этап (корректор). Массы узлов и ячеек сетки, как обычно, связаны соотношениями $\Delta m_j = 0,5 (\Delta m_{j-1/2} + \Delta m_{j+1/2})$.

**Устойчивость двухэтапной разностной схемы счета газовой динамики,
в которой неявная теплопроводность учтена
распределенным диффузионным источником энергии**

Рассмотрим способ учета неявной теплопроводности, который принят при счете газовой динамики с теплопроводностью в методике МИМОЗА [14]. В этом способе перед счетом газодинамики решается неявное уравнение теплопроводности

$$\dot{E}_{j-1/2}^{n+1/2} = \frac{\hat{E}_{j-1/2}^{n+1} - E_{j-1/2}^n}{\tau} = \frac{1}{\Delta m_{j-1/2}} \left(\kappa_j \frac{\hat{T}_{j+1/2}^{n+1} - \hat{T}_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta m_j} - \kappa_{j-1} \frac{\hat{T}_{j-1/2}^{n+1} - \hat{T}_{j-3/2}^{n+1}}{\Delta m_{j-1}} \right), \quad (27)$$

$$\hat{E}_{j-1/2}^{n+1} = E \left(\rho_{j-1/2}^n, \hat{T}_{j-1/2}^{n+1} \right), \quad (28)$$

но "новые" температуры $\hat{T}_{j-1/2}^{n+1}$ и внутренние энергии $\hat{E}_{j-1/2}^{n+1}$ не запоминаются. Запоминается только распределенный диффузионный источник энергии, который используется при счете газовой динамики в уравнениях для внутренней энергии (19) и (24) в виде

$$\frac{E_{j-1/2}^{n+\sigma} - E_{j-1/2}^n}{\sigma\tau} = -p_{j-1/2}^n \frac{u_j^{n+\sigma} - u_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m_{j-1/2}} + \dot{E}_{j-1/2}^{n+1/2}; \quad (29)$$

$$\frac{E_{j-1/2}^{n+1} - E_{j-1/2}^n}{\tau} = -p_{j-1/2}^{n+\sigma} \frac{u_j^{n+(1/2)} - u_{j-1}^{n+(1/2)}}{\Delta m_{j-1/2}} + \dot{E}_{j-1/2}^{n+1/2}. \quad (30)$$

Получившуюся в результате разностную схему для последующих ссылок запишем в виде следующей цепочки формул, используемых на одном шаге по времени:

$$[(27), (28)] \rightarrow [(16)–(18)] \rightarrow (29) \rightarrow [(20)–(23)] \rightarrow (30) \rightarrow (25). \quad (31)$$

Для исследования устойчивости, прежде всего, из системы разностных уравнений (31), часть которых нелинейная, надо получить линейную систему для малых возмущений состояния покоя. При этой линеаризации сразу воспользуемся обозначениями (6) и предположением о постоянстве всех термодинамических величин из (6). Предполагаем также, что массы всех ячеек сетки и узлов сетки одинаковые:

$$\Delta m_j = \Delta m_{j-1/2} = \Delta m, \quad \forall j. \quad (32)$$

Тогда из формул цепочки вычислений (31) получаем следующую систему линейных конечно-разностных уравнений для малых возмущений состояния покоя:

$$\delta \dot{E}_{j-1/2}^{n+1/2} = \frac{\delta \hat{E}_{j-1/2}^{n+1} - \delta E_{j-1/2}^n}{\tau} = \frac{\kappa}{\Delta m^2} \left(\delta \hat{T}_{j+1/2}^{n+1} - 2\delta \hat{T}_{j-1/2}^{n+1} + \delta \hat{T}_{j-3/2}^{n+1} \right); \quad (33)$$

$$\delta \hat{E}_{j-1/2}^{n+1} = E_\eta \delta \eta_{j-1/2}^n + E_T \delta \hat{T}_{j-1/2}^{n+1}; \quad (34)$$

$$\frac{\delta u_j^{n+\sigma} - \delta u_j^n}{\sigma \tau} = - \frac{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n}{\Delta m}; \quad (35)$$

$$\frac{\delta X_j^{n+\sigma} - \delta X_j^n}{\sigma \tau} = \delta u_j^{n+\sigma}; \quad (36)$$

$$\delta \eta_{j-1/2}^{n+\sigma} = \frac{\delta X_j^{n+\sigma} - \delta X_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m}; \quad (37)$$

$$\frac{\delta E_{j-1/2}^{n+\sigma} - \delta E_{j-1/2}^n}{\sigma \tau} = -p \frac{\delta u_j^{n+\sigma} - \delta u_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m} + \delta \dot{E}_{j-1/2}^{n+1/2}; \quad (38)$$

$$\delta p_{j-1/2}^{n+\sigma} = P_\eta \delta \eta_{j-1/2}^{n+\sigma} + P_E \delta E_{j-1/2}^{n+\sigma}; \quad (39)$$

$$\frac{\delta u_j^{n+1} - \delta u_j^n}{\tau} = - \frac{\delta p_{j+1/2}^{n+\sigma} - \delta p_{j-1/2}^{n+\sigma}}{\Delta m}; \quad (40)$$

$$\frac{\delta X_j^{n+1} - \delta X_j^n}{\tau} = \delta u_j^{n+(1/2)} = \frac{\delta u_j^n + \delta u_j^{n+1}}{2}; \quad (41)$$

$$\delta \eta_{j-1/2}^{n+1} = \frac{\delta X_j^{n+1} - \delta X_{j-1}^{n+1}}{\Delta m}; \quad (42)$$

$$\frac{\delta E_{j-1/2}^{n+1} - \delta E_{j-1/2}^n}{\tau} = -p \frac{\delta u_j^{n+(1/2)} - \delta u_{j-1}^{n+(1/2)}}{\Delta m} + \delta \dot{E}_{j-1/2}^{n+1/2}; \quad (43)$$

$$\delta p_{j-1/2}^{n+1} = P_\eta \delta \eta_{j-1/2}^{n+1} + P_E \delta E_{j-1/2}^{n+1}; \quad (44)$$

$$\delta E_{j-1/2}^{n+1} = E_\eta \delta \eta_{j-1/2}^{n+1} + E_T \delta T_{j-1/2}^{n+1}. \quad (45)$$

Ищем решение линейной системы уравнений (33)–(45) в виде гармоник Фурье

$$\begin{aligned} \delta f_j^{n+k} &= \delta f(t^{n+k}, m_j) = \delta f^{n+k} e^{-i\xi j \Delta m}, \quad k = 0, \sigma, 1; \quad \delta f^{n+1} = \lambda \delta f^n; \\ \delta g_{j-1/2}^{n+k} &= \delta g(t^{n+k}, m_{j-1/2}) = \delta g^{n+k} e^{-i\xi (j-1/2) \Delta m}, \quad k = 0, \sigma, 1; \quad \delta g^{n+1} = \lambda \delta g^n. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь λ есть собственное (комплексное) значение оператора перехода разностной схемы (33)–(45), а вещественное волновое число ξ — любое, удовлетворяющее ограничению

$$0 < \zeta = \xi \Delta m \leq \pi. \quad (47)$$

Подставляем решения (46) в систему (33)–(45). Затем исключаем амплитуды малых возмущений промежуточных величин $\delta f^{n+\sigma}$ и $\delta g^{n+\sigma}$, после этого исключаем амплитуды малых возмущений давлений, внутренних энергий, удельных объемов и вспомогательной температуры $\delta \hat{T}^{n+1}$. В результате получается линейная однородная система трех уравнений для амплитуд возмущений координат, скорости и температуры (соответствующие длинные выкладки опускаем). Приравнявая определитель

этой системы нулю (чтобы она имела нетривиальное решение), получаем кубическое характеристическое уравнение для собственных значений λ

$$b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0, \quad (48)$$

вещественные коэффициенты которого имеют вид

$$b_3 = 1 > 0; \quad (49)$$

$$b_2 = -3 + (K + 4\sigma\chi_S^2 s^2) + 2 \left[(1 - 4\sigma^2\chi_S^2 s^2) - \sigma K (1 - \varepsilon_T^2) \right] \chi_S^2 s^2; \quad (50)$$

$$b_1 = 3 - 2K - 4\sigma(2 - K)\chi_S^2 s^2 + 2K\varepsilon_T^2(1 - 4\sigma^2\chi_S^2 s^2)\chi_S^2 s^2; \quad (51)$$

$$b_0 = -(1 - K) \left\{ 1 - 2 \left[(2\sigma - 1) + 4\sigma^2\chi_S^2 s^2 \right] \chi_S^2 s^2 \right\} - 2K(1 - \sigma - 4\sigma^2\chi_S^2 s^2)(1 - \varepsilon_T^2)\chi_S^2 s^2. \quad (52)$$

Здесь использованы обозначения (см. также (6) и (47))

$$\chi_S = \frac{\tau\rho c_S}{\Delta m}; \quad \chi_T = \frac{\tau\rho c_T}{\Delta m}; \quad \chi_K = \frac{\tau\kappa}{E_T \Delta m^2}; \quad 0 < K = \frac{4s^2\chi_K}{1 + 4s^2\chi_K} < 1; \quad 0 < s = \sin \frac{\zeta}{2} \leq 1, \quad (53)$$

где величины χ_S , χ_T и χ_K называем изэнтропическим, изотермическим и тепловым числами Куранта соответственно. Считаем, что $s > 0$ (при $s = 0$ имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 - K$).

Теорема 1. Устойчивость системы линейных разностных уравнений (33)–(45) эквивалентна устойчивости корней характеристического кубического уравнения (48)–(52) для всех $s \in (0, 1]$. Предполагаем выполненными ограничения (см. (6), (26) и (53))

$$\chi_S > 0; \quad 0 < \varepsilon_T < 1; \quad 0 < s \leq 1; \quad 2\sigma \geq 1; \quad 0 \leq K < 1. \quad (54)$$

1. Чтобы разностная схема была нестрого устойчивой, необходимо выполнение неравенства

$$2\sigma\chi_S = 2\sigma\frac{\tau\rho c_S}{\Delta m} \leq 1. \quad (55)$$

2. Обратное, строгое неравенство

$$2\sigma\chi_S = 2\sigma\frac{\tau\rho c_S}{\Delta m} < 1 \quad (56)$$

достаточно для нестрогой устойчивости разностной схемы (33)–(45).

Необходимое (55) и достаточное (56) условия нестрогой устойчивости не зависят от значений изотермической скорости звука c_T и коэффициента теплопроводности κ . Условие нестрогой устойчивости схемы (33)–(45) не зависит от того, учитывается или нет теплопроводность, и допустимый шаг по времени не удастся увеличить по сравнению с обычным изэнтропическим условием Куранта.

Доказательство теоремы. В условиях устойчивости корней кубического многочлена (леммы 4 и 5 из Приложения) вместо самих коэффициентов (49)–(52) кубического многочлена (48) фигурируют их линейные комбинации

$$a_3 = b_3 - b_2 + b_1 - b_0 = 4(2 - K)(1 - 2\sigma\chi_S^2 s^2); \quad (57)$$

$$a_0 = b_3 + b_2 + b_1 + b_0 = 4K(1 - 4\sigma^2\chi_S^2 s^2)\chi_S^2 s^2 \varepsilon_T^2; \quad (58)$$

$$a_2 = 3b_3 - b_2 - b_1 + 3b_0 = 4 \left[K + 4\sigma(1 - K)\chi_S^2 s^2 - (2 - K)(1 - 4\sigma^2\chi_S^2 s^2)\chi_S^2 s^2 \right] + 4K \left[(2\sigma - 1) + 4\sigma^2\chi_S^2 s^2 \right] (1 - \varepsilon_T^2)\chi_S^2 s^2 > 0; \quad (59)$$

$$a_1 = 3b_3 + b_2 - b_1 - 3b_0 = 8 \left[\sigma K \varepsilon_T^2 + (1 - K \varepsilon_T^2)(1 - 4\sigma^2\chi_S^2 s^2) \right] \chi_S^2 s^2. \quad (60)$$

Из (59) с учетом (54) получаем

$$\begin{aligned} a_2|_{K=0} &= 8 [(2\sigma - 1) + 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2] \chi_S^2 s^2 > 0; \\ a_2|_{K=1} &= 4 \left[\frac{16\sigma^2 - 1}{16\sigma^2} + \left(2\sigma \chi_S^2 s^2 - \frac{1}{4\sigma} \right)^2 \right] + 4 [(2\sigma - 1) + 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2] (1 - \varepsilon_T^2) \chi_S^2 s^2 > \frac{16\sigma^2 - 1}{4\sigma^2} > 0. \end{aligned}$$

Линейно зависящая от K функция $a_2(K)$ положительна при $K = 0$ и $K = 1$. Поэтому $a_2(K)$ положительна при всех $0 \leq K \leq 1$.

В случае $K = 0$ уравнение (48) принимает вид

$$(\lambda - 1) \left\{ (\lambda - 1)^2 + 2 [2\sigma (\lambda - 1) + (\lambda + 1) (1 - 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2)] \chi_S^2 s^2 \right\} = 0.$$

Корень $\lambda = 1$ этого уравнения лежит на единичной окружности. К оставшемуся уравнению $(\lambda - 1)^2 + 2 [2\sigma (\lambda - 1) + (\lambda + 1) (1 - 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2)] \chi_S^2 s^2 = 0$ применим лемму 2 из Приложения и получим необходимые и достаточные условия нестрогой устойчивости, которые сводятся к одному неравенству $4\sigma^2 \chi_S^2 s^2 \leq 1, \forall s \in (0, 1]$, что эквивалентно условию (55).

Поэтому дальше рассмотрим случай $0 < K < 1$.

Докажем с помощью леммы 4 из Приложения необходимость условия (55) для нестрогой устойчивости. Требование (П3) после подстановки (57) принимает вид $2\sigma \chi_S^2 s^2 \neq 1$. Считаем его выполненным. Так как $a_2 > 0$ (см. (59)), условие (П5) сводится к неравенству $a_3 \geq 0$. Поэтому с учетом (57) и (58) из (П5) и (П6) получаем два условия: $1 - 2\sigma \chi_S^2 s^2 > 0$ и $(1 - 2\sigma \chi_S^2 s^2) (1 - 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2) \geq 0$, которые вместе дают условие $1 - 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2 \geq 0$, эквивалентное (55). В случае $2\sigma \chi_S^2 s^2 = 1$ условия (П9) из второй части леммы 4 (см. Приложение) после подстановки (49)–(51) и исключения s принимают вид, не противоречащий (55).

Для доказательства второй части теоремы 1 рассмотрим неравенства (П10)–(П12) из леммы 5 (см. Приложение), совокупность которых гарантирует нестрогую устойчивость. Так как $a_2 > 0$ (см. (59)), из (П10) получаем $a_3 > 0$, затем из (П11) получаем $a_0 > 0$. Условия $a_3 > 0$ и $a_0 > 0$ после подстановки (57), (58) и учета (54) принимают вид $2\sigma \chi_S^2 s^2 < 1$ и $4\sigma^2 \chi_S^2 s^2 < 1$ для $\forall s : 0 < s \leq 1$, они эквивалентны (56).

Осталось доказать справедливость (П12) из леммы 5 при выполнении неравенства (56) и предположений (54) для $K \neq 0$. Выражение (П12) после подстановки (57)–(60) и преобразований принимает (после отбрасывания положительных множителей) вид

$$f_a(X, Y, Z) = \frac{\sigma^2}{4\chi_S^2 s^2} (a_1 a_2 - a_0 a_3) = B_0(Y, Z) + X B_1(Y, Z) + X^2 B_2(Y, Z) + X^3 B_3(Y, Z), \quad (61)$$

где многочлены четвертой степени от двух переменных Y и Z имеют вид

$$\begin{aligned} B_0(Y, Z) &= (a + 1)^2 [aZ + (2 - YZ)] YZ; \\ B_1(Y, Z) &= (a + 1) [4 + 2aZ - (4a + 10)YZ + YZ^2 + (a + 4)Y^2 Z^2]; \\ B_2(Y, Z) &= -4(a + 2) + 2(a + 1)Z + 6(a + 2)YZ - (a + 1)YZ^2 - (3a + 5)Y^2 Z^2; \\ B_3(Y, Z) &= 2(1 - YZ)(2 - YZ) \end{aligned} \quad (62)$$

и использованы обозначения

$$X = 1 - 4\sigma^2 \chi_S^2 s^2, \quad 0 < X < 1; \quad Y = \varepsilon_T^2, \quad 0 < Y < 1; \quad Z = K, \quad 0 < Z < 1; \quad 2\sigma = a + 1, \quad a \geq 0. \quad (63)$$

Фактически надо проверить положительность многочлена (61) седьмой степени от трех аргументов X, Y, Z строго внутри единичного куба (условие (56) эквивалентно ограничению $X > 0$,

остальные условия (63) следуют при $K \neq 0$ из ограничений (54). Положительность (61) легко проверяется строго внутри граней $X = 0$, $X = 1$, $Y = 0$ и $Z = 0$, а также в ближайшей окрестности грани $X = 0$ (при $0 < X \ll 1$), где справедлива оценка

$$f_a(X, Y, Z) \geq 4(a + 1)X + O(X^2) = 8\sigma X + O(X^2) > 0, \quad 0 < X \ll 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad 0 \leq Z \leq 1.$$

Проверка строгой положительности функции $f_a(X, Y, Z)$ во всех точках внутри единичного куба осуществлена численно (все вычисления и визуализация выполнены с помощью пакета программ ORIGIN 6.1 [15]). С помощью равномерно распределенного на единичном отрезке датчика случайных чисел внутренность единичного куба относительно равномерно была заполнена точками с общим числом $4 \cdot 10^5$. Еще по 10^5 точек было размещено в окрестностях (в слоях толщиной 10^{-2}) каждой из шести граней единичного куба со сгущением к границам куба. В итоге было взято 10^6 точек строго внутри единичного куба. В каждой такой точке по формулам (61), (62) вычислено значение функции $f_a(X, Y, Z)$. Такие вычисления проведены для значений σ из отрезка $0,5 \leq \sigma \leq 1$ с шагом по σ , равным 0,05, и для ряда значений $\sigma > 1$, вплоть до значения $\sigma = 100$. Все вычисленные таким способом точки отображаются графически на плоскости (X, f_a) . Пример такого графика дан на рис. 2.

Все точки функции $f_a(X, Y, Z)$, использованные в счете, для всех опробованных значений $\sigma \geq 0,5$ лежат в верхней полуплоскости. Полученные численные результаты доказывают строгую положительность функции $f_a(X, Y, Z)$ внутри единичного куба, что и завершает доказательство теоремы 1.

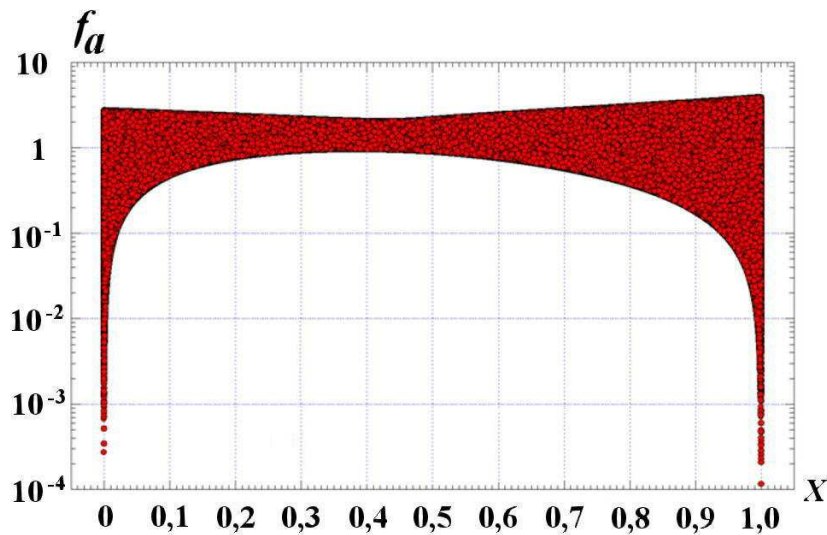


Рис. 2. Значения функции $f_a(X, Y, Z)$ из (61) при $\sigma = 0,7$

Двухэтапная разностная схема с прямым учетом теплопроводности в уравнениях для энергии

После теоремы 1 естественно возникает желание рассмотреть более традиционные способы учета неявной теплопроводности, что в двухэтапной газодинамической разностной схеме (16)–(25) можно сделать несколькими способами.

Рассмотрим схему с прямым учетом неявной теплопроводности в двух уравнениях для внутренней энергии. Для этого разностные уравнения (19) и (24) заменяем следующими:

$$\frac{E_{j-1/2}^{n+\sigma} - E_{j-1/2}^n}{\sigma\tau} = -p_{j-1/2}^n \frac{u_j^{n+\sigma} - u_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m_{j-1/2}} + \frac{\beta}{\Delta m_{j-1/2}} \left(\kappa_j \frac{T_{j+1/2}^{n+\sigma} - T_{j-1/2}^{n+\sigma}}{\Delta m_j} - \kappa_{j-1} \frac{T_{j-1/2}^{n+\sigma} - T_{j-3/2}^{n+\sigma}}{\Delta m_{j-1}} \right), \beta \geq 0; \quad (64)$$

$$E_{j-1/2}^{n+\sigma} = E \left(\rho_{j-1/2}^{n+\sigma}, T_{j-1/2}^{n+\sigma} \right); \quad (65)$$

$$\frac{E_{j-1/2}^{n+1} - E_{j-1/2}^n}{\tau} = -P_{j-1/2}^{n+\sigma} \frac{u_j^{n+(1/2)} - u_{j-1}^{n+(1/2)}}{\Delta m_{j-1/2}} + \frac{1}{\Delta m_{j-1/2}} \left(\kappa_j \frac{T_{j+1/2}^{n+1} - T_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta m_j} - \kappa_{j-1} \frac{T_{j-1/2}^{n+1} - T_{j-3/2}^{n+1}}{\Delta m_{j-1}} \right); \quad (66)$$

$$E_{j-1/2}^{n+1} = E \left(\rho_{j-1/2}^{n+1}, T_{j-1/2}^{n+1} \right). \quad (67)$$

Вводить в диффузионный член уравнения (66) множитель, отличный от единицы (для увеличения общности), нельзя, так как это нарушит аппроксимацию.

Будем называть получившуюся в результате однопараметрическую разностную схему *двухэтапной схемой с теплопроводностью в двух уравнениях энергии*, или короче, *схемой с теплопроводностью в двух уравнениях энергии*. Запишем ее в виде цепочки номеров формул, используемых на одном шаге по времени:

$$[(16)–(18)] \longrightarrow [(64), (65)] \longrightarrow [(20)–(23)] \longrightarrow [(66), (67)] \longrightarrow (25). \quad (68)$$

При линеаризации разностной схемы (68) для малых возмущений состояния покоя воспользуемся предположением (32), обозначениями (6) и предположением о постоянстве всех термодинамических величин из (6). Тогда из (64)–(67) получим линейные соотношения для малых возмущений:

$$\frac{\delta E_{j-1/2}^{n+\sigma} - \delta E_{j-1/2}^n}{\sigma \tau} = -p \frac{\delta u_j^{n+\sigma} - \delta u_{j-1}^{n+\sigma}}{\Delta m} + \frac{\beta \kappa}{\Delta m^2} \left(\delta T_{j+1/2}^{n+\sigma} - 2\delta T_{j-1/2}^{n+\sigma} + \delta T_{j-3/2}^{n+\sigma} \right); \quad (69)$$

$$\delta E_{j-1/2}^{n+\sigma} = E_\eta \delta \eta_{j-1/2}^{n+\sigma} + E_T \delta T_{j-1/2}^{n+\sigma}; \quad (70)$$

$$\frac{\delta E_{j-1/2}^{n+1} - \delta E_{j-1/2}^n}{\tau} = -p \frac{\delta u_j^{n+(1/2)} - \delta u_{j-1}^{n+(1/2)}}{\Delta m} + \frac{\kappa}{\Delta m^2} \left(\delta T_{j+1/2}^{n+1} - 2\delta T_{j-1/2}^{n+1} + \delta T_{j-3/2}^{n+1} \right); \quad (71)$$

$$\delta E_{j-1/2}^{n+1} = E_\eta \delta \eta_{j-1/2}^{n+1} + E_T \delta T_{j-1/2}^{n+1}. \quad (72)$$

В результате из (68) получается линейная система уравнений для малых возмущений состояния покоя, которая описывается следующей цепочкой номеров формул:

$$[(35)–(37)] \longrightarrow [(69), (70)] \longrightarrow [(39)–(42)] \longrightarrow [(71), (72)] \longrightarrow (44). \quad (73)$$

Ищем решение линейной системы уравнений (73) в виде гармоник Фурье (46). После исключения амплитуд малых возмущений промежуточных величин и последующего исключения амплитуд малых возмущений давлений, внутренних энергий и удельных объемов получается линейная однородная система трех уравнений для амплитуд возмущений координат, скорости и температуры. Приравняв нулю ее определитель, получим кубическое характеристическое уравнение для собственных значений λ

$$b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0, \quad b_3 > 0, \quad (74)$$

вещественные коэффициенты которого имеют вид

$$b_3 = 1 + 4\chi_K s^2 > 0; \quad (75)$$

$$b_2 = -1 - 2(1 - 2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)(1 + 4\chi_K s^2) + 2(1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)[4\chi_T^2 s^2\chi_K s^2 + \chi_S^2 s^2] - 2K_{\beta\sigma}(\chi_S^2 - \chi_T^2)s^2; \quad (76)$$

$$b_1 = 1 + 2(1 - 4\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2) + 4[(1 - 4\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2) + 2(1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)\chi_T^2 s^2]\chi_K s^2; \quad (77)$$

$$b_0 = -(1 - 4\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2) - 2(1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)\chi_S^2 s^2 + 2K_{\beta\sigma}(\chi_S^2 s^2 - \chi_T^2 s^2); \quad (78)$$

$$0 \leq K_{\beta\sigma} = \frac{4\beta\sigma s^2\chi_K}{1 + 4\beta\sigma s^2\chi_K} < 1; \quad \chi_{\beta\sigma}^2 = K_{\beta\sigma}\chi_T^2 + (1 - K_{\beta\sigma})\chi_S^2. \quad (79)$$

Случай $s = 0$, когда (74) принимает вид $(\lambda - 1)^3 = 0$, рассматривать не будем. Не будем также рассматривать случай отсутствия теплопроводности $\chi_K = 0$, когда схема (73) совпадает со схемой (33)–(45) с условием устойчивости (55).

Сразу приведем линейные комбинации коэффициентов (75)–(78) уравнения (74), которые фигурируют в формулировках условий нестрогой устойчивости в леммах 4 и 5 (см. Приложение):

$$a_3 = b_3 - b_2 + b_1 - b_0 = 8(1 - 2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)(1 + 2\chi_{\text{К}} s^2); \quad (80)$$

$$a_0 = b_3 + b_2 + b_1 + b_0 = 16(1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)\chi_T^2 s^2\chi_{\text{К}} s^2; \quad (81)$$

$$a_2 = 3b_3 - b_2 - b_1 + 3b_0 = 8[2\chi_{\text{К}} s^2 + 2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2 - (1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)(2\chi_T^2 s^2\chi_{\text{К}} s^2 + \chi_S^2 s^2) + K_{\beta\sigma}(\chi_S^2 s^2 - \chi_T^2 s^2)] > 0; \quad (82)$$

$$a_1 = 3b_3 + b_2 - b_1 - 3b_0 = 8[4\sigma\chi_{\beta\sigma}^2 s^2\chi_{\text{К}} s^2 + (1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2 s^2)\chi_S^2 s^2 - K_{\beta\sigma}(\chi_S^2 s^2 - \chi_T^2 s^2)]. \quad (83)$$

Строгая положительность (82) следует из (26), (6) и (79).

В случае однократного использования неявной теплопроводности имеет место следующий упрощенный аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Нестрогая устойчивость системы линейных разностных уравнений (73) эквивалентна нестрогой устойчивости корней характеристического кубического уравнения (74) с коэффициентами (75)–(78) для всех $s \in (0, 1]$. Считаем, что выполнены условия (6), (26) и (53). Предполагаем, что неявная теплопроводность учитывается только в одном уравнении для внутренней энергии на втором этапе:*

$$\beta = 0. \quad (84)$$

Тогда для нестрогой устойчивости разностной схемы (73) необходимо выполнение неравенства

$$2\sigma\chi_S = 2\sigma\frac{\tau\rho c_S}{\Delta t} \leq 1. \quad (85)$$

Таким образом, условие нестрогой устойчивости (85) при однократном использовании неявной теплопроводности (84) не зависит от изотермической скорости звука c_T и от значения теплового числа Куранта $\chi_{\text{К}}$.

Доказательство теоремы. Из (84) и (79) следует, что $K_{\beta\sigma} = 0$ и $\chi_{\beta\sigma}^2 = \chi_S^2$. Это сильно упрощает формулы (80)–(83). После этого необходимость изэнтропического условия Куранта (85) легко получается применением условий (П5) и (П6) леммы 4 (см. Приложение). Детали опустим, они почти дословно совпадают с аналогичным доказательством необходимости в теореме 1.

Теорема 3. *Устойчивость системы линейных разностных уравнений (73) эквивалентна устойчивости корней характеристического кубического уравнения (74) с коэффициентами (75)–(78) для всех $s \in (0, 1]$. Считаем, что выполнены условия (6), (26) и (53). Неявная теплопроводность учитывается в обоих уравнениях для внутренней энергии, но*

$$0 < \beta \leq 1. \quad (86)$$

1. Для нестрогой устойчивости разностной схемы (73) необходимо выполнение неравенства

$$2\sigma\frac{\tau\rho}{\Delta t}\sqrt{\frac{4\beta\sigma\chi_{\text{К}}c_T^2 + c_S^2}{1 + 4\beta\sigma\chi_{\text{К}}}} \leq 1. \quad (87)$$

2. Обратное, строгое неравенство

$$2\sigma\frac{\tau\rho}{\Delta t}\sqrt{\frac{4\beta\sigma\chi_{\text{К}}c_T^2 + c_S^2}{1 + 4\beta\sigma\chi_{\text{К}}}} < 1 \quad (88)$$

достаточно для нестрогой устойчивости разностной схемы (73).

Доказательство. Так как $a_2 > 0$ (см. (82)), то при $a_3 \neq 0$ (или $2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2s^2 \neq 1$, см. (80)) необходимые условия (П5) и (П6) нестрогой устойчивости из леммы 4 (см. Приложение) сводятся к неравенствам $a_3 \geq 0$ и $a_0 \geq 0$. Эти два неравенства с учетом (80) и (81) и предположения $2\sigma \geq 1$ сводятся к одному:

$$4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2s^2 \leq 1, \quad \forall s \in (0, 1]. \quad (89)$$

В случае $2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2s^2 = 1$ ($a_3 = 0$) легко проверяется, что неравенства (П9) из второй части леммы 4 после подстановки (75)–(77) не изменяют условия (89). Похожими рассуждениями получаем, что два неравенства (П10) и (П11) из леммы 5 (см. Приложение) при $a_2 > 0$ и $2\sigma \geq 1$ эквивалентны строгому аналогу условия (89). (89) эквивалентно (87), а строгий аналог (89) эквивалентен (88), так как максимум $\chi_{\beta\sigma}^2s^2$ достигается при $s = 1$:

$$\chi_{\beta\sigma}^2s^2 = \left[\frac{\chi_T^2}{4\beta\sigma\chi_K} (4\beta\sigma\chi_Ks^2 + 1) - \frac{\chi_S^2 - \chi_T^2}{4\beta\sigma\chi_K} \frac{1}{4\beta\sigma\chi_Ks^2 + 1} \right] + \frac{\chi_S^2 - 2\chi_T^2}{4\beta\sigma\chi_K}.$$

Для проверки (П12) из леммы 5 при выполнении (88) будем численно проверять положительность значений функции из условия (П12)

$$\begin{aligned} f_\sigma(X, Y, Z, W) &= a_1a_2 - a_0a_3 = 8 [4\sigma\chi_{\beta\sigma}^2s^2\chi_Ks^2 + (1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2s^2)\chi_S^2s^2 - K_{\beta\sigma}(\chi_S^2s^2 - \chi_T^2s^2)] \times \\ &\times 8 [2\chi_Ks^2 + 2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2s^2 - (1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2s^2)(2\chi_T^2s^2\chi_Ks^2 + \chi_S^2s^2) + K_{\beta\sigma}(\chi_S^2s^2 - \chi_T^2s^2)] - \\ &- 128(1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2s^2)(1 - 2\sigma\chi_{\beta\sigma}^2s^2)(1 + 2\chi_Ks^2)\chi_T^2s^2\chi_Ks^2. \end{aligned} \quad (90)$$

Функция (90) зависит от величин β , χ_Ks^2 , $\chi_T^2s^2$, $\chi_{\beta\sigma}^2s^2$, $\chi_S^2s^2$, $K_{\beta\sigma}$, которые удовлетворяют неравенствам (см. (6), (79), (86) и строгий аналог (89))

$$0 < \beta \leq 1; \quad \chi_Ks^2 > 0; \quad 0 < \chi_T^2s^2 < \chi_{\beta\sigma}^2s^2 < \chi_S^2s^2; \quad 0 < 1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2s^2 < 1; \quad 0 < K_{\beta\sigma} < 1.$$

Эти шесть величин подчинены двум уравнениям (79). В качестве независимых взяты следующие четыре величины, полностью заполняющие единичный четырехмерный куб:

$$0 < X = 1 - 4\sigma^2\chi_{\beta\sigma}^2s^2 < 1; \quad 0 < Y = \frac{\chi_T^2s^2}{\chi_{\beta\sigma}^2s^2} < 1; \quad 0 < Z = K_{\beta\sigma} < 1; \quad 0 < W = \beta \leq 1. \quad (91)$$

Проверка строгой положительности функции $f_\sigma(X, Y, Z, W)$ во всех точках внутри четырехмерного единичного куба осуществлена численно (вычисления и визуализация выполнены с помощью пакета программ ORIGIN 6.1 [15]). С помощью равномерно распределенного на единичном отрезке датчика случайных чисел внутренность четырехмерного единичного куба сначала относительно равномерно была заполнена точками с общим числом $2 \cdot 10^5$. Еще по 10^5 точек было размещено в окрестностях (в слоях толщиной 10^{-2}) каждой из восьми граней (трехмерных кубиков $X = 0$, $X = 1$, $Y = 0$, $Y = 1$, $Z = 0$, $Z = 1$, $W = 0$, $W = 1$) единичного куба со сгущением к границам четырехмерного единичного куба. В итоге взято 10^6 точек строго внутри единичного куба. Для каждой такой точки по формулам (90), (91) вычислено значение функции $f_\sigma(X, Y, Z, W)$, причем дважды. Второй раз в описанном наборе точек вычислены значения функции $f_\sigma(X, Y, Z, W)|_{W=1}$, чтобы гарантировать надежность вычислений для $\beta = 1$.

Такие вычисления были проведены для значений σ из отрезка $0,5 \leq \sigma \leq 1$ с шагом по σ , равным 0,05, и для ряда значений $\sigma > 1$, вплоть до значения $\sigma = 100$. Все вычисленные таким способом точки отображаются графически на плоскости (X, f_σ) . Пример такого графика показан на рис. 3.

Абсолютно все точки функции $f_\sigma(X, Y, Z, W)$, использованные в счете, для всех опробованных значений $\sigma \geq 0,5$ лежат в верхней полуплоскости. Полученные численные результаты доказывают строгую положительность функции $f_\sigma(X, Y, Z, W)$ как внутри четырехмерного единичного куба, так и на его трехмерной грани $W = \beta = 1$. Это завершает доказательство теоремы 3.

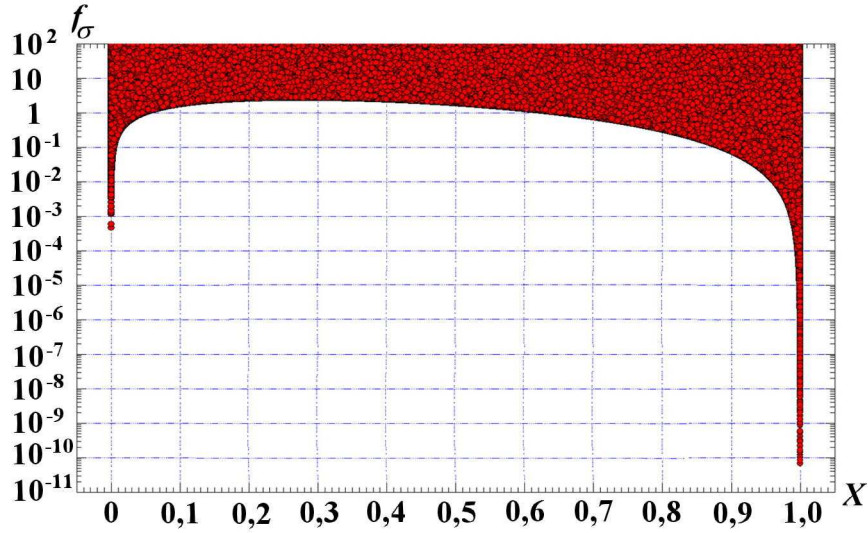


Рис. 3. Значения функции $f_\sigma(X, Y, Z, W)$ из (90), (91) при $\sigma = 0,7$

Следствие. При выполнении условий теоремы 3 наибольший шаг по времени, обеспечивающий нестрогую устойчивость разностной схемы (73), получается, если параметр β (коэффициент учета неявной теплопроводности в уравнении энергии первого этапа (69) или (64)) в условиях (87) и (88) взять равным

$$\beta = 1.$$

Тогда шаг по времени, достаточный для нестрогой устойчивости разностной схемы, определяется неравенством

$$2\sigma \frac{\tau \rho c_{\text{разн}}}{\Delta m} < 1, \quad c_{\text{разн}} = \sqrt{\frac{4\sigma \chi_K c_T^2 + c_S^2}{4\sigma \chi_K + 1}}. \quad (92)$$

Доказательство. Для максимизации τ надо минимизировать подкоренное выражение (88) $\frac{4\beta\sigma\chi_K c_T^2 + c_S^2}{1 + 4\beta\sigma\chi_K} = c_T^2 + \frac{c_S^2 - c_T^2}{1 + 4\beta\sigma\chi_K}$, а для этого надо максимизировать $1 + 4\beta\sigma\chi_K$. Отсюда с учетом (86) получаем наилучшее значение $\beta = 1$, что завершает доказательство следствия.

Вычисления, аналогичные выполненным для проверки положительности (90), (91), были проведены для ряда значений $\beta > 1$. При этом вблизи грани $X = 0$ нарушалось условие (П12) леммы 5 (см. Приложение). Анализ показал, что при $\beta > 1$ для обеспечения устойчивости надо уменьшать правую часть в неравенствах (87) и (88), что в целом приводит к уменьшению допустимого шага по времени. Поэтому вариант $\beta = 1$ дает наилучшие условия устойчивости (92).

Для сравнения разностной скорости звука из (92) с фазовой скоростью (8) дисперсионного уравнения (7) возьмем τ из изэнтропического условия Куранта $2\sigma \frac{\tau \rho c_S}{\Delta m} = 1$ и введем относительное тепловое число Куранта k формулой $\chi_K = \frac{\tau Q}{\Delta m^2} = \frac{k}{2\sigma\pi}$. Тогда из (92) имеем $\varepsilon_{\text{разн}} = \frac{c_{\text{разн}}}{c_S} = \sqrt{\frac{2k\varepsilon_T^2 + \pi}{2k + \pi}}$. В (7) возьмем длину волны, равную двум ячейкам сетки $\xi = \frac{\pi}{\Delta m} = \frac{ka_S}{Q}$.

На рис. 4 приведены зависимости относительных разностных скоростей звука $\varepsilon_{\text{разн}}$ и относительных фазовых скоростей $\varepsilon(k) = a(k)/a_S$ для нескольких значений $\varepsilon_T = a_T/a_S$, где фазовые скорости получены решением (7). Разностная скорость звука с ростом теплового числа Куранта приближается сверху к изотермической скорости звука. Надежная 10%-ная близость достигается для значений теплового числа Куранта порядка сотни.

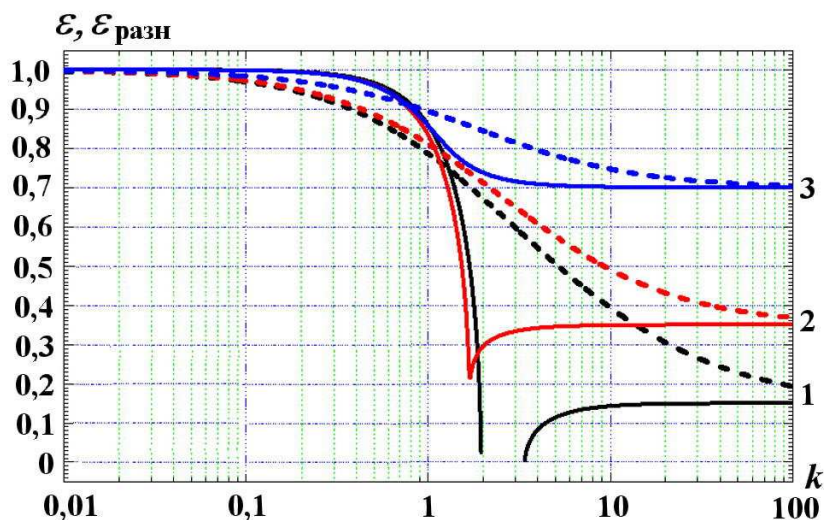


Рис. 4. Сравнение зависимостей от относительного теплового числа Куранта k относительной фазовой скорости ε (—) и относительной разностной скорости звука $\varepsilon_{\text{разн}}$ (---) для нескольких значений $\varepsilon_T = c_T/c_S$: 1 — $\varepsilon_T = 0,15$; 2 — $\varepsilon_T = 0,35$; 3 — $\varepsilon_T = 0,7$

Заключение

Показано, что условия устойчивости двухэтапной разностной схемы счета газовой динамики в переменных Лагранжа зависят от способа учета неявной теплопроводности. В большинстве способов условия устойчивости типа Куранта зависят только от изэнтропической скорости звука и не зависят от наличия неявной теплопроводности.

Только в случае двукратного решения уравнений неявной теплопроводности на одном шаге по времени (в двух газодинамических уравнениях энергии) получены необходимые и достаточные условия, в которых присутствует непрерывный переход от изэнтропической скорости звука к изотермической при увеличении теплового числа Куранта, что увеличивает допустимый шаг по времени при отличии изотермической скорости звука от изэнтропической.

Представляется интересным изучить влияние разных способов учета неявной теплопроводности на устойчивость других явных разностных схем счета газовой динамики в переменных Лагранжа.

Приложение. Вспомогательные результаты, связанные со спектральным методом исследования устойчивости

Приведем здесь с точными формулировками несколько результатов технического характера (возможно, известных), использованных в данной работе.

Определение 1. Разностная схема называется ρ -устойчивой с некоторой вещественной положительной постоянной $\rho > 0$, если все собственные значения λ ее оператора перехода удовлетворяют условию $|\lambda| < \rho$. Тогда говорим, что корни характеристического многочлена оператора перехода разностной схемы удовлетворяют условию ρ -устойчивости. При $\rho = 1$ ρ -устойчивая схема называется строго устойчивой.

В практике газодинамических разностных схем понятие строгой устойчивости не требуется. Для линейных моделей (уравнений линейной акустики) возмущения не затухают, что противоречит понятию строгой устойчивости.

Определение 2. Разностная схема называется нестрогой устойчивой, если все собственные значения λ ее оператора перехода не превышают по абсолютной величине единицы: $|\lambda| \leq 1$. В

этом случае будем говорить, что корни характеристического многочлена оператора перехода разностной схемы удовлетворяют условию нестрогой устойчивости.

Критерий Рауса—Гурвица [10] не дает условий нестрогой устойчивости. Но с его помощью можно получить условия ρ -устойчивости для $\rho = 1 + \varepsilon$ при всех достаточно малых положительных ε и затем сделать предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ (такого рода пример приведен в [16]). Отметим, что имеются примеры, когда простая замена в условиях строгой устойчивости строгих неравенств нестрогими дает неправильные условия нестрогой устойчивости.

Лемма 2. *Квадратное уравнение $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ с вещественными коэффициентами a, b и c и строго положительным старшим коэффициентом $a > 0$ имеет корни λ только в замкнутой единичной окружности $|\lambda| \leq 1$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три нестрогих неравенства:*

$$a - c \geq 0; a + 2b + c \geq 0; a - 2b + c \geq 0. \quad (\text{П1})$$

Доказательство сводится к простому анализу явных формул для вещественных или комплексных корней квадратного уравнения. Условие строгой устойчивости $|\lambda| < 1$ в виде строгих аналогов неравенств (П1) дано в [17].

Перейдем к нестрогой устойчивости корней характеристических уравнений третьей степени с вещественными коэффициентами. Для их получения нужны условия ρ -устойчивости.

Лемма 3. *Пусть вещественные коэффициенты кубического уравнения*

$$b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0 \quad (\text{П2})$$

удовлетворяют условию

$$a_3 = b_3 - b_2 + b_1 - b_0 \neq 0. \quad (\text{П3})$$

Тогда для некоторого достаточно малого положительного ε_0 и любого $\rho = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, уравнение (П2) имеет все корни λ строго внутри окружности $|\lambda| < \rho$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие три неравенства:

$$\begin{aligned} (b_3\rho^3 - b_2\rho^2 + b_1\rho - b_0) (3b_3\rho^3 - b_2\rho^2 - b_1\rho + 3b_0) &> 0; \\ (b_3\rho^3 - b_2\rho^2 + b_1\rho - b_0) (b_3\rho^3 + b_2\rho^2 + b_1\rho + b_0) &> 0; \\ b_3\rho^4 (b_3\rho^2 - b_1) - b_0 (b_0 - b_2\rho^2) &> 0. \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Доказательство. После замены $\lambda = \rho \frac{1+x}{1-x}$ (отображение левой полуплоскости внутрь круга) получим кубическое уравнение для x (из (П3) следует, что старший коэффициент этого уравнения ненулевой), применив к которому критерий Рауса—Гурвица [10], получим необходимые и достаточные условия ρ -устойчивости в виде набора (П4).

Лемма 4. 1. *Пусть вещественные коэффициенты кубического уравнения (П2) удовлетворяют условию (П3). Чтобы корни λ уравнения (П2) удовлетворяли условию нестрогой устойчивости $|\lambda| \leq 1$, необходимо одновременное выполнение трех неравенств:*

$$a_3 a_2 = (b_3 - b_2 + b_1 - b_0) (3b_3 - b_2 - b_1 + 3b_0) \geq 0; \quad (\text{П5})$$

$$a_3 a_0 = (b_3 - b_2 + b_1 - b_0) (b_3 + b_2 + b_1 + b_0) \geq 0; \quad (\text{П6})$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 8b_3 (b_3 - b_1) - 8b_0 (b_0 - b_2) \geq 0. \quad (\text{П7})$$

2. Пусть коэффициенты кубического уравнения (П2) удовлетворяют условию

$$a_3 = b_3 - b_2 + b_1 - b_0 = 0. \quad (\text{П8})$$

Чтобы при этом корни λ уравнения (П2) удовлетворяли условию нестрогой устойчивости $|\lambda| \leq 1$, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих трех неравенств:

$$b_2 - b_1 \geq 0; \quad b_3 + b_1 \geq 0; \quad 3b_3 - 2b_2 + b_1 \geq 0. \quad (\text{П9})$$

Доказательство. Отрицательность любой из трех величин (П5)–(П7) нарушает соответствующее неравенство из набора (П4), что доказывает первую часть леммы.

Из (П8) следует, что $\lambda = -1$ является корнем уравнения (П2). Применив к оставшемуся квадратному уравнению лемму 2, получим условия (П9), что доказывает вторую часть леммы 4.

Лемма 5. Чтобы все корни λ уравнения $b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$ удовлетворяли условию нестрогой устойчивости $|\lambda| \leq 1$, достаточно одновременного выполнения трех неравенств:

$$a_3 a_2 = (b_3 - b_2 + b_1 - b_0)(3b_3 - b_2 - b_1 + 3b_0) > 0; \quad (\text{П10})$$

$$a_3 a_0 = (b_3 - b_2 + b_1 - b_0)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0) > 0; \quad (\text{П11})$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 8b_3(b_3 - b_1) - 8b_0(b_0 - b_2) > 0. \quad (\text{П12})$$

Доказательство. Если выполнены строгие неравенства (П10)–(П12), то для некоторого достаточно малого положительного ε_0 соответствующие выражения в неравенствах (П4) будут строго положительны для любого $\rho = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Отсюда с учетом леммы 3 получаем $|\lambda| \leq 1$, что завершает доказательство леммы 5.

Лемма 6. Многочлен $y = ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами при $a > 0$ и $c > 0$ будет принимать на положительной полуоси $x > 0$ положительные (неотрицательные) значения тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$b > -2\sqrt{ac}$$

или соответственно его нестрогий аналог.

Доказательство леммы 6 основано на тождестве

$$ax^2 + bx + c = (x\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + x(b + 2\sqrt{ac}).$$

Список литературы

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
2. Bondarenko Yu. A., Zmushko V. V., Stenin A. M. Local and nonlocal stability conditions of difference schemes for calculating gas-dynamics problems in Lagrangian coordinates // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. by N. N. Yanenko and Yu. I. Shokin. M.: MIR, 1984. P. 245–264.
3. Терстон Р. Распространение волн в жидкостях и в твердых телах // Физическая акустика. Т. 1, ч. А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. С. 13–139.
4. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Физматлит, 1973.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1963.
6. Turkel E. Phase error and stability of second order methods for hyperbolic problems. I // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 15, No 2. P. 226–250.

7. *Turkel E., Gottlieb D.* Phase error and stability of second order methods for hyperbolic problems. II // *J. Comp. Phys.* 1974. Vol. 15, No 2. P. 251–265.
8. *Шокин Ю. И.* К анализу диссипации и дисперсии разностных схем // *Числ. методы мех. спл. среды.* 1976. Т. 7, № 7. С. 131–141.
9. *Макаренко А. С., Москальков М. Н.* О дисперсии локально-одномерных схем для уравнения переноса // Там же. 1981. Т. 12, № 2. С. 64–70.
10. *Ланкастер Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 1982.
11. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1955.
12. *Ладагин В. К., Пастушенко А. М.* Об одной схеме расчета газодинамических движений // *Числ. методы мех. спл. среды.* 1977. Т. 8, № 2. С. 66–72.
13. *Zmushko V. V.* Computation of convective flows and their realization in MIMOZA code // *Proc. of the Int. Workshop. "New Model and Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media."* Oxford, September 15–19, 1997. Oxford, 1998. Vol. 1. P. 423–430.
14. *Шумкина Е. Н., Бабанов А. В.* Решение двумерного уравнения теплопроводности в методике МИМОЗА с формированием общей системы линейных алгебраических уравнений по всей задаче // "Молодежь в науке". Сб. докл. IX науч.-тех. конф. Саров, 26–28 октября 2010 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. С. 159–166.
15. *Богданов А. А.* Визуализация данных в Microsoft Origin. М.: Альтекс-А, 2003.
16. *Бондаренко Ю. А.* Устойчивость пятислойных и семислойных обратимых по времени операторных разностных схем // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1992. Вып. 3. С. 28–36.
17. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Физматлит, 1973.

Статья поступила в редакцию 16.02.15.

EFFECT OF THE WAY TO ACCOUNT FOR HEAT TRANSFER ON THE CALCULATION STABILITY OF TWO-PHASE GAS-DYNAMIC DIFFERENCE SCHEME / Yu. A. Bondarenko (FSUE RFNC-VNIIEF, Sarov, Nizhny Novgorod region).

The two-phase difference gas-dynamic scheme with Lagrangian variables is studied with account for heat transfer. We obtained that the conditions for the Courant-type time-step strongly depend on the way the implicit heat conductivity is used in the difference scheme. In major cases the condition of stability is determined by the isentropic speed of sound. We offer a modification with account for the implicit heat conductivity in two energy equations. Continuous transition from the isentropic speed of sound to the isothermal one at the Courant thermal number increase is present in the conditions of the modified scheme stability.

Keywords: gas dynamics with thermal conductivity, difference schemes, splitting in terms of physical processes, difference scheme stability, isentropic speed of sound, isothermal speed of sound, thermal sound dispersion.
