

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОРРЕКЦИИ СЕТКИ К ОБЛАСТИ ВРАЩЕНИЯ*

О. В. Ушакова
(ИММ УрО РАН, УрФУ, г. Екатеринбург)

Описывается применение алгоритма коррекции сетки к области вращения, полученной поворотом вокруг оси на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Алгоритм применяется в процессе глобальной перестройки или оптимизации структурированных сеток.

Ключевые слова: сетки, граничные узлы, коррекция, области вращения.

Введение

В работе [1] предложен алгоритм коррекции сетки к области вращения, образованной вращением на 180° плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Коррекция осуществляется для структурированной сетки $\mathbf{x}_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, $i = 0, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, M-1$, $k = 0, \dots, L-1$, где N , M , L задают число узлов по каждому из координатных направлений. Алгоритм коррекции заключается в нахождении проекций граничных узлов, лежащих на гранях $k = 0, L-1$, на поверхности вращения. Проецирование на поверхность вращения осуществляется прямыми, проходящими через проецируемые узлы по радиальному к оси вращения направлению (см. [1]). Алгоритм существенно повышает эффективность математического моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики [2], а также других физических явлений и процессов, ввиду того что "подсаживает" узлы, "сошедшие" с поверхности вращения, обратно на эту поверхность. В результате такой коррекции в процессе построения и перестройки сетки граничные узлы сетки всегда принадлежат поверхности вращения (см. [1]).

В данной работе описывается применение алгоритма коррекции сетки к области вращения в расчетах сеток согласно вариационному подходу [3]: в процессе глобальной перестройки или

оптимизации [4—6] начальных сеток, построенных Т. Н. Брониной по алгоритмам [4, 5, 7]. В разд. 1 описываются результаты тестирования алгоритма как способа проецирования граничных узлов на простейшем примере задания образующей кривой в виде отрезков прямых. В разд. 3 рассматриваются другие примеры коррекции сеток, в том числе для случаев задания элементов образующей с помощью многозначных функций. Перед рассмотрением этих примеров в разд. 2 перечисляются критерии, применяемые для оценки качества построенных сеток.

1. Проверка принадлежности граничных узлов поверхностям вращения

Осуществим проверку принадлежности граничных узлов поверхностям вращения на простейшем примере (предложенном А. И. Анучиной), образующая кривая в котором состоит из отрезков прямых вида $az + bx + c = 0$, где a , b , c — константы (рис. 1)¹. Для каждого узла сетки $P'_{ijk} = \mathbf{x}'_{ijk} = (x'_{ijk}, y'_{ijk}, z'_{ijk})$ при $i = 0, \dots, 20$, $j = 0, \dots, 20$, $k = 0, 4$ нужно проверить, что точка $P = (x_{ijk}, 0, z_{ijk})$ (см. [1]) с координатами $x_{ijk} = \sqrt{x'^2_{ijk} + y'^2_{ijk}}$, $z_{ijk} = z'_{ijk}$ принадлежит образующей кривой. Подставим координаты точки P в соответствующее уравнение пря-

* Данная статья является продолжением работы, опубликованной в предыдущем выпуске журнала.

¹ На рис. 1, 2, 5, 6, 8 сверху представлен вид сетки со стороны плоскости образующей, внизу — вид сзади.

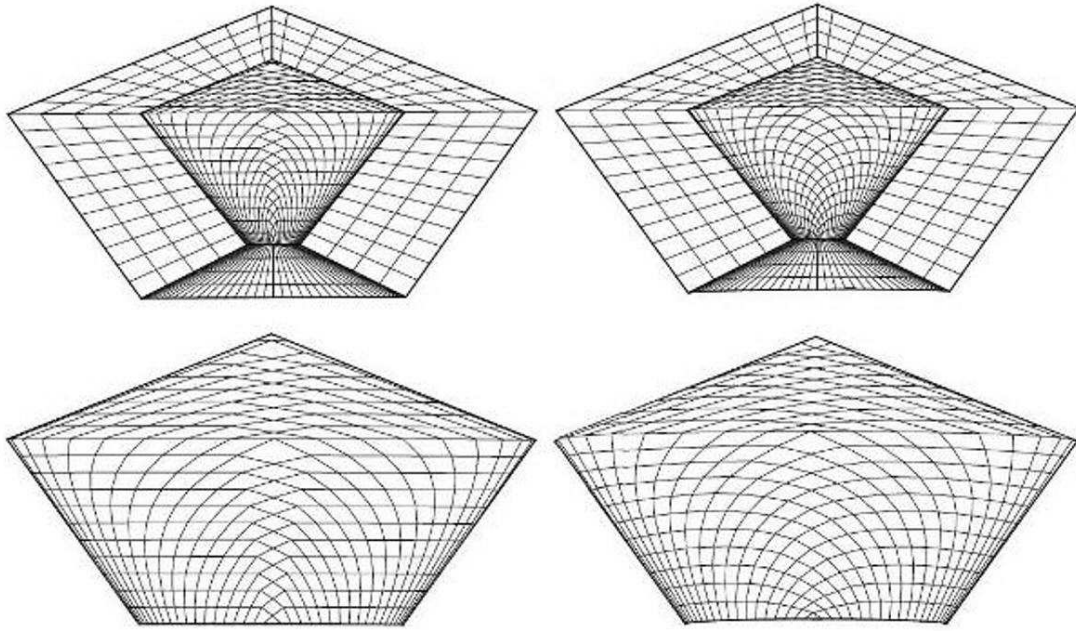


Рис. 1. Начальная (слева) и оптимальная (справа) сетки ($A_0 = 0,01$; 50 итераций)

мой (оно определяется значением z_{ijk}) и вычислим $\delta_{ijk} = az_{ijk} + bx_{ijk} + c$. Оценим $\max |\delta_{ijk}|$. Значение этой величины зависит от числа значащих цифр, учитываемых у координат узлов сетки. В исследуемом примере при числе значащих цифр после запятой в координатах узлов, равном 14, $|\delta_{ijk}| \leq 1 \cdot 10^{-13}$ для $k = 0$ и $k = 4$ при любых i и j , т. е. узлы сетки на гранях $k = 0$ и $k = 4$ принадлежат поверхностям вращения с точностью до $1 \cdot 10^{-13}$.

2. Оценка качества сеток и их перестройки

Перед рассмотрением примеров расчетов приведем различные критерии оценки качества сеток, которые будем использовать в описании. Оценка качества структурированных сеток осуществляется численно с помощью критериев невырожденности [8–12], мерами близости сеток к равномерным и ортогональным [3–6] (значениями функционалов равномерности D_P , ортогональности D_O , минимизируемого функционала $D = D_P + A_0 D_O$ при весе ортогональности $A_0 > 0$). Для качественной перестройки требуется также, чтобы объем области, выделяемой начальной и конечной сетками (их ячейками) практически не менялся (допускается изменение менее 10 %) (см. [2]). Объемы ячеек вычисляются

через объемы десяти тетраэдров по формуле, полученной в [8, 9]. Для оценки качества сетки могут использоваться также линейные размеры ячеек и критерий, предложенный О. М. Козыревым (критерий Козырева) [4]. Это близость к единице порядка отношения максимального и минимального линейных размеров ячеек сетки по всей расчетной области.

3. Примеры коррекции сеток

Пример 1. Приведем результаты коррекции сетки для области, образующая которой содержит в качестве элементов отрезки прямых и дуги окружностей, заданные однозначными функциями $x = x(z)$ (см. [1]). На рис. 2 представлены начальная и оптимальная сетки с числом узлов $31 \times 31 \times 5$. Оптимальная сетка продемонстрирована в подкорректированном варианте: все граничные узлы лежат на поверхности вращения образующей.

На рис. 3 обозначены узлы сетки, которые в процессе расчетов остаются неподвижными (они имеют светлую окраску), а также свободные узлы (темные). Отметим, что свободные узлы лежат на поверхности вращения.

Коррекция сетки к области вращения в примере проводилась после глобальной перестройки, осуществленной по алгоритмам [6]. Насколь-

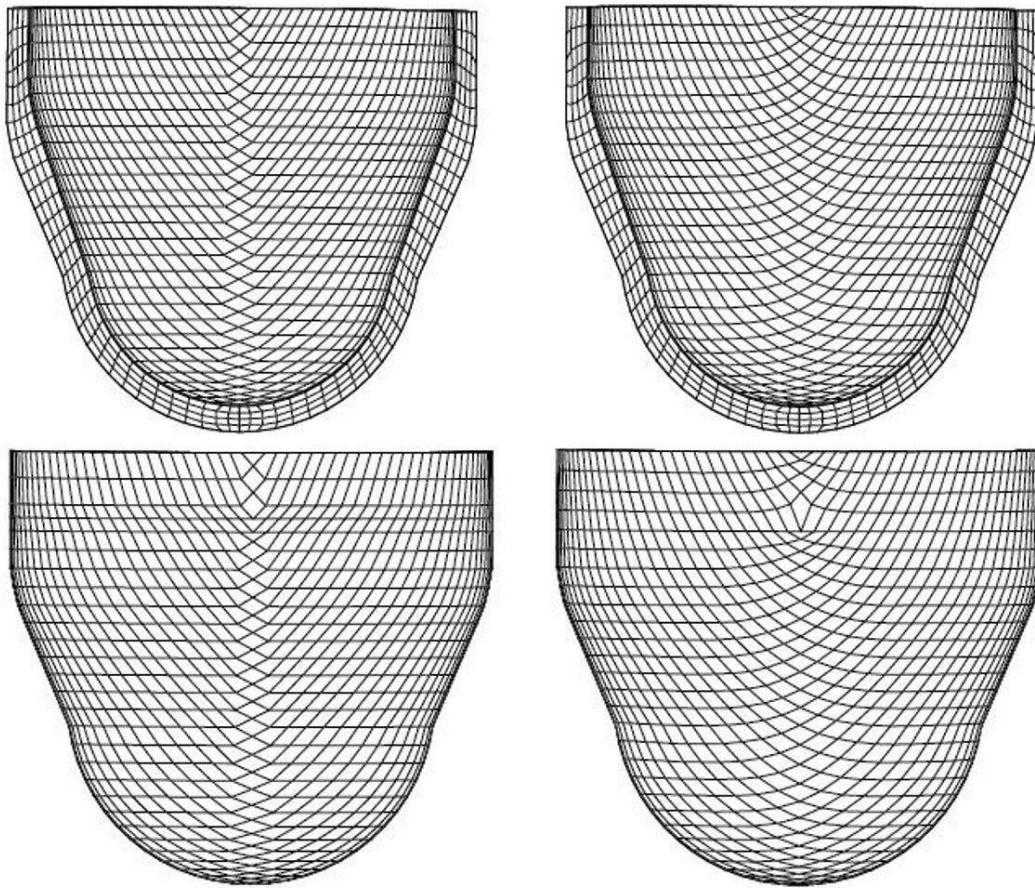


Рис. 2. Пример 1. Начальная (слева) и оптимальная (справа) сетки при весе ортогональности $A_O = 0,1$

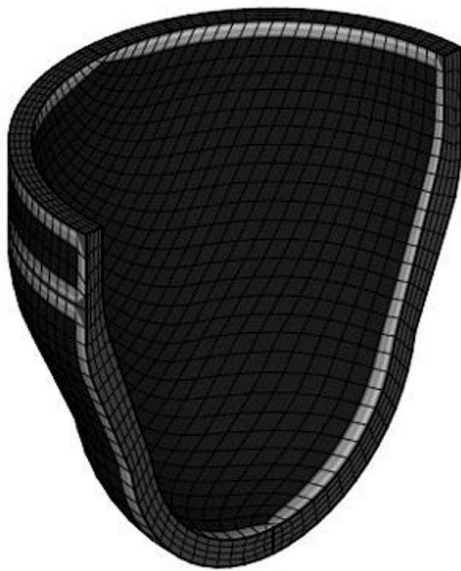


Рис. 3. Оптимальная сетка ($A_O = 0,1$)

ко сильно изменилось положение узлов сетки после коррекции, можно наблюдать на рис. 4 (см. также цветную вкладку), где представлена степень коррекции C_{ijk} (см. [1]) — расстояние между корректируемым узлом сетки $P''_{ijk} = P'' = (x'', y'', z'')$ и его проекцией $P'_{ijk} = P' = (x', y', z')$:

$$C_{ijk} = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

Такие качества сетки, как невырожденность и значения минимизируемых функционалов, при коррекции существенно не изменились по сравнению с неподкорректированной сеткой. В начальной сетке вырожденные ячейки — это призмы (см. классификацию вырожденных ячеек в [11]). Они располагаются вдоль ребер стыковки плоских граней. Таких ячеек 8.

Расчет оптимальной (подкорректированной) сетки осуществлялся за 50 итераций. В опти-

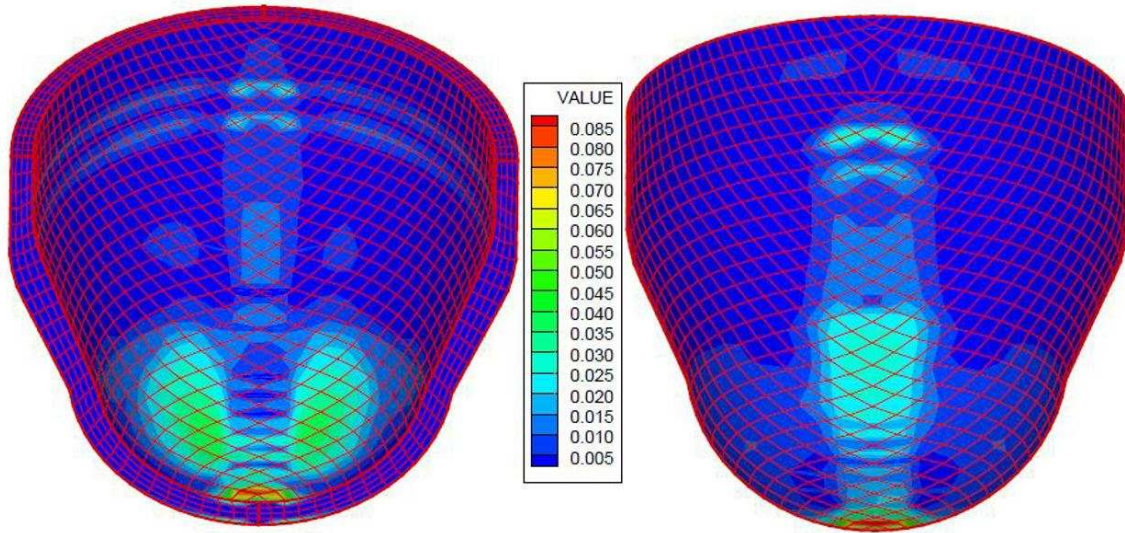


Рис. 4. Степень коррекции сетки — расстояние между узлами подкорректированной и неподкорректированной сеток

мальной сетке вырожденные ячейки тоже призмы, их 8. Они также располагаются вдоль ребер стыковки плоских граней. Для начальной сетки значения функционалов оптимальности (D_P , D_O , $D = D_P + A_O D_O$) при весе ортогональности $A_O = 0,1$ следующие: $D_P = 1018,9$; $D_O = 106\,540$; $D = 10\,756$. Для оптимальной (уже подкорректированной) сетки при $A_O = 0,1$ $D_P = 400,12$; $D_O = 100\,500$; $D = 10\,090$. Изменение объема области по сравнению с изменением при глобальной перестройке сетки без коррекции существенно уменьшилось и составило 0,03% (для оптимальной неподкорректированной сетки изменение объема области составляет 2%). Отношение максимального линейного размера ячейки сетки к минимальному по всей области для начальной сетки равно 5, для оптимальной сетки равно 6. Этот показатель для подкорректированной сетки также улучшился. Для оптимальной неподкорректированной сетки показатель равен 9.

Далее приведем только изображения сеток для областей вращения, образующая кривая которых содержит элементы, заданные многозначными функциями $x = x(z)$. В примерах на границах $k = 0, L - 1$ узлы свободные, на остальных — фиксированные. Коррекция к области вращения осуществлялась на каждой итерации в процессе минимизации функционала качества сетки. Во всех приведенных примерах сетки являются невырожденными либо содержат допусти-

мые типы вырождения [11] (вырожденные ячейки в виде призм вдоль ребер стыковки плоских граней). При оптимизации наблюдается уменьшение функционала, объем области сохраняется с допустимой точностью.

Пример 2. В данном примере образующая содержит дугу эллипса, заданную в виде многозначной функции $x = x(z)$. За 10 итераций при $M = N = 21$, $L = 10$ получается сетка, представленная на рис. 5.

Пример 3. В данном примере образующая содержит дугу окружности, заданную в виде многозначной функции $x = x(z)$. Сетка, оптимизированная за 100 итераций для $N = M = 31$, $L = 11$, изображена на рис. 6. Фрагмент оптимальной сетки вблизи элемента дуги окружности, заданной многозначной функцией, представлен на рис. 7.

Пример 4. В данном примере образующая содержит дуги эллипса и отрезки прямых, заданные многозначными функциями $x = x(z)$. Оптимальная сетка для 100 итераций при $N = M = 21$, $L = 7$ представлена на рис. 8.

Заключение

Приведенные примеры применения алгоритма коррекции сетки к области вращения показали его работоспособность и эффективность.

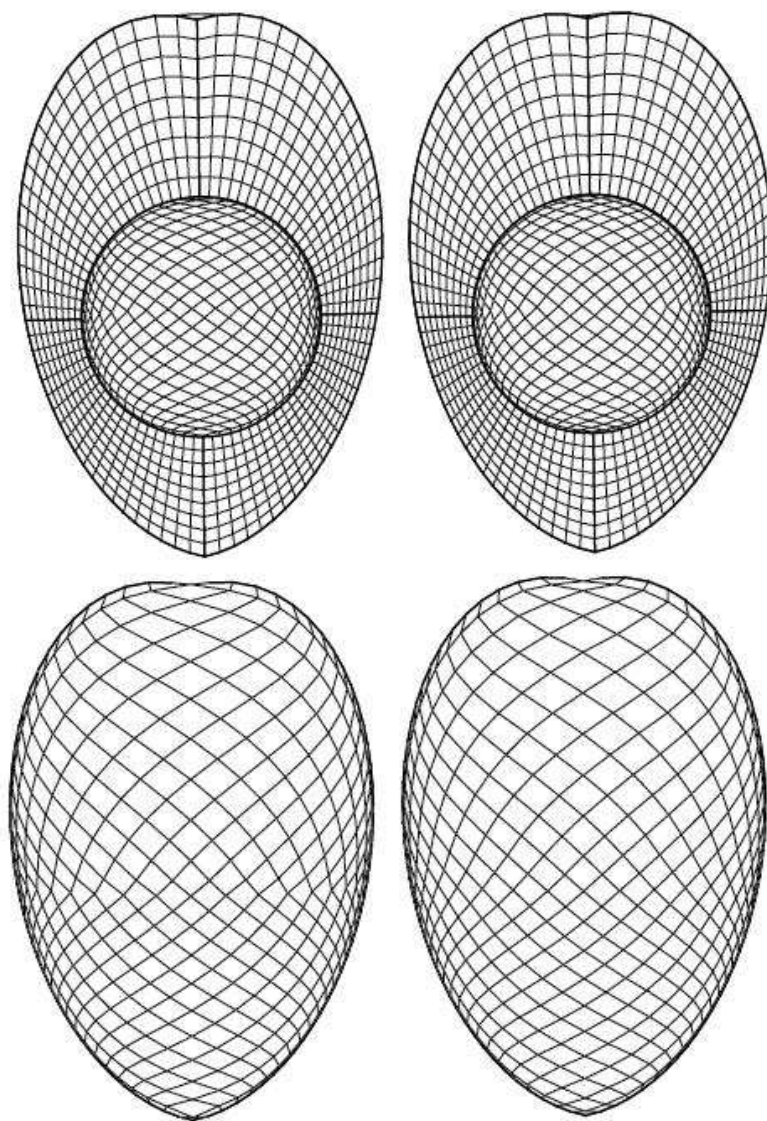


Рис. 5. Пример 2. Начальная (слева) и оптимальная (справа) сетки при весе ортогональности $A_0 = 0,1$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-04146), УрО РАН (проекты 15-16-1-10, 15-7-1-13).

Список литературы

1. Ушакова О. В. Алгоритм коррекции сетки к области вращения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 1. С. 16–27.
2. Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A. et al. Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // Advances in Grid Generation / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 337–380.
3. Khairullina O. B., Sidorov A. F., Ushakova O. V. Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
4. Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В. Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883.

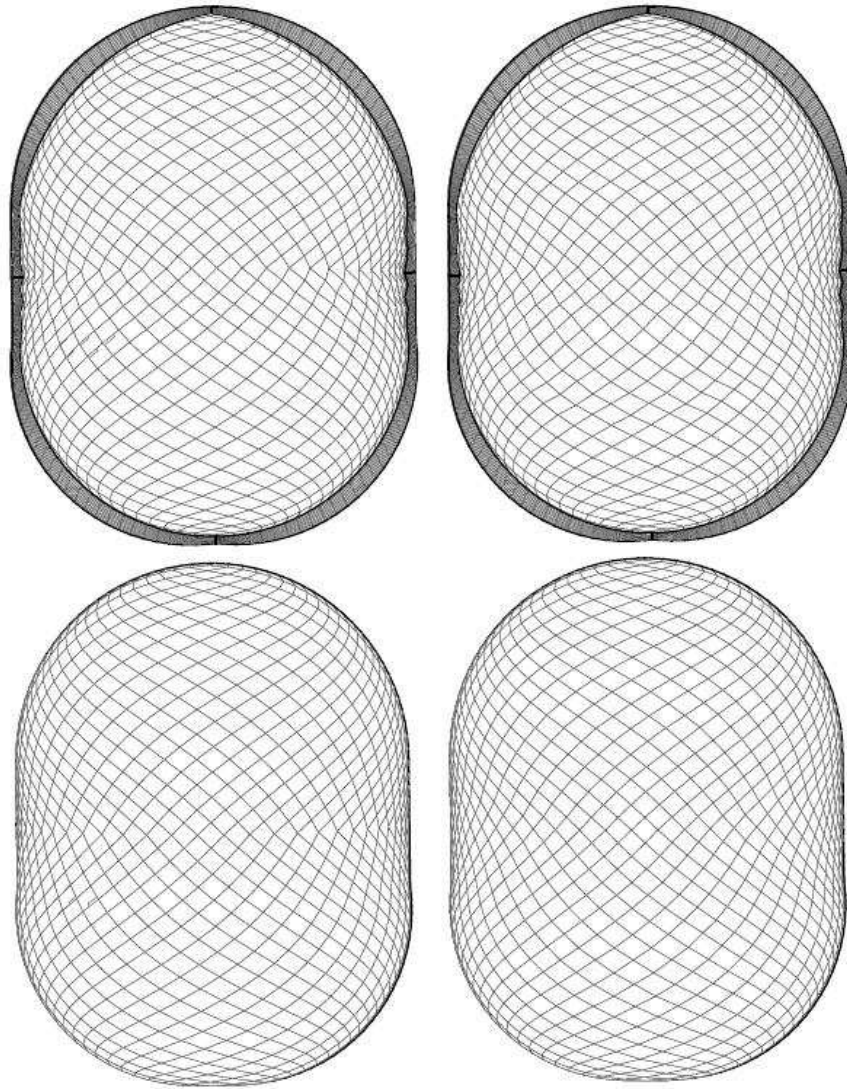


Рис. 6. Пример 3. Начальная (слева) и оптимальная (справа) сетки при весе ортогональности $A_O = 0,01$

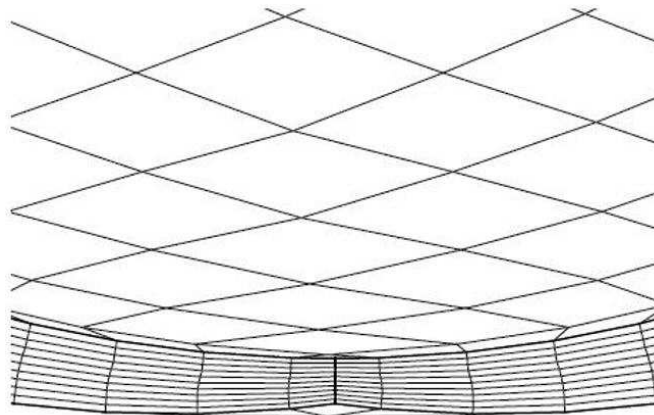


Рис. 7. Пример 3. Фрагмент оптимальной сетки при весе ортогональности $A_O = 0,01$

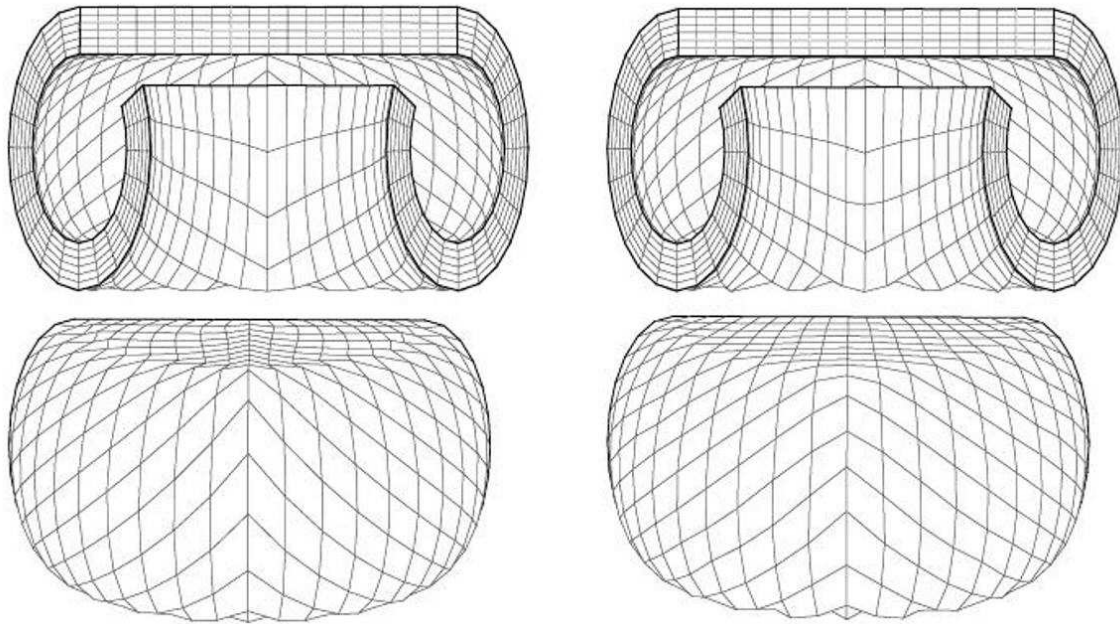


Рис. 8. Пример 4. Начальная (слева) и оптимальная (справа) сетки при весе ортогональности $A_O = 0,01$

5. Bronina T. N., Ushakova O. V. Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. New York: Novascience Publishers, 2007. P. 283–320.
6. Ушакова О. В. Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики*. 2008. Т. 14, № 1. С. 150–180.
7. Бронина Т. Н. Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // Там же. С. 3–10.
8. Ushakova O. V. Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // *SIAM J. Sci. Comp.* 2001. No 23. P. 1273–1289.
9. Ушакова О. В. Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
10. Ушакова О. В. О невырожденности трехмерных сеток // *Труды института математики и механики*. 2004. Т. 11, № 1. С. 78–100.
11. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2008. Т. 48, № 8. С. 1–24.
12. Ushakova O. V. Nondegeneracy tests for hexahedral cells // *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 2011. No 200. P. 1649–1658.

Статья поступила в редакцию 18.02.15.

APPLICATION OF THE ALGORITHM OF CORRECTING A GRID WITH RESPECT TO THE SURFACE OF REVOLUTION / O. V. Ushakova // (IMM of RAS UrB, UrFU, Ekaterinburg).

The paper considers the application of the algorithm of correcting a grid with respect to the surface of revolution generated by the revolution through 180° around its axis of a plane curve generator consisting of straight-line segments, arcs of circles, and ellipses. The algorithm is used during the global reconstruction, or optimization of structured grids.

Keywords: grids, boundary nodes, correction, surfaces of revolution.