

УДК 539.4

О КОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ С НЕНЬЮТОНОВОЙ ФОРМОЙ ВЯЗКОСТИ

М. А. Гусева, В. Н. Софронов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассмотрены проблемы, возникающие при численной реализации моделей вязкоупругопластичности. В данном классе моделей в качестве вязкого элемента выбрана неньютонова среда. Для таких сред коэффициент вязкости зависит не только от термодинамических параметров, но и от приведенной скорости сдвиговых деформаций. Предпринята попытка ответить на вопрос, насколько произвольной может быть эта зависимость.

Ключевые слова: модели вязкоупругопластичности, неньютоновы модели вязкости, диссипативные функции, условие эволюционности, стационарные структуры.

Введение

В современных технологиях часто используются интенсивные нагрузки, превышающие предел упругости материалов, что вызывает неупругие (или пластические) деформации твердых тел. В моделях данного класса часто пренебрегают эффектами вязкости и рассматривают деформации, не зависящие от скорости деформирования. По этой причине в ряде случаев возникают значительные расхождения количественного характера между расчетом и экспериментом. Примером являются неудовлетворительные попытки согласования расчетных и экспериментальных данных по затуханию амплитуды упругопластической ударной волны при ее взаимодействии с догоняющей волной разгрузки в рамках моделей идеальной пластичности [1, 2] (см. также обзор [3]). На влияние вязкости при высокоскоростном течении указывают эксперименты по взрывному деформированию цилиндрических оболочек [4].

Потребность в детальном численном исследовании рассматриваемой здесь задачи возникла в ходе выполнения работы по реализации и тестированию вязкоупругопластической модели прочности металлов. Отличительной особенностью данной модели является ее сильная нелинейность. В частности, предполагается, что коэффициент вязкости μ зависит не только от термодинамических параметров, но и от приведенной скорости деформирования $\dot{\zeta} = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}/3}$ (квадратичного инварианта девиатора $\dot{\epsilon}_{ij}$). Эта зависимость такова, что производная $\left(\mu\left(\dot{\zeta}\right)\dot{\zeta}\right)'_{\dot{\zeta}}$ при конечных значениях $\dot{\zeta}$ меняет знак и лишь при $\dot{\zeta} \rightarrow \infty$ становится асимптотически положительной. Смена знака означает смену направления параболичности соответствующих диффузионных уравнений [5], что приводит к появлению неустойчивости по отношению к малым изменениям начальных данных. Результаты расчетов показали сильную зависимость численного решения от малых параметров, определяемых искусственной либо аппроксимационной вязкостью, а также отсутствие предельного перехода при измельчении сетки ($\Delta t \rightarrow 0$). В настоящей работе определены ограничения на параметры модели, при которых для данной формы вязкости гарантируется устойчивость численного счета.

Уравнения, меняющие направление параболичности, принадлежат к нелинейным уравнениям переменного типа. Исследованию и систематизации таких уравнений посвящена монография

Н. Н. Яненко [5]. В этой работе для моделирования турбулентности предложено использовать следующее обобщение уравнения Бюргера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right),$$

где функция $\omega(u'_x)$ играет роль вязкого давления. В отличие от классического уравнения Бюргера здесь предполагается, что производная меняет знак $\omega'_u < 0$ в некоторой ограниченной области аргумента $\dot{u} = u'_x < \Upsilon$. Выбор данного уравнения для исследования турбулентности обусловлен тем, что аналогичные процессы контргradientной диффузии возникают в турбулентных потоках.

Следует отметить, что знакопеременность производной $\left(\mu \left(\dot{\zeta} \right) \dot{\zeta} \right)'_{\dot{\zeta}}$ в моделях вязкопластичности часто возникает вследствие выбора соответствующих аппроксимационных формул для вычисления коэффициента $\mu \left(\dot{\zeta} \right)$ и не имеет никакого физического содержания (в отличие от немонотонности функции $\omega(u'_x)$). Имеется много общего в поведении решений модельного уравнения Бюргера и уравнений физической вязкости металлов. В обоих случаях приходится решать схожие проблемы стабилизации численного решения из-за смены направления параболичности.

Уравнения вязкоупругопластической модели

Для учета процессов вязкой диссипации будем использовать реологическую модель Кельвина, схематично изображенную на рис. 1. Последовательное соединение элементов эквивалентно выполнению условия аддитивности деформаций, параллельное соединение — выполнению условия аддитивности напряжений.

Все существующие модели упругопластического деформирования содержат уравнения трех видов, а именно:

- уравнения согласования, эквивалентные условию аддитивности для девиаторов полных (ε_{ij}), упругих (ε_{ij}^e) и пластических (ε_{ij}^p) деформаций: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$;
- закон Гука: $s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e$;
- закон течения, связывающий пластическую деформацию с напряжениями.

Ассоциированный закон пластического течения определяет направление вектора приращений пластических деформаций в сторону внешней нормали к поверхности текучести:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = \begin{cases} \Lambda' \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}} = \frac{3s_{ij}}{2Y_S^2} \sum_{k,l} s_{kl} \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{dt}, & \Phi \geq 0; \\ 0, & \Phi < 0. \end{cases} \quad (1)$$

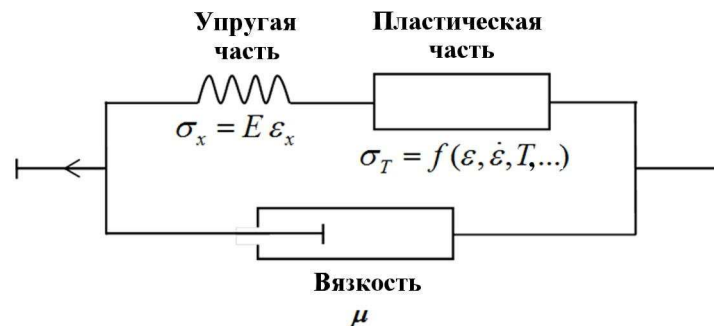


Рис. 1. Реологическая модель Кельвина учета вязких свойств материала

В используемой авторами модели [6] поверхность текучести задана в виде

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} - Y_S(\chi_p, T, P) = 0, \quad (2)$$

$$Y_S(\chi_p, T, P) = Y_0 Y_1(\chi_p, T) Y_2(P) Y_3(T), \quad Y_1(\chi_p, T) = 1 + a_1(1 - a_2\bar{T}^{a_3})(1 - a_4 \exp(-a_5\chi_p)), \quad (3)$$

$$Y_2(P) = 1 + (a_6 P)^{a_7}, \quad Y_3(T) = (1 - a_8\bar{T}^{a_9})^{a_{10}}, \quad \chi_p = \int \sqrt{\frac{2}{3} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt}} dt, \quad (4)$$

где Y_0, a_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) — параметры модели. Здесь и в дальнейшем $\bar{T} = T/T_m$ — приведенная температура, T_m — температура плавления. Зависимость T_m от сжатия δ определяется законом Линдемана:

$$\frac{d \ln T_m}{d \ln \delta} = 2 \left(\Gamma(\delta) - \frac{2}{3} \right), \quad \Gamma(\delta) = \Gamma_\infty + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_\infty}{\delta M}. \quad (5)$$

Уравнение (5) решается при начальных условиях $T_m(\delta_{m0}) = T_{m0}$, где δ_{m0} — относительная плотность вещества при $T = T_{m0}$ (начало плавления), T_{m0} — температура плавления при $P \sim 0$; $\Gamma_0, \Gamma_\infty, M$ — параметры модели.

Для реологической вязкоупругопластической модели Кельвина к перечисленному выше списку замыкающих соотношений следует добавить уравнения для вязких напряжений. В соответствии с рис. 1 полный тензор напряжений является суммой упругопластического и вязкого тензоров: $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + s_{ij} + s_{ij}^\mu$. Вязкая составляющая девиатора напряжений определяется следующим соотношением:

$$s_{ij}^\mu = 2\mu \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right), \quad (6)$$

где μ — коэффициент первой вязкости (вязкости на сдвиговых деформациях).

Предполагается, что коэффициент вязкости μ зависит не только от термодинамических параметров, но и от квадратичного инварианта тензора скоростей сдвигового деформирования $\dot{\zeta} = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}/3}$. Для определенности рассмотрим модель неньютоновой среды, представленную в [7], с параметрами из табл. 1:

$$\mu(\dot{\zeta}) = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \dot{\zeta}\varphi(\dot{\zeta})/\dot{\zeta}_0}}; \quad \varphi(\dot{\zeta}) = \frac{1 + \varphi_{\max} \left(\dot{\zeta}/\dot{\zeta}_S \right)^{m_*}}{1 + \left(\dot{\zeta}/\dot{\zeta}_S \right)^{m_*}}. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем используется следующая система единиц измерения: L — см; t — 10^{-5} с; m — г; T — °К. Для вспомогательных величин: u — км/с; ρ — г/см³; P — ГПа; E — кДж/г; μ — ГПа · 10^{-5} с; $\dot{\varepsilon}$ — 10^5 с⁻¹.

Таблица 1

Параметры модели вязкости [7]

$\mu_0, \text{ГПа} \cdot 10^{-5} \text{ с}$	φ_{\max}	m_*	$\dot{\zeta}_0, 10^{-5} \text{ с}$	$\dot{\zeta}_S, 10^{-5} \text{ с}$
127,5	4 000	2	0,0007	100

Термодинамика вязкопластического деформирования.

Условия выпуклости диссипативной функции для вязких напряжений

Для описания процессов динамического деформирования сплошной среды используются основные соотношения физики, выражающие законы сохранения массы, импульса, энергии, которые замыкаются связями девиатора напряжений с термодинамическими и кинематическими параметрами

среды. Наличие вязкого элемента в модели Кельвина приводит к корректировке уравнений движения и энергии за счет добавления слагаемых, определяющих вязкий перенос импульса и вязкую диссипацию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \\ \rho \frac{du_i}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial s_{ik}^\mu}{\partial x_k}; \\ \rho \frac{dE}{dt} &= \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + s_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + s_{ij}^\mu \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следствием системы (8) является следующее уравнение для роста энтропии:

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{s_{ij}}{\rho} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} + \frac{s_{ij}^\mu}{\rho} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что для необратимого процесса вязкой и пластической диссипации обобщенными термодинамическими силами являются напряжения s_{ij}/ρ , s_{ij}^μ/ρ , а термодинамическими потоками — скорости деформирования $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$. В соответствии с принципом Онзагера о существовании скалярного потенциала определим диссипативные функции для пластической и вязкой диссипации [8, 9]. Потенциалы являются функциями термодинамических потоков. В действительности имеет место зависимость этих функций от квадратичных инвариантов соответствующих тензоров. Термодинамические силы определяются дифференцированием диссипативных потенциалов:

$$\frac{s_{ij}}{\rho} = \frac{\partial \Psi^p(\dot{\chi}_p)}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p}; \quad \frac{s_{ij}^\mu}{\rho} = \frac{\partial \Psi^\mu(\dot{\zeta})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}},$$

где $\dot{\chi}_p = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p/3}$, $\dot{\zeta} = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}/3}$ — квадратичные инварианты тензоров $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$.

Общепринятым является требование выпуклости диссипативных функций относительно потоков. Так, для обеспечения единственности решения ряда динамических задач для жестко- и вязкопластических сред требуется, чтобы отображение $s_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij})$ было монотонно возрастающим [9], что эквивалентно выпуклости вязкой диссипативной функции.

Диссипативная функция, отвечающая за пластическую диссипацию, может быть получена с использованием соотношений теории пластического течения:

$$\Psi^p(\dot{\chi}_p) = \frac{1}{\rho} \int s_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \frac{2}{3\rho} \int \frac{Y_S}{\dot{\chi}_p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{\rho} \int \frac{Y_S}{\dot{\chi}_p} \dot{\chi}_p d\dot{\chi}_p = \frac{1}{\rho} \int Y_S d\dot{\chi}_p.$$

Для моделей идеальной пластичности предел текучести не зависит от скорости пластических деформаций, поэтому для таких моделей $\Psi^p(\dot{\chi}_p)$ является линейной функцией квадратичного инварианта $\dot{\chi}_p$ и перечисленные выше требования будут выполнены. В то же время в некоторых моделях учитывается зависимость предела текучести от параметра $\dot{\chi}_p$. Для выполнения условия выпуклости требуется, чтобы эта зависимость была растущей функцией аргумента $\dot{\chi}_p$.

Диссипативная функция для вязких напряжений с учетом (6) принимает вид

$$\Psi^\mu(\dot{\zeta}) = \frac{1}{\rho} \int s_{ij}^\mu d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\rho} \int 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2\rho} \int 2\mu(\dot{\zeta}) \dot{\zeta} d\dot{\zeta}.$$

Для ньютоновых моделей диссипативный потенциал является квадратичной, а следовательно, выпуклой функцией инварианта $\dot{\zeta}$. В общем случае требование выпуклости функции $\Psi^\mu(\dot{\zeta})$ эквивалентно условию

$$(\mu\dot{\zeta})'_\dot{\zeta} > 0. \quad (10)$$

Исследования показывают, что для выбранной формулы коэффициента вязкости (7) данное условие будет выполнено при следующих ограничениях на параметры модели: $\varphi_{\max} < \varphi_{\max}^*(m_*)$. График функции $\varphi_{\max}^*(m_*)$ изображен на рис. 2. Для стандартного набора параметров (см. табл. 1) ограничение (10) принимает вид $\varphi_{\max} < \varphi_{\max}^*(m_* = 2) = 9,000\,194$. Если $m_* \leq 1$, ограничения на параметр φ_{\max} отсутствуют.

Имеющиеся экспериментальные данные указывают на существенное уменьшение вязкости при скоростях деформирования $\dot{\zeta} \sim 10^6 \div 10^7 \text{ с}^{-1}$. Сглаживающая функция $\varphi(\dot{\zeta}, m_*)$ требуется для плавного перехода функциональной зависимости (7) с параметрами $\mu_0 = 127,5$, $\varphi_{\max} = 1$ при нормальных условиях на функциональную зависимость с параметрами $\mu_0 = 2$, $\varphi_{\max} = 1$ при скоростях деформирования $\dot{\zeta} \sim 10^6 \div 10^7 \text{ с}^{-1}$ (рис. 3). В принципе, функция $\varphi(\dot{\zeta}, m_*)$ может быть выбрана достаточно произвольно. На рис. 3 представлены итоговые зависимости коэффициента вязкости от скорости деформирования для двух значений параметра: $m_* = 2$ и $m_* = 1$. Второму значению соответствует выпуклая функция диссипативности. Именно для этого варианта возможно получение устойчивых численных решений.

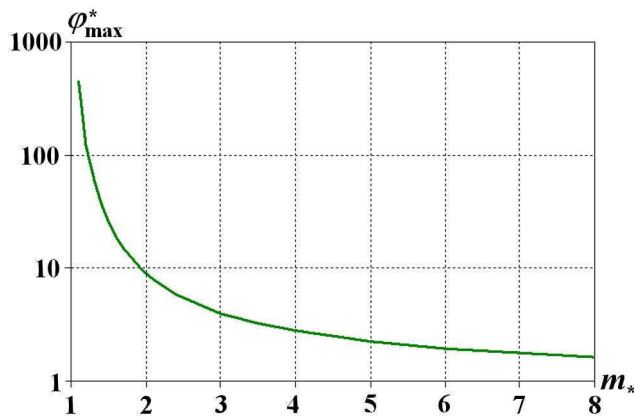


Рис. 2. Зависимость порогового значения φ_{\max}^* от параметра модели m_*

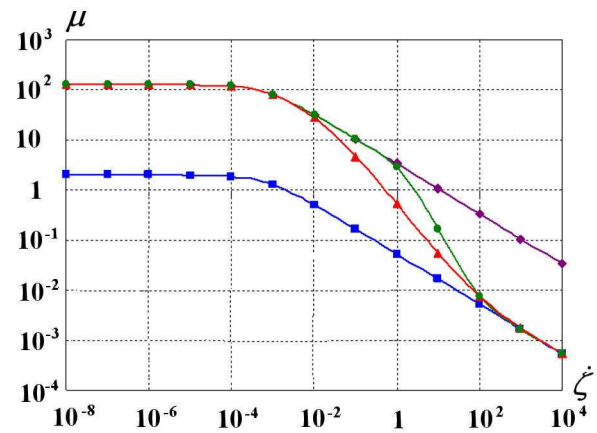


Рис. 3. Зависимости коэффициента вязкости от скорости деформирования: \blacklozenge — $\mu_0 = 127,5$; $\varphi_{\max} = 1$; \blacksquare — $\mu_0 = 2$; $\varphi_{\max} = 1$; \blacktriangle — $\mu_0 = 127,5$; $\varphi_{\max} = 4000$; $m_* = 2$; \bullet — $\mu_0 = 127,5$; $\varphi_{\max} = 4000$; $m_* = 1$

Условие эволюционности

В этом разделе выясним, какие условия следует накладывать на коэффициенты вязкости для получения устойчивых численных решений. Ограничимся рассмотрением плоских одномерных течений. В этом случае ненулевые компоненты девиаторов s_{ij} , s_{ij}^μ , $\dot{\epsilon}_{ij}$ и квадратичный инвариант $\dot{\zeta}$ принимают вид

$$s_{11} = -2s_{22} = -2s_{33} = P - P_r = -\frac{2}{3}(P_r - P_\varphi); \quad s_{11}^\mu = -2s_{22}^\mu = -2s_{33}^\mu = \frac{4\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4\mu}{3V} \frac{\partial u}{\partial m}; \quad (11)$$

$$\dot{\epsilon}_{11} = -2\dot{\epsilon}_{22} = -2\dot{\epsilon}_{33} = \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2}{3V} \frac{\partial u}{\partial m}; \quad \dot{\zeta} = \frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| = \frac{2}{3V} \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right|, \quad (12)$$

где $V = 1/\rho$ — удельный объем.

С учетом (11), (12) система (8) запишется в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial r};$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{\partial (P_r - P_\phi)}{\partial r} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right]; \\ \rho \frac{dE}{dt} &= \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2(P_r - P_\phi)}{3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2.\end{aligned}\quad (13)$$

Для исследования корректности неньютоновых моделей вязкости рассмотрим среду с вязким элементом и баротропным уравнением состояния $P(\delta) = \rho C_0^2 (\delta^n - 1)/n$. Эффектами упругости и пластичности пренебрегаем. При использовании баротропного уравнения состояния уравнение энергии выпадает из рассмотрения.

Система дифференциальных уравнений называется эволюционной, если задача Коши для нее корректна [10]. В этом случае малым возмущениям начальных данных при $t = 0$ соответствуют малые возмущения решения при $t > 0$. Условия эволюционности могут быть получены для линеаризованной системы

$$\frac{du}{dt} = -V \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{4}{3} V \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{2}{3} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{C_W^2}{V} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{4}{3} (\mu \dot{\zeta})'_\zeta V \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}; \quad \frac{dV}{dt} = V \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (14)$$

где $C_W^2 = \frac{dP}{d\rho}$ — адиабатическая скорость звука.

Пусть начальные данные заданы в виде гармонических возмущений. Определим эволюцию этих возмущений на частных решениях вида

$$u = \tilde{u} e^{i(\lambda t + kr)}; \quad V = \tilde{V} e^{i(\lambda t + kr)},$$

где $(|\tilde{u}|, |\tilde{V}|)$ — конечная и ненулевая амплитуда начальных возмущений; $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$. Решив уравнения (14) при "замороженных" коэффициентах, получим следующую связь частоты λ с волновым числом k :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 (\mu \dot{\zeta})'_\zeta V k^2 i}{3} \pm \sqrt{- \left(\frac{2 (\mu \dot{\zeta})'_\zeta V k^2}{3} \right)^2 + C_W^2 k^2}.$$

Для коротковолновых возмущений (при $k \rightarrow \infty$) ненулевой корень принимает значение $\lambda = 4 (\mu \dot{\zeta})'_\zeta V k^2 i / 3$. Таким образом, условие эволюционности (отсутствия роста начальных возмущений) $\text{Im}(\lambda) > 0$ будет выполнено тогда и только тогда, когда во всей области течения диссипативная функция строго выпукла: $(\mu \dot{\zeta})'_\zeta > 0$.

Наличие в численных расчетах областей невыпуклости означает рост возмущений. Однако предсказать сценарии развития этих возмущений не представляется возможным ввиду того, что с их ростом начинают проявляться нелинейные свойства уравнений.

Модели, нарушающие условие эволюционности, должны быть исключены из рассмотрения. Тем не менее выясним, может ли быть получена структура стационарной ударной волны в средах с неньютоновской вязкостью общего вида.

О существовании структуры стационарных ударных волн в неньютоновых моделях вязкости. Условие допустимости разрывов

Известна гипотеза о том, что существуют только фронты, имеющие структуру [11]. Эта гипотеза позволила решить проблему единственности ряда задач газовой динамики [12, 13]. Условие допустимости (наличие структуры) означает существование гладкого решения, зависящего от автомодельной переменной $\xi = m - \rho_0 D t$ и принимающего при $\xi \rightarrow \pm \infty$ значения параметров течения перед и за фронтом волны.

При исследовании эффектов физической вязкости всегда предполагается, что сетка выбрана так, что эффектами математической псевдовязкости можно пренебречь. Так как модели с неньютоновой вязкостью могут нарушать условие эволюционности, то математическая псевдовязкость может играть роль регуляризатора исходных некорректных уравнений и тем самым влиять на структуру волны. Выберем математическую вязкость в форме Шульца [14]. Запишем систему (14) в массовых лагранжевых координатах с учетом физической и математической вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial m}; & \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial(P+q)}{\partial m} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial m} \left[\mu \left(\frac{2}{3V} \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right| \right) \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right]; \\ q &= -C_L C_W \frac{\Delta m}{V} \frac{\partial u}{\partial m} + C_K \frac{\Delta m^2}{2V} \left(\frac{\partial u}{\partial m} - \left| \frac{\partial u}{\partial m} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial m}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $C_L = 0,5$ и $C_K = 3$ — коэффициенты линейной и квадратичной псевдовязкости; $\Delta m = \rho \Delta r$ — размер ячейки сетки. Для решения уравнений (15) в виде бегущей волны $F(m, t) = F(\xi)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\rho_0 D V'_\xi &= u'_\xi; \\ -\rho_0 D u'_\xi &= -(P+q)'_\xi + \frac{4}{3} (\mu \rho u'_\xi)'_\xi; \\ q &= -\frac{\Delta m}{V} u'_\xi (C_L C_W - C_K \Delta m u'_\xi) = \rho_0 D \frac{\Delta m}{V} V'_\xi (C_L C_W + C_K \rho_0 D \Delta m V'_\xi) \end{aligned} \quad (16)$$

с граничными условиями на бесконечности

$$\begin{aligned} V(\xi \rightarrow \infty) &= V_0; & V(\xi \rightarrow -\infty) &= V_F; & u(\xi \rightarrow \infty) &= 0; & u(\xi \rightarrow -\infty) &= u_F; \\ V'_\xi(\xi \rightarrow \pm\infty) &= 0; & u'_\xi(\xi \rightarrow \pm\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что для предельных значений выполнены условия Ренкина—Гюгонио: $u_F = \rho_0 D (V_0 - V_F)$, $P_F = P(V_F) = \rho_0 D u_F$.

Интегрируя уравнения (16) с учетом граничных условий, получаем

$$\begin{aligned} u &= \rho_0 D (V_0 - V); \\ \left[C_L C_W \Delta m + C_K \rho_0 D \Delta m^2 V'_\xi + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{2\rho_0 D}{3V} V'_\xi \right) \right] \frac{\rho_0 D V'_\xi}{V} &= (\rho_0 D)^2 (V_0 - V) - (P(V) - P_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Второе уравнение системы (17)

$$\begin{aligned} \Omega(V, V'_\xi) &= \left[C_L C_W \Delta m + C_K \rho_0 D \Delta m^2 V'_\xi + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{2\rho_0 D}{3V} V'_\xi \right) \right] \frac{\rho_0 D V'_\xi}{V} - \\ &- (\rho_0 D)^2 (V_0 - V) + P(V) - P_0 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

не разрешено относительно производной V'_ξ . Для его однозначной разрешимости требуется, чтобы уравнение не имело особых точек [15]. Особые точки — это те точки поверхности $\Omega(V, V'_\xi) = 0$, в которых $\frac{\partial \Omega}{\partial V'_\xi} = \frac{2\rho_0 D}{3V} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\zeta}} = \frac{4\rho_0 D}{3V} \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}} \mu(\dot{\zeta}) \dot{\zeta} = 0$. Обращение в нуль производной $\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\zeta}}$ означает смену знака функции $(\mu \dot{\zeta})'_\xi$. Таким образом, для однозначной разрешимости уравнения (18), а следовательно, для существования стационарной структуры достаточно выполнения условия (10).

Графики функций $V'_\xi(V)$, удовлетворяющих условию $\Omega(V, V'_\xi) = 0$ в отсутствие математической вязкости, изображены на рис. 4 (см. также цветную вкладку). В расчетах использовались параметры вязкости из табл. 1, а также модифицированный набор с заменой одного из параметров

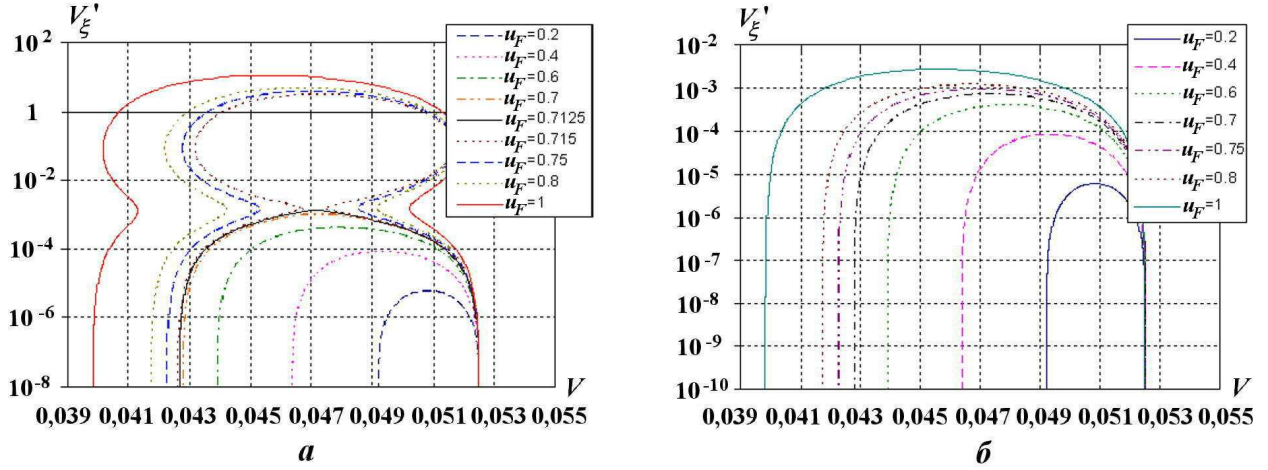


Рис. 4. Графики функций $V'_\xi(V)$, удовлетворяющих условию $\Omega(V, V'_\xi) = 0$ ($C_L = C_K = 0$): $a - \varphi_{\max} = 4000$; $b - \varphi_{\max} = 9$

($\varphi_{\max} = 9$). В этом случае условие выпуклости диссипативной функции (10) выполнено во всей области течения.

Для первого набора параметров стационарная структура существует только для ударных волн с амплитудой $u_F < u_F^* \approx 0,7125$ (см. рис. 4, a). Профили стационарных волн в этом диапазоне амплитуд представлены на рис. 5. Отметим, что с увеличением интенсивности волны уменьшается ширина зоны ударного перехода. Стационарных структур для ударных волн с большей амплитудой не существует, так как в этом случае функция $V'_\xi(V)$ становится многозначной.

Графики функции $V'_\xi(V)$ для второго набора параметров изображены на рис. 4, b . Ввиду того, что для этих параметров функция $(\mu\dot{\zeta})'_\zeta$ строго положительна, уравнение (18) однозначно разрешается относительно производной V'_ξ , и поэтому стационарная структура существует для всех амплитуд ударных волн.

Вывод о наличии ограничений на параметры модели при моделировании стационарных волн подтверждается численными расчетами. Профили массовой скорости для амплитуд ударной волны $u_F = 0,6 < u_F^*$ и $u_F = 0,8 > u_F^*$ представлены на рис. 6, 7 (см. также цветную вкладку). В расчетах использовались параметры вязкости из табл. 1. Стационарная структура существует для ударной волны с амплитудой $u_F = 0,6$. В этом случае численное решение с течением времени приближается к этому автомодельному стационарному решению. Стационарная структура отсутствует в численном расчете ударной волны с амплитудой $u_F = 0,8$. Из рис. 7 следует, что положение разрыва с течением времени отклоняется от стационарного значения $m_F = \rho_0 Dt$.

Для второго набора параметров ($\varphi_{\max} = 9$) ограничений на параметры ударных волн нет — стационарная структура существует для всех амплитуд. Пример такой структуры в численном расчете ($u_F = 0,8$) представлен на рис. 8 (см. также цветную вкладку).

При исследовании допустимости разрывов в расчетах, использующих физическую и математическую вязкости, необходимо учитывать, что псевдовязкость зависит от размера ячеек сетки $\Delta m = \rho_0 X/N_s$ ($X = 50$ — размер счетной области; N_s — число узлов), поэтому при определении условий допустимости требуется учитывать этот дополнительный параметр. Графики функций $V'_\xi(V)$ с использованием псевдовязкости и сетки с $N_s = 25\,000$ изображены на рис. 9, a (см. также цветную вкладку). Из анализа рисунка следует, что, как и ранее, графики функций $V'_\xi(V)$ для различных амплитуд ударных волн можно разделить на две группы топологически эквивалентных кривых, а именно: 1) для которых каждому значению удельного объема V из области определения $V_F < V < V_0$ соответствует ровно одно значение производной $V'_\xi(V)$; 2) для которых данное условие однозначной разрешимости не выполнено. Отметим, что по сравнению с расчетами в отсутствие

псевдовязкости в данном случае несколько увеличивается пороговое значение амплитуды волны u_F^* . Так, для амплитуды волны $u_F = 0,72$ стационарного решения не существует, что подтверждается численными расчетами (рис. 10, см. также цветную вкладку). Здесь стабилизирующая роль псевдовязкости оказывается недостаточной для получения устойчивого численного решения. Парадоксальность ситуации состоит в том, что при полном отключении физической вязкости стационарные решения существуют для любых амплитуд волн.

В расчетах с уменьшенным числом узлов сетки ($N_s = 2500$) имеет место однозначная разрешимость уравнения $\Omega(V, V'_\xi) = 0$ относительно производной V'_ξ (рис. 9, б, см. также цветную вкладку), что означает существование стационарных решений для амплитуд волн из интервала $u_F < 1$ (рис. 11, см. также цветную вкладку).

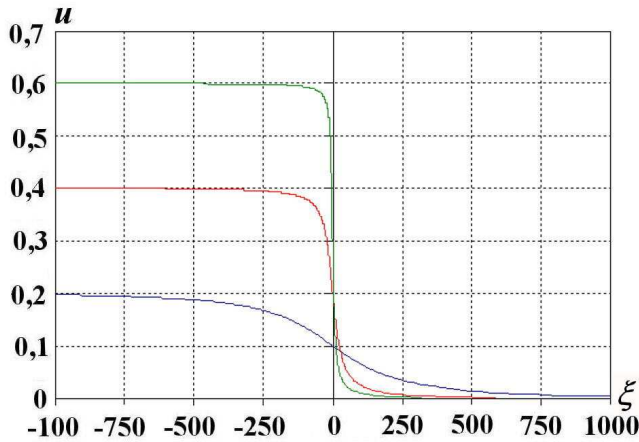


Рис. 5. Стационарные профили ударной волны

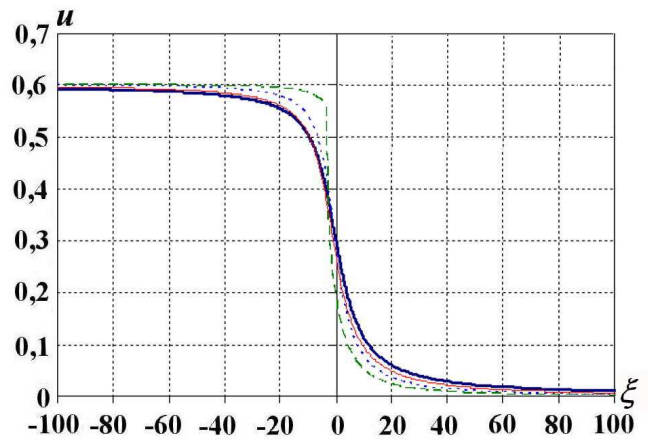


Рис. 6. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой $u_F = 0,6$ в расчете с первым набором параметров ($C_L = C_K = 0$; $\varphi_{\max} = 4000$): — — стационарное решение; - - - - расчет, $t = 2$; - - - - расчет, $t = 4$; — — расчет, $t = 10$

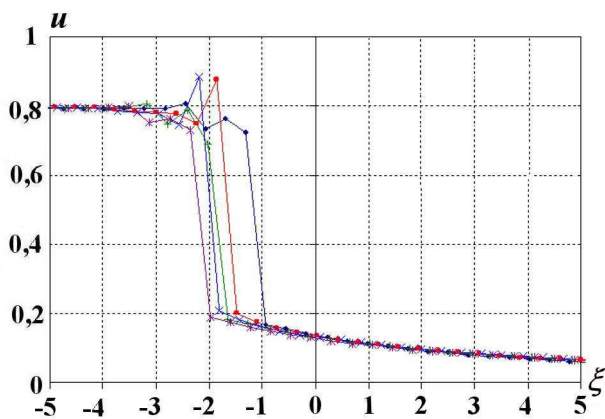


Рис. 7. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой $u_F = 0,8$ в расчете с первым набором параметров ($C_L = C_K = 0$; $\varphi_{\max} = 4000$): — — расчет, $t = 2$; — — расчет, $t = 4$; — — расчет, $t = 6$; — — расчет, $t = 8$; — — расчет, $t = 10$

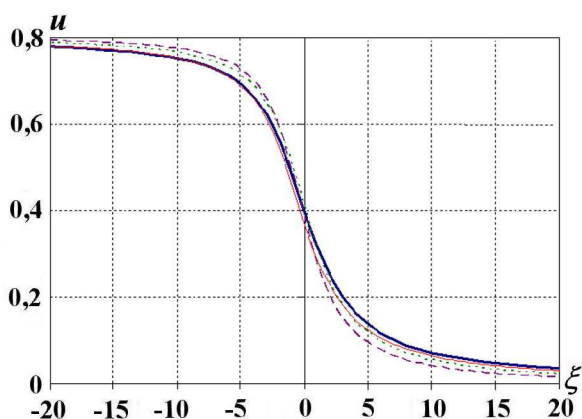


Рис. 8. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой $u_F = 0,8$ в расчете со вторым набором параметров ($C_L = C_K = 0$; $\varphi_{\max} = 9$): — — стационарное решение; — — расчет, $t = 1$; — — расчет, $t = 2$; — — расчет, $t = 6$

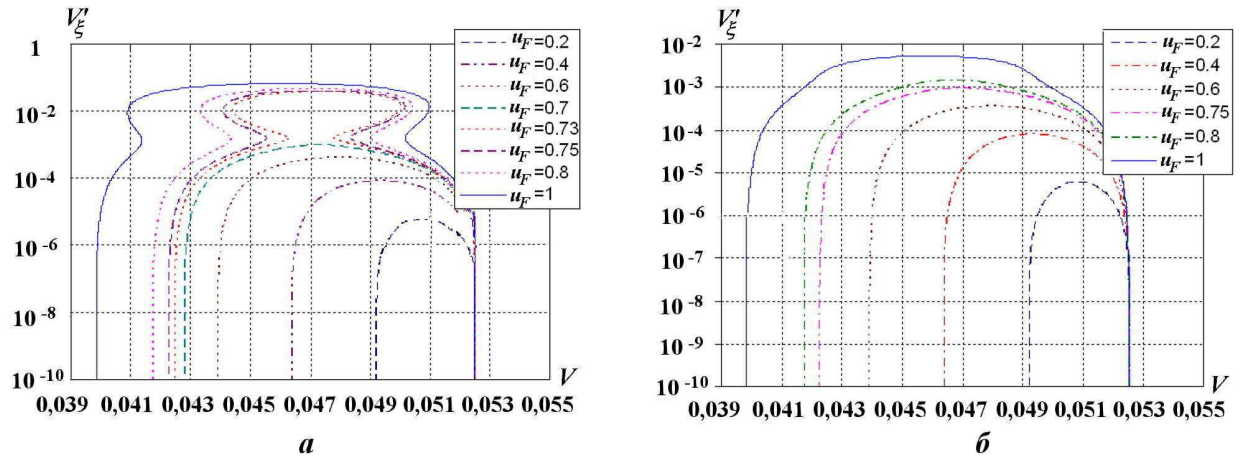


Рис. 9. Графики функций $V'_\xi(V)$, удовлетворяющих условию $\Omega(V, V'_\xi) = 0$ ($C_L = 0,5$; $C_K = 3$; $\varphi_{\max} = 4000$): $a - N_s = 25000$; $b - N_s = 2500$

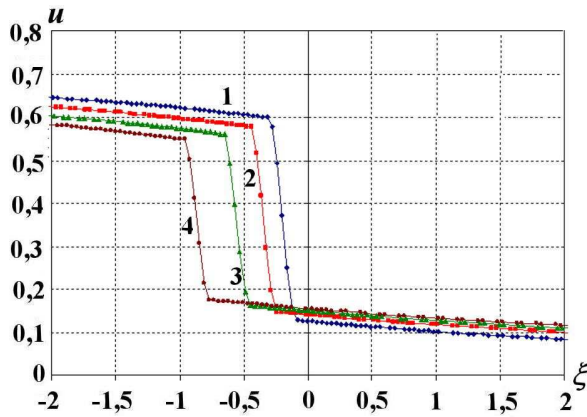


Рис. 10. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой $u_F = 0,72$ в расчете на сетке с $N_s = 25000$ ($C_L = 0,5$; $C_K = 3$; $\varphi_{\max} = 4000$): 1 — расчет, $t = 1$; 2 — расчет, $t = 2$; 3 — расчет, $t = 4$; 4 — расчет, $t = 10$

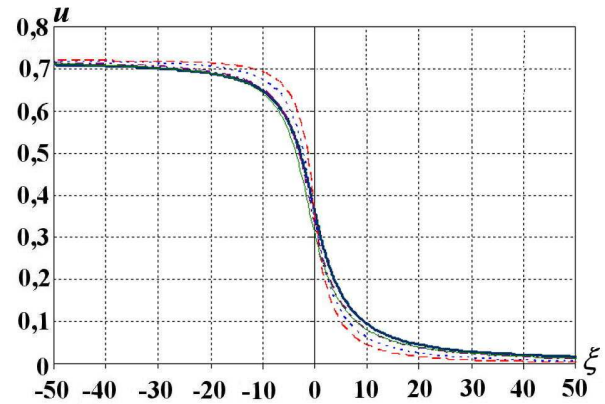


Рис. 11. Профили массовой скорости ударной волны с амплитудой $u_F = 0,72$ в расчете на сетке с $N_s = 2500$ ($C_L = 0,5$; $C_K = 3$; $\varphi_{\max} = 4000$): — стационарное решение; - - - расчет, $t = 1$; - - - расчет, $t = 2$; - · - · - расчет, $t = 4$; — расчет, $t = 10$

Таким образом, псевдовязкость играет стабилизирующую роль, и при определенных условиях (размерах ячеек сетки Δt) уравнение $\Omega(V, V'_\xi) = 0$ не будет иметь особых точек, даже когда условие $(\mu \dot{\zeta})'_\xi > 0$ не выполнено.

Численное моделирование зависимости скорости свободной поверхности ударно-нагруженных плоских образцов от времени. Сравнение с экспериментальными данными Баркера

Вязкоупругопластическая модель использовалась для численного моделирования опытов Баркера [16, 17]. В этих опытах с помощью лазерной интерферометрии проводилась регистрация скорости свободной поверхности и тем самым определялась структура переднего фронта ударной волны. В серии экспериментов варьировалась начальная скорость ударника, а следовательно, амплитуда ударной волны в мишени. Выяснилось, что для всех исследованных материалов связь между скоро-

стью деформирования в ударной волне и давлением ударного сжатия подчиняется эмпирическому закону четвертой степени: $\dot{\zeta}_{\max} = AP_F^4$.

Схема расчетов соответствовала постановке экспериментов [17] для урановых ударника ($\Delta_{\text{уд}} = 0,4$ см) и мишени ($\Delta_{\text{м}} = 0,8$ см). Использовалась модель Мизеса в форме (1)–(5) и уравнение состояния Ми–Грюнайзена. В качестве независимых параметров выбраны деформационные переменные (ρ – плотность; $\varepsilon_e = \sqrt{2\varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{ij}^e / 3}$ – интенсивность упругого сдвига) и температура. Решалась следующая система уравнений:

$$P(\rho, T) = P_x(\rho) + \rho \Gamma(\delta) C_V T, \quad P_x(\rho) = \rho^2 \frac{dE_x^V}{d\rho}, \quad \Gamma(\delta) = \Gamma_\infty + (\Gamma_\infty - \Gamma_0) \delta^{-M}; \quad (19)$$

$$E(\rho, \varepsilon_e, T) = E_x^V(\rho) + E_x^S(\varepsilon_e, T) + C_V T. \quad (20)$$

Потенциальная энергия объемных деформаций $E_x^V(\rho)$ записана в (20) с учетом нормировки на начальные условия $P(\rho_0, T_a) = 0$; $E(\rho_0, T_a) = 0$, где $T_a \sim 300$ К – комнатная температура. Вторым слагаемым в (20) является упругая энергия сдвиговых деформаций. Указанные слагаемые задаются формулами

$$E_x^V(\rho) = \frac{C_0^2}{n} \left(\frac{\delta^{n-1} - 1}{n-1} + \frac{1}{\delta} - 1 \right) + C_V T_a \left[\Gamma(\delta) \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) - 1 \right];$$

$$E_x^S(\varepsilon_e, T) = \frac{G \varepsilon_e^2}{\rho} = C_t^2 \varepsilon_e^2, \quad C_t^2 = \frac{3(1 - 2\nu(\bar{T}))}{2(1 + \nu(\bar{T}))} C_W^2, \quad \nu(\bar{T}) = \begin{cases} \nu_0 (1 + a_{11} \bar{T}^{a_{12}}), & \bar{T} < 1; \\ 0,5, & \bar{T} \geq 1. \end{cases}$$

Здесь G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; C_W , C_t – объемная и поперечная скорости звука соответственно. Наличие уравнения состояния с тепловым давлением предполагает использование полной системы уравнений (13).

Для учета вязких свойств материала использовались два набора параметров модели вязкости – с выполнением и без выполнения условий выпуклости диссипативной функции (табл. 2). Первый вариант соответствует стандартному набору параметров модели вязкости с модифицированным параметром μ_0 . Условию эволюционности (10) удовлетворяет второй набор параметров, в котором изменен параметр m_* . Так как в качестве пластического элемента выбрана модель Мизеса, то структура переднего фронта в расчетах определяется исключительно моделью вязкости.

Экспериментальные данные представлены в виде зависимости максимальной скорости деформирования в ударной волне от амплитуды давления (рис. 12).

В расчетах скорость деформирования $\dot{\zeta}_{\max}$ вычислялась в момент выхода ударной волны на свободную поверхность мишени. Выяснилось, что при выбранных параметрах модели вязкости и размерах мишени ($\Delta_{\text{м}}$) стационарная структура ударной волны не успевает сформироваться и поэтому скорость деформирования $\dot{\zeta}_{\max}$ зависит не только от амплитуды волны, но и от пройденного ударной волной расстояния.

Численные расчеты проведены на серии сгущающихся сеток с общим числом ячеек $N_s = 3000$; 6000; 8000. Сводные данные для двух наборов параметров из табл. 2 представлены также на рис. 12.

Неудовлетворительные результаты получены в расчетах с использованием модели с невыпуклой функцией диссипативности (набор параметров 1). Для этого набора параметров относительное согласие с экспериментом наблюдается в расчетах на сетке с $N_s = 3000$ и только в области высоких

Таблица 2

Параметры модели вязкости

Номер набора параметров	μ_0	m_*	φ_{\max}	$\dot{\zeta}_0$	$\dot{\zeta}_s$
1	382,5	2	4000	0,0007	100
2	382,5	1	4000	0,0007	100

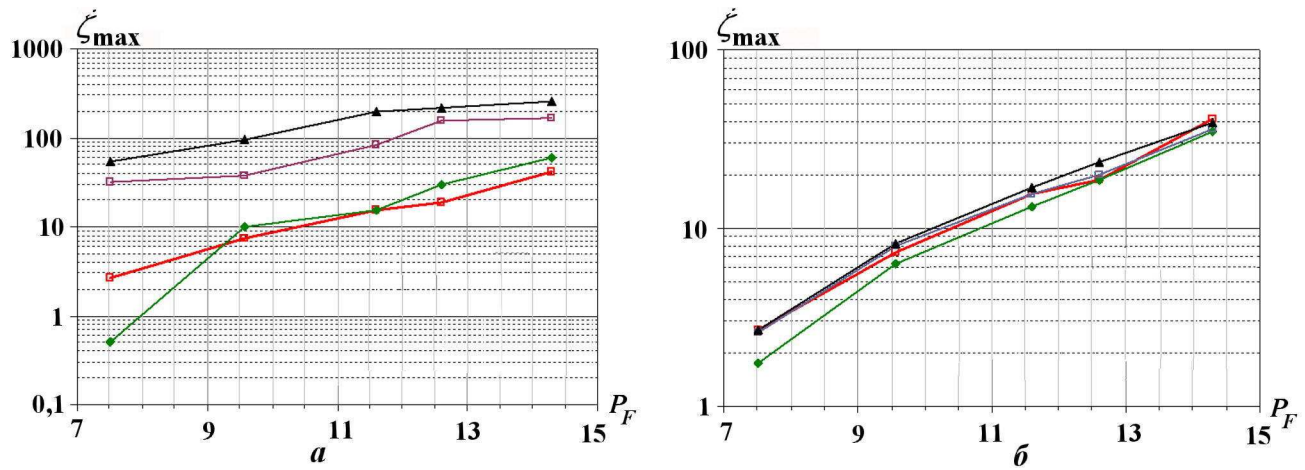


Рис. 12. Экспериментальные и расчетные зависимости скорости деформирования от амплитуды нагружения: a — расчеты с набором параметров 1 ($m_* = 2$) из табл. 2; b — расчеты с набором параметров 2 ($m_* = 1$); \blacklozenge — $N_s = 3\,000$; \blacksquare — $N_s = 6\,000$; \blacktriangle — $N_s = 8\,000$; \square — эксперимент;

амплитуд нагружения. При измельчении сетки наблюдается сильный рост скорости деформирования, получаемой в расчете: она начинает превышать экспериментально зафиксированную скорость деформирования более чем на порядок. Таким образом, при использовании неэволюционной модели отсутствует предельный переход получаемого решения при измельчении сетки, а структура переднего фронта не соответствует экспериментальным данным. Здесь, как и ранее, стабилизирующая роль псевдовязкости при измельчении сетки становится недостаточной для получения устойчивого численного решения.

При использовании эволюционной модели (набор параметров 2) наблюдается хорошая согласованность расчетных и экспериментальных данных. Для данного набора параметров удается описать экспериментально полученную структуру ударной волны. Отклонения расчетных и экспериментально измеренных значений скорости деформирования укладываются в погрешность экспериментальных данных.

Заключение

Общеизвестно, что сходимость разностных схем возможна только при решении корректно поставленной задачи. По этой причине модели, нарушающие условие эволюционности, должны быть исключены из рассмотрения.

Неприятной особенностью моделей с невыпуклой функцией диссипативности является то, что приемлемые результаты могут быть получены на условно грубых сетках вследствие стабилизирующей роли искусственной либо аппроксимационной вязкости. Более того, могут быть сделаны ошибочные выводы о существовании предельного перехода при $\Delta t \rightarrow 0$. Однако в определенный момент (при измельчении сетки с Δt ниже порогового значения) может произойти катастрофическое изменение расчетных профилей, что является следствием неэволюционности таких моделей.

Список литературы

1. Фомин В. М., Хакимов Э. М. Численное моделирование волн сжатия и разрежения в металлах // Журнал приклад. мех. и тех. физ. 1989. № 5. С. 118—122.
2. Мерзиевский Л. А., Реснянский А. Д. О выборе модели для описания затухания ударных волн в металлах // ФГВ. 1983. Т. 19, № 1. С. 99—105.
3. Мерзиевский Л. А. Модели деформирования при интенсивных динамических нагрузках (обзор) // Там же. 2015. Т. 52, № 2. С. 144—160.

4. Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н., Тюнькин Е. С. Роль диссипативных процессов при обжатию цилиндрических оболочек взрывом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 3. С. 97—101.
5. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
6. Глушак Б. Л., Куропатенко В. Ф., Новиков С. А. Исследование прочности материалов при динамических нагрузках. Новосибирск: Наука, 1992.
7. Игнатова О. Н., Раевский В. А., Соколов С. С. и др. Роль вязкости металлов в формировании ударных волн и волн разрежения // Мат. XIII межд. семинара "Фундаментальные свойства плутония". 9—13 сентября 2013 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 182—185.
8. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997.
9. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
10. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // УМН. 1959. Т. XIV. Вып. 2(86). С. 87—158.
11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
12. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталева В. В. Влияние вязкости, дисперсии и кинетики фазовых переходов на параметры ударных волн разрежения // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2005. Вып. 9. С. 6—29.
13. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Дудник Ю. Е. Влияние вязкости и дисперсии на параметры ударных волн разрежения для невыпуклого уравнения состояния общего вида // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 3—17.
14. Шульц У. Д. Двумерные конечно-разностные уравнения гидродинамики в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 9—54.
15. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000.
16. Jonson J. N., Barker L. M. Dislocation and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40, No 2. P. 4321—4334.
17. Swegle J., Grady D. E. Shock viscosity and the prediction of shock wave rise times // Ibid. 1985. Vol. 58, No 2. P. 692—701.

Статья поступила в редакцию 27.08.15.

ON CORRECTNESS OF VISCO-ELASTO-PLASTICITY MODELS WITH NON-NEWTONIAN VISCOSITY / M. A. Guseva, V. N. Sofronov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N.Novgorod region).

Problems arising in the numerical implementation of visco-elasto-plasticity models are considered. In this type of models a non-Newtonian medium is taken for a viscous component. The viscosity factor for such media depends not only on the thermodynamic parameters, but on the reduced velocity of shear strains as well. An attempt has been made to give an answer to the question concerning the extent of arbitrariness of such dependence.

Keywords: visco-elasto-plasticity models, non-Newtonian models of viscosity, dissipation functions, condition of evolutionary development, steady-state structures.
