

УДК 519.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПОКОЛЕНИЙ В СОГЛАСОВАННЫХ РАСЧЕТАХ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Д. Г. Модестов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск)

Расчет стационарных характеристик критической системы, например атомного реактора, можно представить как совместное решение двух задач: условно-критической задачи определения нейтронно-физических характеристик и задачи определения остальных стационарных параметров. Если для решения каждой из задач используется своя методика, то схема расчета представляет итерационный процесс согласования получаемых характеристик.

Рассматривается случай, когда для решения условно-критической задачи используется метод поколений. Показано, что при некоторых общих предположениях о свойствах рассматриваемой системы, позволяющих получить сходимость итераций, можно построить схему, нивелирующую погрешности указанного метода. Для демонстрации приводятся расчеты стационарного состояния реактора ВВЭР-1000. При этом в качестве дополнительных к нейтронно-физическим характеристикам рассматриваются теплогидравлические характеристики и концентрации короткоживущих ядер.

Ключевые слова: численные методы, метод простой итерации, метод поколений, ВВЭР-1000.

Введение

Для определения нейтронно-физических характеристик стационарного состояния критических систем, в частности ядерных энергетических установок, обычно используется решение соответствующей условно-критической задачи (см., например, [1]). При этом, как и в большинстве задач переноса частиц, математическая модель получается наиболее адекватной физической, если для расчета применяются методы статистического моделирования. В этом случае оценка функционалов на решении условно-критической задачи получается методом поколений, методические основы которого достаточно хорошо проработаны. Описание данного метода приводится, например, в книге [2]. Его реализация существует в ряде программных продуктов, в частности в программе ПРИЗМА [3], использованной для проведения методических расчетов, результаты которых представлены в настоящей работе.

Однако решение условно-критической задачи представляется достаточным, если только допустимо пренебречь другими процессами, протекающими в рассматриваемой системе. В противном случае в расчетах необходимо определять стационарные характеристики указанных процессов. При этом чаще всего методики, применяемые для определения этих характеристик, используют детерминистический подход, что затрудняет их реализацию совместно с методом поколений. Кроме того, для решения каждой задачи в общем случае требуется учет своего набора процессов, дополняющих перенос нейтронов. Поэтому наиболее разумным представляется использование для каждого процесса своей методики определения стационарных характеристик, обычно реализованной в виде отдельной программы, с разработкой схемы получения согласованного решения. Рассмотрение некоторых аспектов такого подхода, касающихся использования в этой схеме метода поколений, приводится ниже.

Общая схема расчета стационарного состояния

Не ограничивая общности, удобно рассмотреть стационарное состояние системы с двумя процессами. Пусть x и y — наборы характеристик этих процессов, каждая из которых принадлежит выпуклому множеству допустимых значений. И, кроме того, существуют методики нахождения стационарных характеристик одного набора в зависимости от другого. Функциональные зависимости, определяемые этими методиками, будут обозначаться следующим образом:

$$x = c(y); \quad (1)$$

$$y = d(x). \quad (2)$$

Такое представление удобно для реализации метода простой итерации. Однако возникает вопрос о его сходимости. Как известно (см., например, [4]), для этого необходимо и достаточно, чтобы абсолютная величина собственных значений матрицы производных итерационного оператора была строго меньше единицы. Для системы (1) эта матрица имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & c_y \\ d_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что при условии слабого взаимного влияния процессов друг на друга действительные части собственных значений матрицы S строго меньше единицы. В дальнейшем данное условие будет считаться выполненным.

Это, впрочем, не дает гарантии, что указанное неравенство выполняется и для модулей. Однако в этом случае существует действительное число $\varepsilon \in [0, 1)$ такое, что модули всех собственных значений матрицы

$$S_\varepsilon = \varepsilon + (1 - \varepsilon) S$$

меньше единицы.

Действительно, пусть $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ — некоторое собственное значение матрицы S . Здесь λ_R и λ_I — действительные числа; i — мнимая единица. При этом

$$\lambda_R < 1. \quad (3)$$

Соответствующий λ квадрат модуля собственного значения матрицы S_ε записывается следующим образом:

$$|\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda|^2 = (\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda_R)^2 + (1 - \varepsilon)^2 \lambda_I^2.$$

Можно видеть, что при выполнении условия (3) это выражение на интервале $\varepsilon \in (\varepsilon_\lambda, 1)$, где

$$\varepsilon_\lambda = \frac{\lambda_R^2 - 1 + \lambda_I^2}{(1 - \lambda_R)^2 + \lambda_I^2} < 1, \quad (4)$$

принимает значения меньше единицы. Таким образом, если выбрать ε так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\varepsilon \in [0, 1); \quad \varepsilon > \max_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad (5)$$

где λ пробегает весь спектр матрицы S , то абсолютные величины собственных значений матрицы S_ε будут меньше единицы.

В практических приложениях часто вместо системы (1), (2) удобно рассматривать аналогичную ей:

$$x = c(d(x)) \equiv s(x). \quad (6)$$

Матрица производных системы (6) в стационарной точке имеет вид

$$\frac{\partial s(x)}{\partial x} = c_y d_x,$$

а ее собственные значения являются квадратами собственных значений матрицы S . При этом очевидно, что они удовлетворяют неравенству (3).

Таким образом, повторяя приведенные выше рассуждения, можно утверждать, что существует действительное число $\varepsilon \in [0, 1)$, при котором итерационная схема

$$x_{k+1} = \varepsilon x_k + (1 - \varepsilon) s(x_k) \quad (7)$$

является сходящейся. Так как множество характеристик является выпуклым, то данное отображение не выводит их значения из области определения. При этом итерации сходятся к решению системы (6). Следует отметить, что справедливо и обратное утверждение: существование такого ε является критерием выполнения условия слабого влияния.

Использование метода поколений

Когда одним из процессов является перенос нейтронов, а для определения стационарной конфигурации нейтронного поля используется метод поколений [2], построение расчетной схемы имеет свои особенности, связанные с погрешностями метода. В общем случае здесь имеются три типа погрешностей, которые достаточно подробно рассмотрены в книге [2]. Кроме того, они

определяются параметрами счета, варьированием которых можно получить значение функционала с необходимой точностью. Этими параметрами являются число пассивных поколений L , число активных поколений M и размер поколения N . В пределах больших значений указанных параметров погрешности можно рассматривать аддитивно.

Согласно [2] асимптотические зависимости погрешностей от параметров счета определяются следующими выражениями.

Статистическая ошибка, связанная с использованием методов Монте-Карло для оценок функционалов, имеет вид

$$\delta_1 \sim \frac{1}{\sqrt{NM}}. \quad (8)$$

Систематическая погрешность, определяемая конечностью размера поколения:

$$\delta_2 \sim \frac{1}{N}. \quad (9)$$

Наконец, третья погрешность, связанная со сходимостью итераций, в общем случае зависит от M и L . Кроме того, она зависит от реализации метода поколений и выбранного начального приближения. Для ее оценки (см., например, [2]) обычно пренебрегают высшими гармониками условно-критического уравнения переноса. В этом приближении характер задачи описывается доминантным отношением, т. е. отношением к максимальному собственному значению предыдущего. При этом предполагается, что максимальное собственное значение дискретно (см. обсуждение в [1]). При таком подходе оценка любого функционала без учета δ_1 и δ_2 может быть представлена следующим образом:

$$\tilde{x} = (1 - \theta)x + \theta x^0. \quad (10)$$

Здесь x — точное значение; x^0 — значение функционала на начальном приближении; θ — некоторое число, определяемое особенностями реализации метода поколений. Если метод поколений реализуется так, что для каждой независимой последовательности сначала моделируется L пассивных поколений, а потом M^1 ($M^1 \leq M$) активных, то указанное число имеет следующую асимптотическую зависимость от параметров расчета:

$$\theta \sim \frac{1}{M^1} \sum_{k=L+1}^{L+M^1} \Delta^k = \frac{\Delta^{L+1}}{M^1} \frac{1 - \Delta^{M^1}}{1 - \Delta}. \quad (11)$$

Здесь через Δ обозначено доминантное отношение. Множитель пропорциональности определяется долей основной гармоники в начальном распределении. В частности, для способов реализации, приведенных в [2], число θ может быть оценено следующим образом:

- при методе оценки по последнему поколению ($M^1 = 1$) $\theta \sim \Delta^{L+1}$;
- при использовании эргодического метода ($M^1 = M \gg 1$) $\theta \sim \Delta^{L+1}/M$.

Для любой реализации в соответствии с (10) третья погрешность имеет вид

$$\delta_3 = \theta (x^0 - x) \quad (12)$$

и при этом всегда при увеличении значения L стремится к нулю.

В дальнейшем под решением условно-критической задачи будет пониматься (1).

Если не рассматривать δ_3 , например, выбрав значение L таким образом, что с хорошей точностью можно считать $\theta = 0$, то задача нахождения характеристик стационарного состояния (7) сводится к моделированию характеристик марковской случайной цепи

$$x_{k+1} = \varepsilon x_k + (1 - \varepsilon) s_{N,M}(x_k). \quad (13)$$

Здесь $s_{N,M}(x)$ — выборочное значение случайной величины. При этом согласно (8) и (9)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_{N,M}(x) = s(x),$$

где правая часть определяется соотношением (6).

Условия сходимости характеристик этой цепи к стационарному решению системы уравнений (1), (2) рассмотрены в работе [5]. В частности, там показано, что условие сходимости то же самое, что и для (7), а для получения несмещенной оценки требуется, чтобы значения M_k и N_k на k -й итерации удовлетворяли предельному соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{N_k M_k} \left\| \frac{\partial s(x)}{\partial x} \right\|^{2(n-k)} = 0.$$

В этом случае распределение значений характеристик сходится к точечному, что приводит к нивелированию разброса, обусловленного статистической погрешностью δ_1 . Там же показано, что для справедливости указанного соотношения достаточно использовать $N_k M_k \sim \beta^{-2k}$, где

$\beta \in (0, 1)$. Кроме того, для нивелирования δ_2 в соответствии с (9) необходимо увеличивать на итерациях значение N .

С учетом вышесказанного для сходимости к решению (6) достаточно увеличивать только размер поколения. Однако наиболее эффективной реализацией итерационной процедуры представляется такая, в которой обе погрешности δ_1 и δ_2 уменьшаются одинаковым образом, т. е. так, чтобы на итерациях выполнялось соотношение $M_k/N_k = \text{const}$. Принимая во внимание условие сходимости распределения, можно использовать следующие соотношения:

$$N_k \sim \beta^{-k}, \quad M_k \sim \beta^{-k}. \quad (14)$$

При этом выбор оптимального значения β и множителей пропорциональности зависит как от самой задачи, так и от условий проведения расчета. Впрочем, как показывает опыт, указанные значения могут изменяться в достаточно широких пределах без видимого увеличения трудоемкости.

При учете δ_3 ситуация несколько усложняется. В этом случае в соотношении (13) должна быть учтена оценка (10). Соответственно итерационное соотношение принимает следующий вид:

$$x_{k+1} = \varepsilon x_k + (1 - \varepsilon) \times \\ \times [(1 - \theta) s_{N,M}(x_k) + \theta x^0]. \quad (15)$$

Здесь при заданном значении θ можно рассмотреть два варианта расчета условно-критической задачи:

- 1) для получения начального поколения всегда использовать одну и ту же конфигурацию нейтронного поля;
- 2) в качестве начального поколения использовать конфигурацию, полученную на предыдущей итерации.

Как можно видеть из (15), первый вариант расчета сходится, если при используемом значении ε сходятся итерации (7). Данное утверждение, в свою очередь, следует из справедливости следующего утверждения, которое несложно доказать:

$$|\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda| < 1 \Rightarrow |\varepsilon + (1 - \varepsilon)(1 - \theta)\lambda| < 1,$$

где λ, ε удовлетворяют (3)–(5), а $\theta \in (0, 1)$. В случае, если параметры расчета L и M не меняются, т. е. θ остается постоянным на итерациях (15), последние сходятся к решению уравнения

$$x = (1 - \theta) s(x) + \theta x^0, \quad (16)$$

которое в общем случае не совпадает с решением (6). Когда значение L увеличивается, т. е. согласно (11) $\theta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, сходимость к этому решению гарантируется. Но скорость сходимости может определяться скоростью уменьшения θ , что не всегда эффективно.

Для рассмотрения второго варианта в выражении (15) достаточно сделать замену $x^0 = x_k$ и учесть, что на итерациях доля основной гармоники приближается к единице, т. е. множитель пропорциональности в (11) выходит на константу. Несложно показать, что при этом указанное выражение совпадает с (13) где вместо ε используется следующая величина:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + (1 - \varepsilon)\theta.$$

При этом $\varepsilon < \tilde{\varepsilon} < 1$, т. е. $\tilde{\varepsilon}$ удовлетворяет ограничениям, налагаемым на ε в соотношении (5). Соответственно итерации сходятся к решению уравнения (6).

Здесь интересно рассмотреть в некотором роде обратную задачу, т. е. когда при используемом значении ε итерационная схема (7) не сходится. В этом случае существует собственное значение матрицы производных такое, что

$$|\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda| \geq 1.$$

Очевидно, что с учетом (4) и (5) в этом случае справедливо неравенство

$$|\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda| \geq |\tilde{\varepsilon} + (1 - \tilde{\varepsilon})\lambda| \equiv \\ \equiv |\varepsilon + (1 - \varepsilon)\theta + (1 - \varepsilon)(1 - \theta)\lambda|.$$

То есть при использовании варианта 2 можно получить сходящуюся расчетную схему, причем вероятность этого тем выше, чем больше погрешность δ_3 . Аналогичное утверждение можно доказать и для варианта 1, для которого справедливо неравенство

$$|\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda| \geq |\varepsilon + (1 - \varepsilon)(1 - \theta)\lambda|.$$

Вопрос о соотношении этих вариантов между собой не имеет однозначного ответа. Впрочем, если критические собственные значения матрицы производных действительные, то можно доказать следующее утверждение:

$$|\varepsilon + (1 - \varepsilon)(1 - \theta)\lambda| < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varepsilon + (1 - \varepsilon)\theta + (1 - \varepsilon)(1 - \theta)\lambda| < 1.$$

То есть из сходимости схемы с использованием варианта 1 следует сходимость схемы с вариантом 2. С какой-то долей вероятности можно ожидать справедливости этого утверждения и при малых мнимых компонентах собственных значений.

Здесь отметим следующее обстоятельство. Эргодический метод, рекомендуемый в [2], эффективен при реализации на однопроцессорных вычислительных системах. При этом вопрос о погрешности δ_3 (12) обычно не является актуальным, так как практически всегда, не увеличивая трудоемкости расчета, можно выбрать такое значение $L \ll M$, что выражение (11) будет близко к нулю. Однако не будет большим преувеличением утверждать, что прецизионные расчеты с использованием методов статистического моделирования достаточно сложных устройств, таких как атомные реакторы, можно проводить только на многопроцессорных комплексах. При этом алгоритм распараллеливания в общем случае вносит свои коррективы в реализацию метода поколений. В частности, в программе МСУ реализован алгоритм моделирования поколений независимо на каждом процессоре (см. [6]). Его достоинством является практическое отсутствие межпроцессорных обменов, что позволяет распараллеливать задачу с эффективностью, близкой к максимальной. Поэтому алгоритм использовался при проведении расчетов по программе ПРИЗМА, результаты которых приведены ниже. Недостатком указанного алгоритма являются относительно большие временные затраты на моделирование пассивных поколений. Фактически при большом числе счетных процессов, т. е. при $M^1 \rightarrow 1$ (см. (11)) его эффективность приближается к методу оценки по последнему поколению, критика которого приведена в [2]. Но, как показано выше, при использовании метода поколений в рамках итерационной схемы (13) второй вариант выбора начального поколения позволяет не предъявлять жестких требований к погрешности (12) и снизить долю пассивных поколений в общей трудоемкости расчета.

Расчет стационарного состояния реактора ВВЭР-1000

Для оценки влияния различных подходов были проведены расчеты стационарного состояния активной зоны реактора ВВЭР-1000 со свежим топливом. При этом, кроме переноса нейтро-

нов, учитывались процессы тепломассопереноса, а также процессы установления равновесных концентраций короткоживущих ядер. Последнее (см. [7]) используется для построения устойчивой схемы расчета кампании. Расчеты условно-критической задачи проводились по программе ПРИЗМА с нейтронно-физической моделью реактора, описанной в [3]. При этом для упрощения системы все регулирующие стержни были извлечены из активной зоны. Для описания теплогидравлики использовалась модель независимых ТВС. Параметры каждой из них задавались детально, в соответствии с положением в реакторе. Задача определения стационарных теплогидравлических характеристик при заданном распределении мощности решалась аналогично тому, как это делалось в работе [8]. При этом использовались характеристики реактора, приведенные в [9]. Для оценки равновесных ядерных концентраций использовалась программа РИСК [10], в которой реализованы алгоритмы, предлагаемые в [7]. Для определения сходимости рассматривалось аналогично [8] значение отклонения температуры на последующих итерациях.

Для оценки свойств итерационного оператора полезно рассмотреть решение, получаемое при моделировании стационарной марковской цепи. Для этого было проведено несколько расчетов по разным схемам. В данных расчетах при решении условно-критической задачи размер поколения составлял 10^4 точек деления, среднее число активных поколений на одном процессе — 30. В качестве количества пассивных поколений использовались значения $L = 5; 20; 100$. Для параметра сходимости ε рассматривались значения 0 и $1/2$.

Характер сходимости виден из рис. 1, где приведены зависимости отклонения температуры для разных расчетных схем. Здесь наблюдается выход процесса на стационарное распределение для всех значений параметров расчета, кроме $\varepsilon = 0$ и $L = 100$ (т. е. $\theta \rightarrow 0$). По этим данным можно сделать вывод, что для рассматриваемой системы условие слабого влияния справедливо, а $\varepsilon = 1/2$ удовлетворяет ограничениям (5). Поэтому далее, если не оговорено особо, приводятся результаты, полученные с этим значением. Кроме того, видно, что расчет с большими погрешностями δ_3 (малыми значениями L) делает расчетную схему сходящейся и при $\varepsilon = 0$. Но в этом случае колебания температуры заметно выше, чем для $\varepsilon = 1/2$. Такое поведение обу-

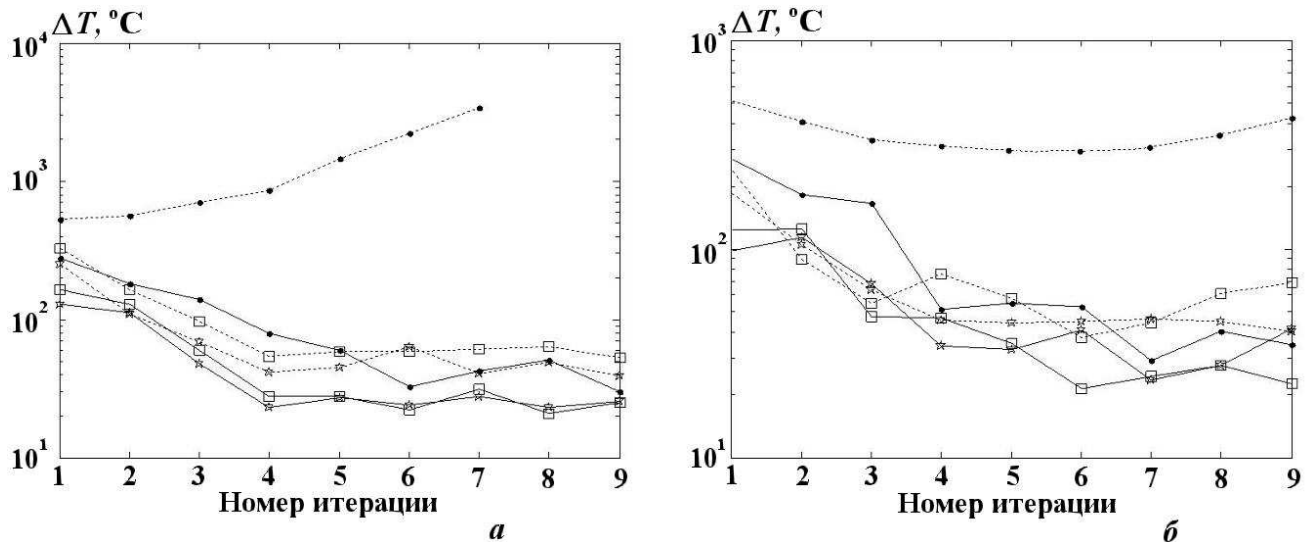


Рис. 1. Значения максимального отклонения температуры на последующих итерациях при моделировании стационарной марковской цепи с использованием двух вариантов определения начального поколения: *a* — вариант 1; *б* — вариант 2; —*— — $\varepsilon = 1/2$, $L = 5$; —□— — $\varepsilon = 1/2$, $L = 20$; —●— — $\varepsilon = 1/2$, $L = 100$; ...*... — $\varepsilon = 0$, $L = 5$; ...□... — $\varepsilon = 0$, $L = 20$; ...●... — $\varepsilon = 0$, $L = 100$

словлено большей дисперсией предельного распределения, что, в свою очередь, в соответствии со свойствами данного распределения, рассмотренными в [5], является следствием большей нормы итерационного оператора при $\varepsilon = 0$. Также из рис. 1 видно, что при втором варианте расчета (см. предыдущий раздел) расходимость заметно слабее, чем при первом. То есть наблюдаемые зависимости от расчетных параметров согласуются с приведенными в предыдущем разделе оценками.

Для разрешения вопроса о сходимости к решению задачи необходимо сравнить результат с точным решением (эталоном), в качестве которого рассматривались характеристики, полученные при моделировании нестационарной цепи. Сами эти задачи будут рассмотрены ниже. Здесь следует отметить, что невязка температуры в основном определяется колебаниями распределения этой величины на итерациях. Для определения характера сходимости удобно рассматривать характеристику, слабо зависящую от таких колебаний. В качестве таковой была выбрана средняя температура топлива на половине высоты активной зоны. Ее значения, полученные при моделировании стационарной цепи с использованием различных расчетных параметров, приведены на рис. 2. В частности, из рис. 2, *a* видно, что использование варианта 1 приводит к большому смещению результата в соответствии

с (16). Нивелировать это смещение можно только значительным увеличением количества пассивных поколений, причем при используемых для представленных результатов вычислительных ресурсах практически все временные затраты в этом случае приходятся на пассивные поколения. В то же время с использованием варианта 2, как можно видеть из рис. 2, *б*, получается практически точное решение при любых значениях L . Небольшое отличие от эталона соответствует систематической ошибке, получаемой при расчетах методом моделирования стационарной марковской цепи, которая рассматривалась в работе [5] (см. также [8]).

Средняя температура по всем ТВС представляет собой интегральную величину. Она в большей степени характеризует поведение итерационного процесса в среднем. Однако интерес представляют и локальные характеристики. Были выбраны две точки: нижняя часть ТВС 1 (край активной зоны) и центр ТВС 82 (середина активной зоны). Поведение температуры в этих точках в зависимости от номера итерации, полученное с использованием разного числа пассивных поколений, представлено на рис. 3, 4. Можно видеть, что для $L = 5$ картина качественно совпадает с результатами, приведенными на рис. 2. Отличия заключаются в большей амплитуде колебаний, являющейся следствием большей дисперсии локальных величин, а также в

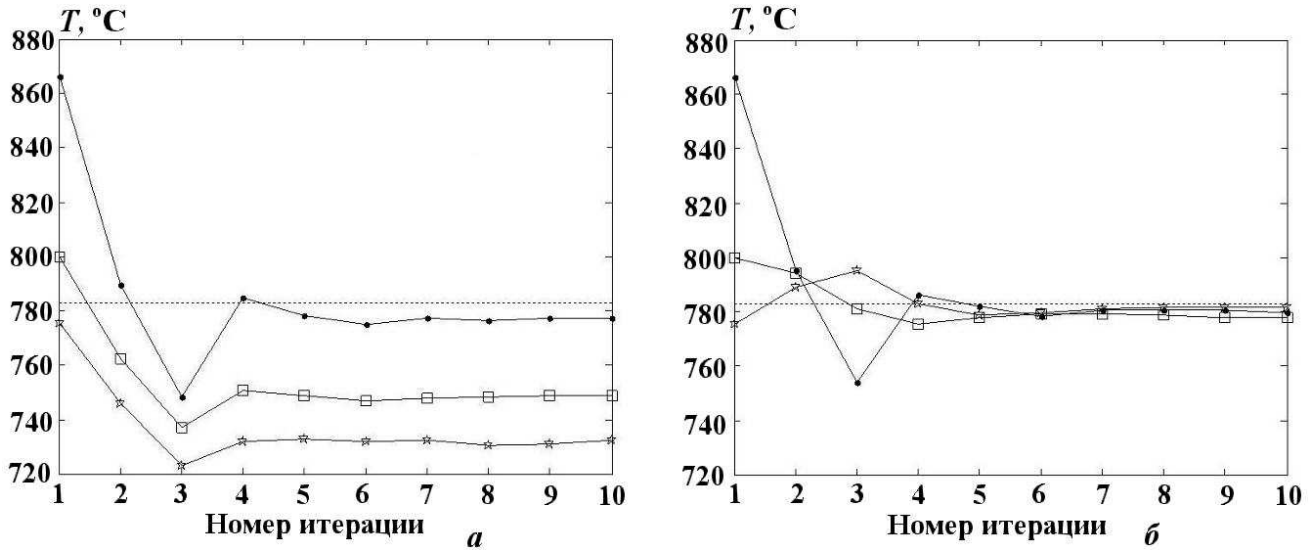


Рис. 2. Средняя температура топлива на половине высоты активной зоны при моделировании стационарной марковской цепи с использованием двух вариантов определения начального поколения: *a* — вариант 1; *b* — вариант 2; —*— — $L = 5$; —□— — $L = 20$; —●— — $L = 100$; — эталон

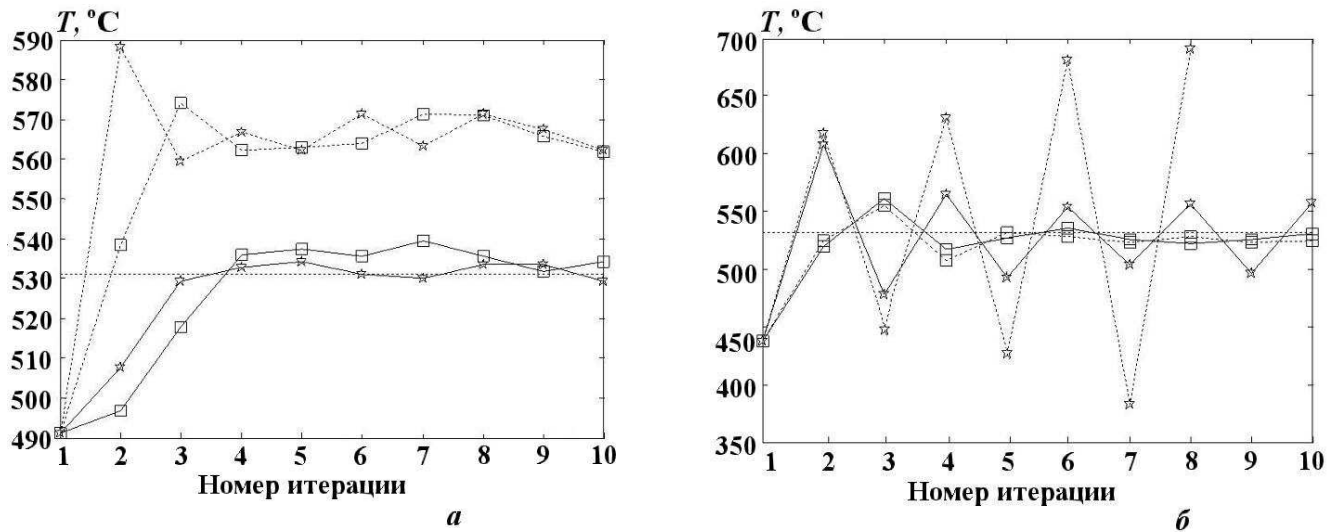


Рис. 3. Расчетная температура топлива в нижней части ТВС 1: *a* — $L = 5$; *b* — $L = 100$; ...*... — вариант 1, $\varepsilon = 0$; ...□... — вариант 1, $\varepsilon = 1/2$; —*— — вариант 2, $\varepsilon = 0$; —□— — вариант 2, $\varepsilon = 1/2$; — эталон

положительном смещении величин внизу активной зоны (в противоположность отрицательному в центре) при использовании варианта 1, что связано с некорректной оценкой распределения характеристик нейтронного поля. Для $L = 100$ дополнительно к этим отличиям можно наблюдать расходимость решения при $\varepsilon = 0$. Эта расходимость связана с возбуждением поперечных колебаний относительно случайной оси, проходящей через середину активной зоны. Если для варианта 2 наблюдается постоянство амплитуды, то расчет по варианту 1 приводит к ее ро-

сту. Интересным следствием является монотонное понижение температуры в центральной точке, связанное с "перекачкой" нейтронного поля на периферию системы.

Но, как показано в [5], наиболее приемлемой схемой решения рассматриваемых задач является использование нестационарной марковской цепи. В расчетах, результаты которых приведены ниже, в зависимости от номера итерации k в соответствии с (14) использовались следующие значения: размер поколения $N_k = 3000 \times (3/2)^{k-1}$; число активных поколений на про-

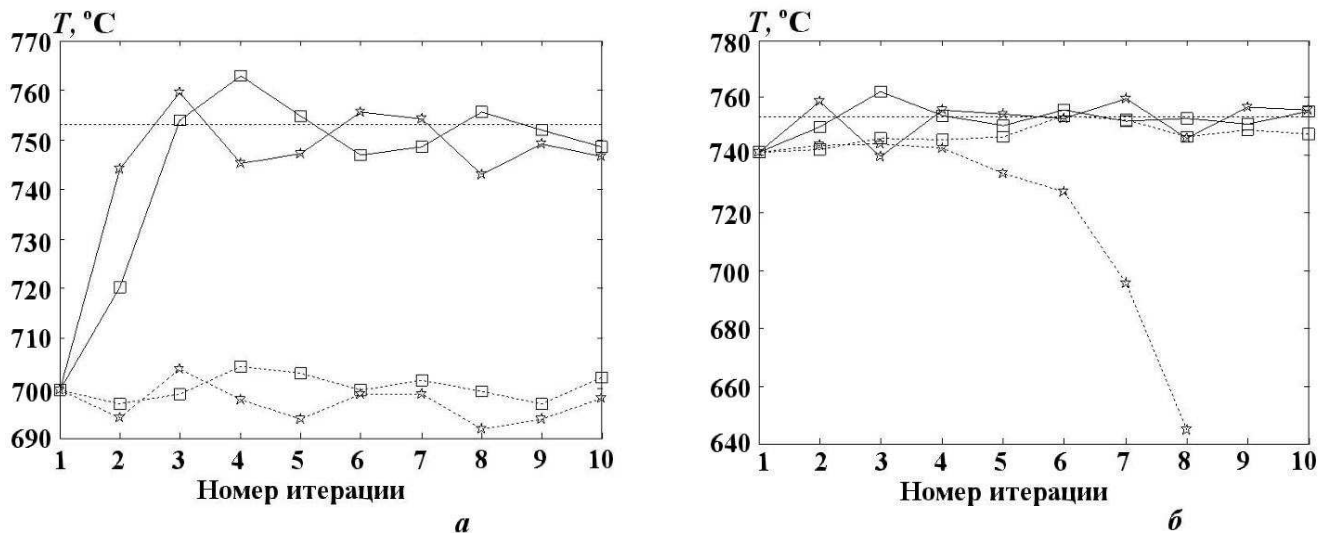


Рис. 4. Расчетная температура топлива в центре ТВС 82: *a* — $L = 5$; *b* — $L = 100$; $\cdots\star\cdots$ — вариант 1, $\varepsilon = 0$; $\cdots\square\cdots$ — вариант 1, $\varepsilon = 1/2$; $\text{---}\star\text{---}$ — вариант 2, $\varepsilon = 0$; $\text{---}\square\text{---}$ — вариант 2, $\varepsilon = 1/2$; $\cdots\cdots\cdots$ — эталон

цессе $M_k^1 = 10 \cdot (3/2)^{k-1}$, т. е. параметр нестационарности $\beta = 2/3$. Не приводя зависимостей невязки температуры от номера итерации, можно отметить, что к окончанию расчета ее значение составляло примерно 10°C . Количество пассивных поколений задавалось равным $L = 5$; 20 и, кроме того, бралось с непостоянным значением $L = 3M_k^1$, которое позволяло нивелировать погрешность, вносимую конечностью числа пассивных поколений (но при этом в несколько раз увеличивалось время счета). Несложно вычислить, что статистика стационарной цепи при этом достигалась на четвертой итерации, а значение L получалось близким к максимальному, т. е. к 100.

На рис. 5, *a* представлены оценки значения средней температуры топлива на половине высоты активной зоны, полученные в этих расчетах. Можно видеть, что при использовании варианта 2 для определения начального поколения, а также варианта 1 с увеличивающимся L они сходятся к одному значению. При этом после четвертой итерации оцениваемые значения меняются слабо, в то время как для варианта 1 с постоянными L после девятой итерации данные значения далеки от предельного.

Зависимости значения температуры в рассматриваемых выше точках, т. е. в нижней части ТВС 1 и центре ТВС 82, приведены на рис. 5, *b*, *в*. Можно видеть, что характер сходимости локальных и средних величин не имеет принципиальных отличий и в основном определяется согласо-

ванием характеристик в наиболее энергонапряженной части реактора.

В связи с этим представляется интересным выделить влияние погрешности δ_3 (12) на результаты расчета. Для этого согласно (11), кроме числа пассивных поколений, необходимо зафиксировать и число активных. В проведенных расчетах использовалось то же самое значение $M^1 = 30$, что и для стационарной цепи; число пассивных поколений $L = 5$. При этом, чтобы обеспечить сходимость, в соответствии с (8) и (9) необходимо варьировать размер поколения. Он задавался формулой $N_k = 800 \cdot 2^{k-1}$. Последняя зависимость была выбрана так, чтобы статистические погрешности расчетов с разными параметрами не сильно отличались друг от друга.

Значения средней температуры топлива на половине высоты активной зоны, полученные в этих расчетах и в сравнении с результатами предыдущего расчета с пятью пассивными поколениями, приведены на рис. 6, *a*. Здесь видно, что результаты, полученные с использованием варианта 2 для определения начального поколения, слабо отличаются друг от друга. В то же время использование варианта 1 приводит к заметному занижению значений указанной величины. С учетом того, что рассматриваемая высота соответствует наиболее энергонапряженной части реактора, такое занижение представляется недопустимым. Поведение остальных характеристик аналогично.

В качестве примера на рис. 6, *b* приведены значения средней равновесной концентрации ^{135}Xe

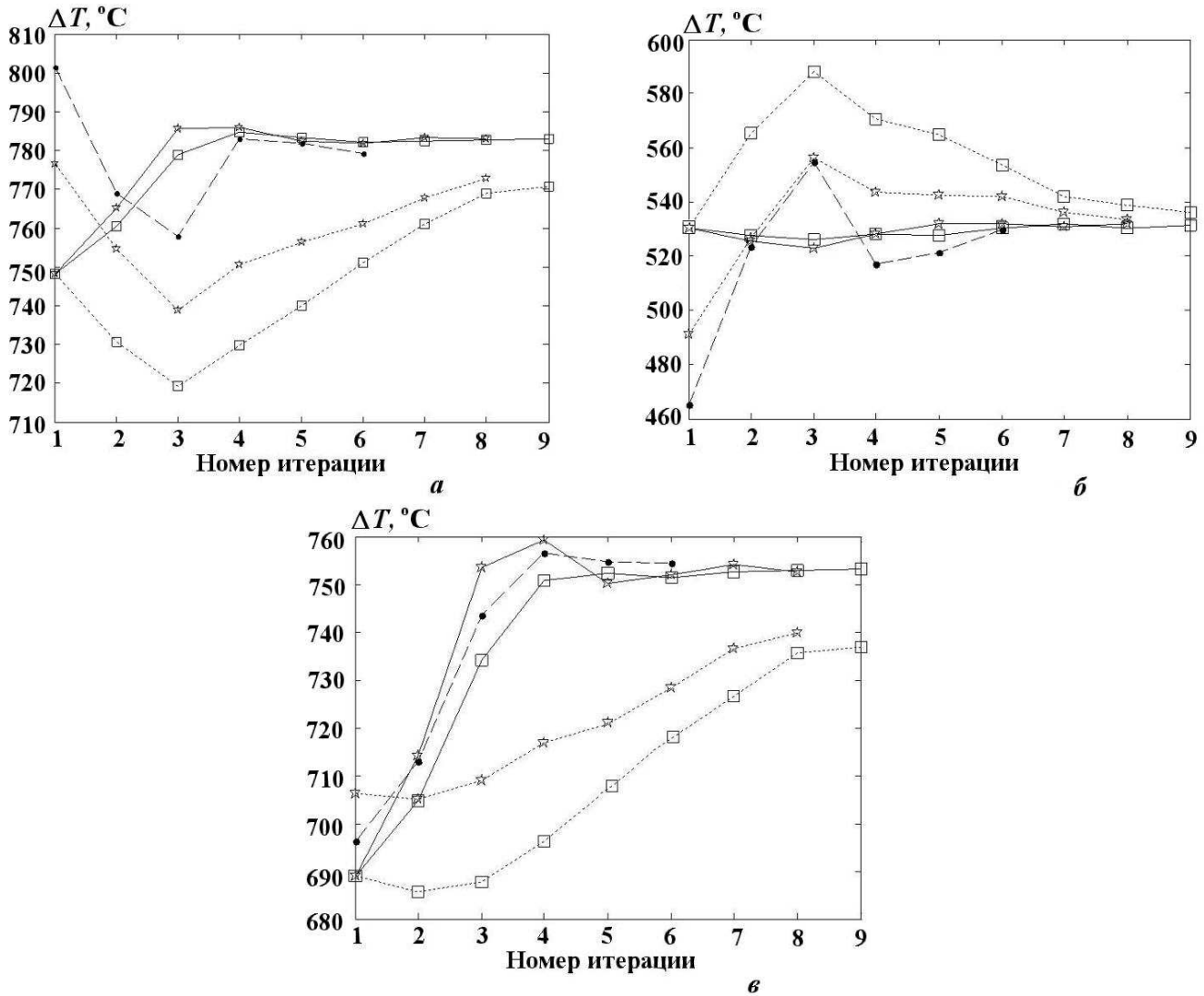


Рис. 5. Результаты расчетов при моделировании нестационарной марковской цепи: *a* — средняя температура топлива на половине высоты активной зоны; *b* — температура топлива в нижней части ТВС 1; *v* — температура топлива в центре ТВС 82; —□— — вариант 2, $L = 5$; —*— — вариант 2, $L = 20$; ---•--- — вариант 1, $L = 3M_k^1$; ...□... — вариант 1, $L = 5$; ...*... — вариант 1, $L = 20$

на половине высоты активной зоны в центральной ТВС. Явная корреляция в поведении величин, представленных на рис. 6, *a*, *b*, подтверждает, что причиной различий является большая погрешность δ_3 , определяемая соотношением (12).

Заключение

При реализации схемы согласования различных методик при расчете стационарных характеристик некоторой системы возникает ряд вопросов, связанных как со сходимостью самой схемы, так и с погрешностями получаемых результатов. При справедливости условия слабого влияния,

что чаще всего представляется не слишком сильным допущением, сходимость итераций процедуры согласования обеспечивается подбором одного параметра. При этом его значение ограничено только снизу, что позволяет производить подбор в достаточно широких пределах.

Если в расчетной схеме используется метод поколений, возникают три типа погрешностей, связанные с особенностями реализации данного метода. При этом можно обеспечить, чтобы две из них стали сколь угодно малыми при решении задачи с помощью методики, описанной в [5]. Третья погрешность, определяемая сходимостью конфигурации нейтронного поля к собственной

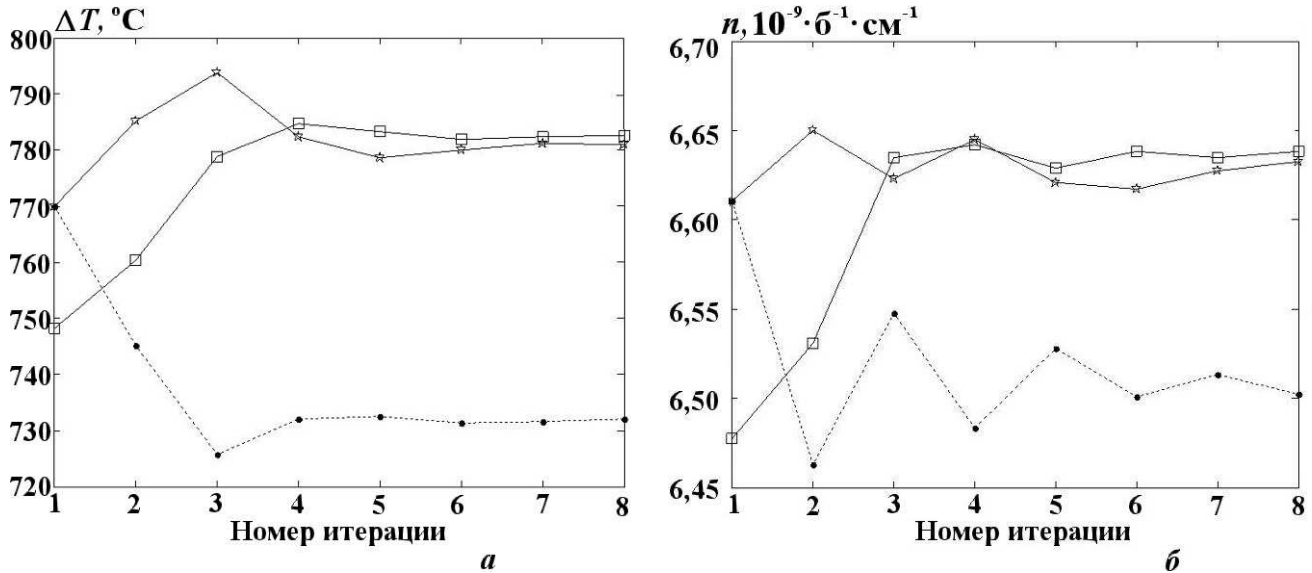


Рис. 6. Расчетные зависимости, полученные на половине высоты активной зоны при моделировании нестационарной марковской цепи с $L = 5$: a — средняя температура топлива; b — средняя равновесная концентрация ^{135}Xe в центральной ТВС; —□— вариант 2, $M/N = \text{const}$; —★— вариант 2, $M = \text{const}$; ---•--- вариант 1, $M = \text{const}$

функции условно-критической задачи во время оценки функционалов, в общем случае не нивелируется в указанном подходе. Для этого можно использовать два способа.

Первый заключается в уменьшении этой погрешности увеличением количества пассивных поколений при решении условно-критической задачи. Его недостатком является пропорциональное увеличение трудоемкости, причем, как можно видеть из результатов методических расчетов реактора ВВЭР-1000, для получения разумных погрешностей эти затраты могут значительно превышать затраты на оценку функционалов. Кроме того, недостатком можно считать невозможность оценки систематической погрешности (12) по результатам расчета. К достоинствам данного способа можно отнести то, что для его реализации подходит любая программа решения условно-критической задачи.

Другой способ заключается в использовании поколения, полученного на предыдущей итерации. Некоторым недостатком можно считать то, что программа решения условно-критической задачи должна иметь возможность сохранять последние поколения и брать их в качестве начального приближения. В случае собственной разработки реализация указанной возможности не представляет принципиальной сложности. Но для стороннего продукта могут возникнуть затруднения. Достоинством данного способа яв-

ляется сходимость к решению, практически не зависящая от количества пассивных поколений. То есть имеется возможность нивелировать долю непроизводительных вычислительных затрат.

Следует отметить, что зависящий от числа пассивных поколений множитель пропорциональности θ , приведенный в соотношении (12) при оценке третьей ошибки, является некоторым стабилизирующим фактором, т. е. играет роль параметра сходимости. Соответственно увеличение количества этих поколений может приводить к увеличению нормы итерационного оператора и, как следствие, в соответствии с его свойствами, рассмотренными в [5], к ухудшению сходимости. Поэтому, если параметр сходимости ε подобран на основе грубых расчетов, существует опасность, что более точное решение условно-критической задачи на итерациях может привести к ухудшению сходимости, вплоть до отсутствия последней. Такой же эффект может дать расчет с меньшим количеством счетных процессов при использовании алгоритма распараллеливания, аналогичного описанному в [6]. Поэтому в качестве наиболее оптимального подхода представляется использование значения ε , заведомо обеспечивающего сходимость итераций (7) независимо от параметров решения условно-критической задачи, а для нивелирования всех расчетных погрешностей, возникающих при этом, — применение метода моделирования

нестационарной марковской цепи (13) с использованием конфигурации нейтронного поля, полученного на предыдущей итерации для формирования начального поколения.

Список литературы

1. Белл Д., Глестон С. Теория атомных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
2. Золотухин В. Г., Майоров Л. В. Оценки параметров критичности реакторов методом Монте-Карло. М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Зацепин О. В., Кандиев Я. З., Кашаева Е. А. и др. Расчеты методом Монте-Карло по программе ПРИЗМА нейтронно-физических характеристик активной зоны ВВЭР-1000 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. 2011. Вып. 4. С. 64–74.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
5. Модестов Д. Г. Метод простой итерации со стохастической правой частью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 59–68.
6. Гуревич М. И., Олейник Д. С., Шкаровский Д. А. Адаптация программы MSU-PD к параллельным вычислениям на многопроцессорных компьютерах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. 2009. Вып. 4. С. 66–76.
7. Модестов Д. Г. Адаптивная схема решения уравнений выгорания ядерного топлива с оценкой равновесной концентрации короткоживущих ядер // Там же. 2013. Вып. 3. С. 120–130.
8. Модестов Д. Г. О построении схемы расчета стационарного состояния реактора при использовании методов статистического моделирования // Там же. С. 112–119.
9. Шмелёв В. Д., Драгунов Ю. Г., Денисов В. П., Васильченко И. Н. Активные зоны ВВЭР для атомных электростанций. М.: Академкнига, 2004.
10. Модестов Д. Г. Программа решения задач ядерной кинетики РИСК-2014: Препринт № 243. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014.

Статья поступила в редакцию 01.04.15.

USE OF THE METHOD OF GENERATIONS FOR CONSISTENT SIMULATIONS OF STEADY-STATE CHARACTERISTICS / D. G. Modestov // FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk).

The simulation of the steady-state characteristics of a critical system (for example, a nuclear reactor) can be represented as the solution of the two problems simultaneously: the conditionally critical problem of identifying neutron-physical parameters and the problem of identifying the rest stationary parameters. If a special technique is used to solve each of the two problems, then the simulation scheme in use is an iterative process of matching the obtained parameters.

The paper considers the case of using the method of generations to solve the given conventionally critical problem. It is shown that the scheme leveling errors of the method of generations can be constructed with some general assumptions concerning the properties of the system of interest, which allow achieving convergence of iterations. Simulations of the VVER-1000 reactor in its steady state are described for the demonstration purposes. Thermal hydraulics and concentrations of short-lived nuclei are considered in addition to the neutron-physical parameters.

Keywords: numerical schemes, the simple iteration method, the method of generations, VVER-1000.