

УДК 532.517.4+536.523

### 3D ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА ПРИ ВСПЛЫВАНИИ ТЕРМИКА В АТМОСФЕРЕ

О. Г. Синькова, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Численно исследуется образование вихревого кольца при всплывании атмосферного термика (легкого облака) в поле тяжести Земли. Расчеты в трехмерной постановке проводились по коду ЭГАК. Результаты расчетов сравниваются с решениями приближенной аналитической теории формирования и движения плавучего вихревого кольца, апробированной известными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* плавучий объем, гравитационное поле, вихревое кольцо, турбулентность, численное моделирование.

#### Введение

В данной работе описывается решение задачи о превращении в вихревое кольцо легкого (нагретого) облака при его всплывании в более тяжелой (холодной) атмосфере. Частным примером такой задачи является подъем облака воздушно-ядерного взрыва или взрыва горючего газа. В этом случае после ухода ударной волны на значительное расстояние от точки взрыва на месте взрыва остается шар горячего воздуха (облако взрыва). Облако начинает всплывать и превращается в вихревое кольцо. За несколько секунд облако достигает максимальной скорости подъема, затем скорость постепенно уменьшается. В начале подъема облако деформируется, принимая грибообразную форму, а затем превращается в тор. На начальной стадии на границе облака развивается турбулентность, вызванная гравитационной и сдвиговой неустойчивостью; на стадии вихревого кольца возникающее циркуляционное течение подавляет турбулентность.

Впервые численное моделирование такой задачи [1] было выполнено с помощью методики МЕДУЗА [2]. Исследовалась довольно ранняя стадия, когда вихревое кольцо только образовалось, был предложен механизм его образования, приведен теоретический анализ движения вихревого кольца.

В данной работе проводились расчеты в трехмерной постановке (3D-расчеты) в рамках кода ЭГАК [3]. При этом численное моделирование

указанной задачи было выполнено до значительного бóльших относительных (приведенных к безразмерному виду) моментов времени, нежели в работе [1].

В Приложении предлагается модель образования и движения вихревых колец в поле тяжести, не содержащая (в отличие от предыдущих моделей) каких-либо эмпирических коэффициентов. Модель основывается на результатах газодинамических расчетов в двумерной постановке и известных аналитических исследованиях круговых вихрей.

Результаты численных 3D-расчетов сравниваются с указанной теоретической моделью.

#### 1. Постановка 3D-расчетов

Геометрия рассчитываемой системы (рис. 1) — параллелепипед с ребрами  $0 < x < X = 500$ ,  $0 < y < Y = 500$ ,  $0 < z < Z = 600$ , заполненный идеальным газом с плотностью  $\rho_a = 1,25 \text{ г/см}^3$  и  $\gamma = 1,4$ . В параллелепипеде содержится сфера  $\Omega_0$  с центром в точке  $(X/2, Y/2, Z/3)$  радиусом  $R_0 = 100$  с плотностью  $\rho_0 = 0,125 \text{ кг/м}^3$  и  $\gamma = 1,4$ . На верхней грани  $z = z_\nu = 600$  задавалось давление  $P_0 = 1 \text{ атм}$ , внутри параллелепипеда давление распределялось по закону  $P = P_0 - \rho_0 g (z_\nu - z)$ , где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Расчеты выполнялись на сетке  $500 \times 500 \times 600$ . На всех границах задавалось условие жесткая стенка. Задача считалась на 1658 процессорах.

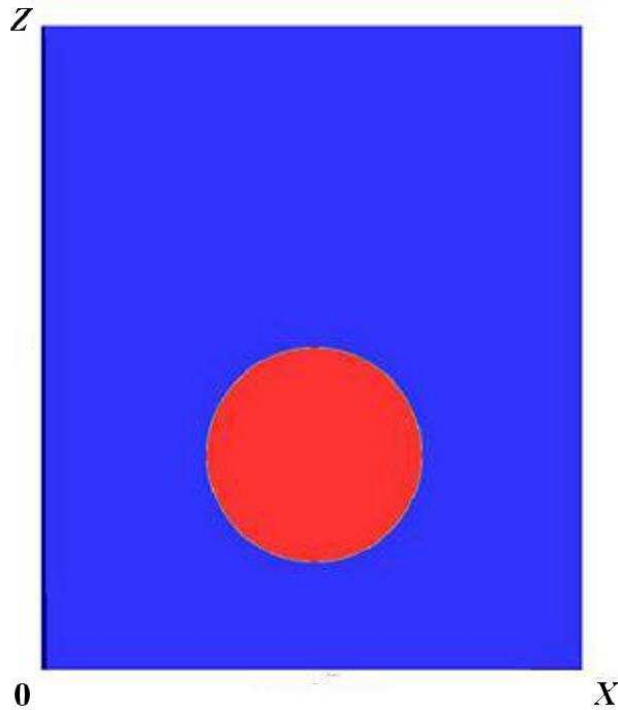


Рис. 1. Начальная геометрия системы

Ускорение свободного падения  $|\vec{g}| = 1$  во всех вариантах расчетов:  $g_z = -1$ ;  $g = |\vec{g}| = 1$ . Значение величины  $\xi \equiv \Delta/R_0$ , характеризующей степень несжимаемости, в данной задаче равно 102. Здесь  $\Delta \equiv P_0/(\rho_0 g)$  — параметр неоднородности атмосферы.

## 2. Общее представление результатов расчетов

**2.1. Начальная стадия образования вихревого кольца.** Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3 в виде изоповерхностей объемных долей вещества термика при рассмотрении сбоку, сверху и снизу на три момента времени. Здесь геометрические размеры приведены к безразмерному виду с помощью масштаба  $R_0$ , а моменты времени  $t$  приведены к безразмерному виду  $\tau$  с помощью соотношения  $\tau = \frac{t}{\sqrt{R_0/g}}$ .

Рисунки дают наглядную картину образования грибовидной формы, которая затем превращается в вихревое кольцо. При этом хорошо видно, что в целом облако сохраняет свою осевую симметрию. Видно также, что рассматриваемое течение является неустойчивым, вследствие чего в течении развиваются локальные возмущения границ облака, имеющие место из-за использо-

вания кубической сетки, что приводит к турбулизации течения. На рис. 4 представлена форма облака в сечении  $x = 0$ .

Примем во внимание, что плотность  $\rho_0$  в объеме легкого газа много меньше плотности окружающей атмосферы, а начальный радиус объема мал по сравнению с параметром неоднородности атмосферы:  $R_0 \ll \Delta$ . Это позволяет считать течение несжимаемым и использовать результаты из [2], а также [4], относящиеся к образованию вихревого кольца. Они заключаются в следующем: объем  $\Omega_0$  начинает всплывать с ускорением  $\sim 2g$ . Одновременно происходит деформация нижней кромки, так что нижний полюс догоняет верхний в момент  $\tau_1 \approx 1$ . В тот же момент циркуляция  $\gamma$  по контуру, проходящему по оси симметрии, достигает максимального значения  $\Gamma$  и далее остается постоянной. При этом завихренность  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$  оказывается сосредоточенной на поверхности плавучего объема, как следует из уравнения

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\nabla \rho \cdot \nabla P}{\rho^2} + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}, \quad (1)$$

полученного из уравнения Эйлера. Здесь последний член обращается в нуль в силу осевой симметрии (см. также [2]). Первый же член справа обращается в нуль в силу изэнтропичности атмосферы. Отметим, что при  $R_0 \ll \Delta$  указанный член пренебрежимо мал, даже если атмосфера слегка отличается от изэнтропической: в этом случае ее плотность на расстояниях порядка  $R_0$  практически постоянна.

**2.2. Поздняя стадия движения вихревого кольца.** На рис. 5, 6 для различных моментов времени показано развитие возмущения контактной границы в виде изоповерхности объемной доли легкого вещества. Видно, что при  $\tau > 1$  в верхней части облака зарождается турбулентность, в то время как в нижней части она отсутствует до момента  $\tau = 2 \div 2,5$ . Затем возникшая циркуляция переносит турбулентность в нижнюю часть вихревого кольца.

На рис. 7 (см. также цветную вкладку) показаны вертикальные двумерные сечения термика через центр кольца ( $x = 0$ ) на разные моменты времени. Из рисунка видно, что сечение вихревого кольца, хотя еще имеет неправильную форму, с течением времени приближается к форме правильного кольца, становясь все более компактным.

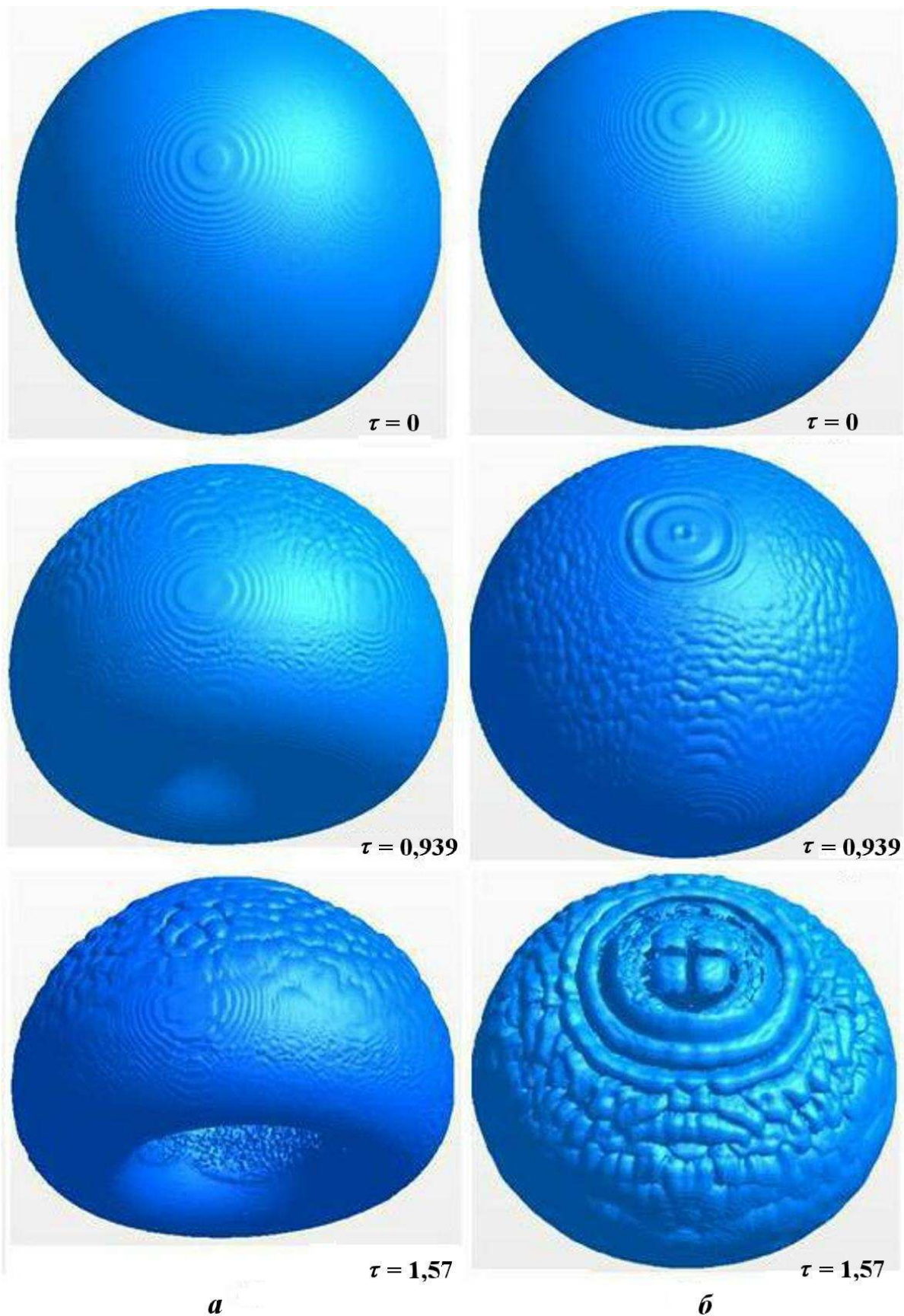


Рис. 2. Изоповерхности объемной доли вещества термика ( $\beta = 0,5$ ) в разные моменты времени на начальной стадии образования вихревого кольца, вид сбоку (а) и сверху (б)



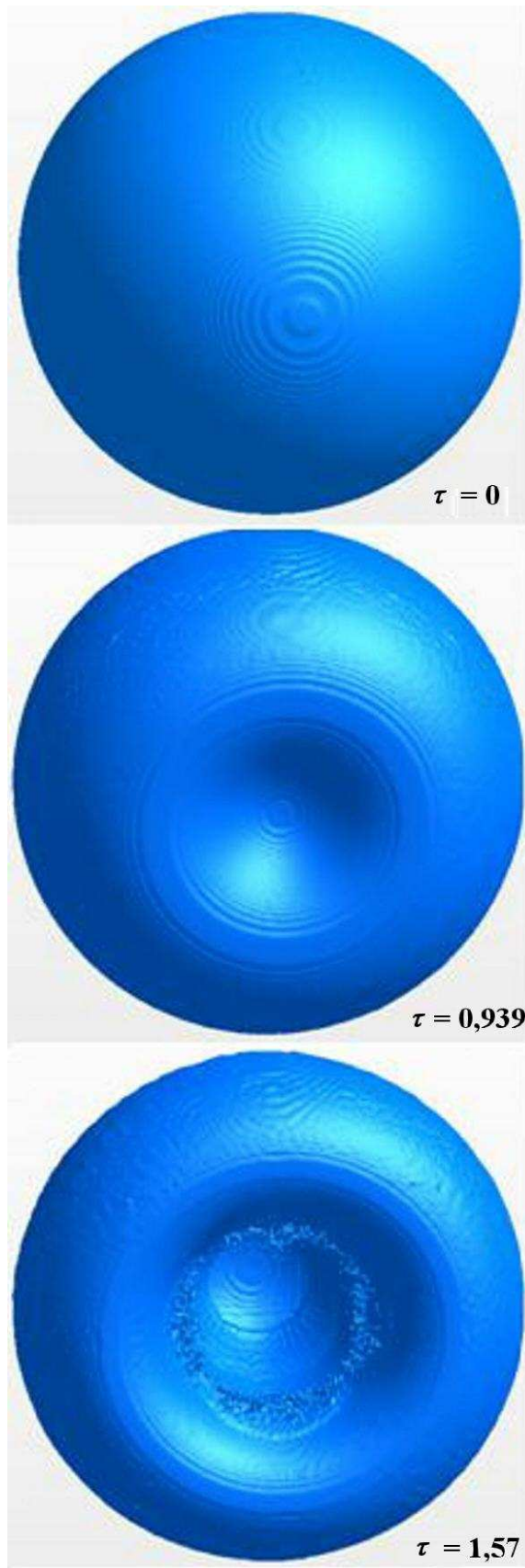


Рис. 3. Изоповерхности объемной доли вещества термика ( $\beta = 0,5$ ) в разные моменты времени на начальной стадии образования вихревого кольца, вид снизу

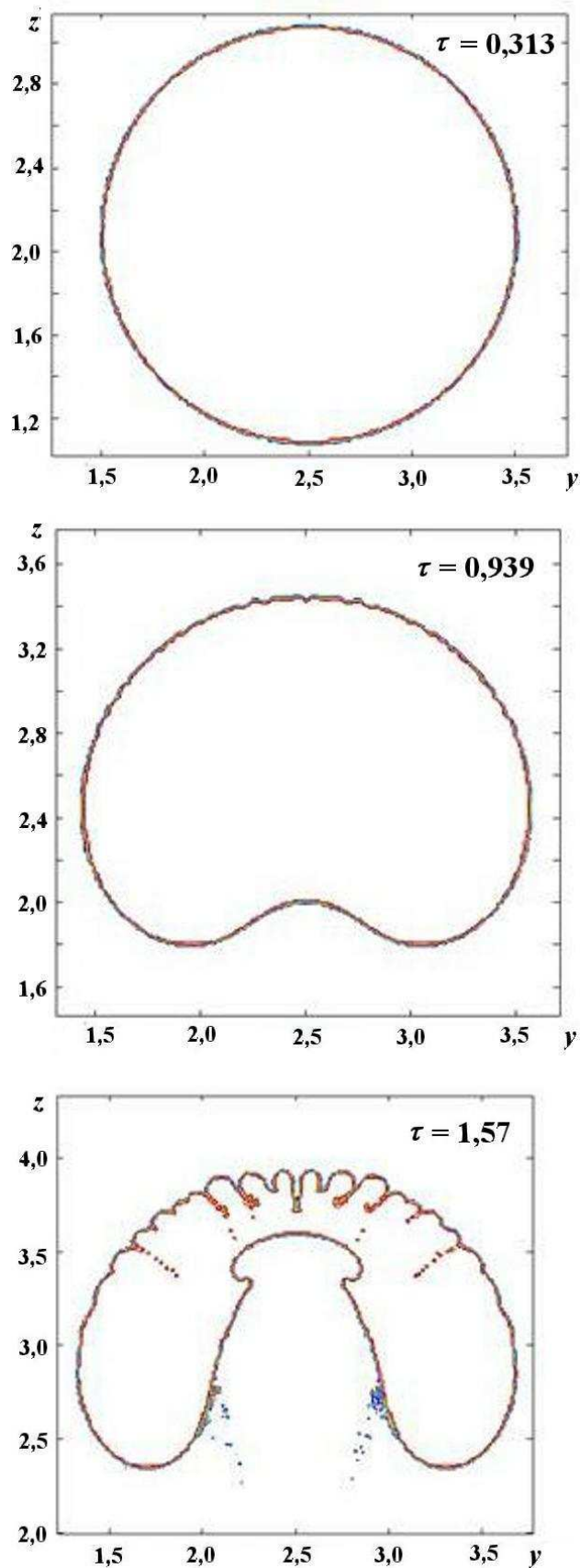


Рис. 4. Двумерные сечения термика ( $x = 0$ ) в разные моменты времени на начальной стадии образования вихревого кольца

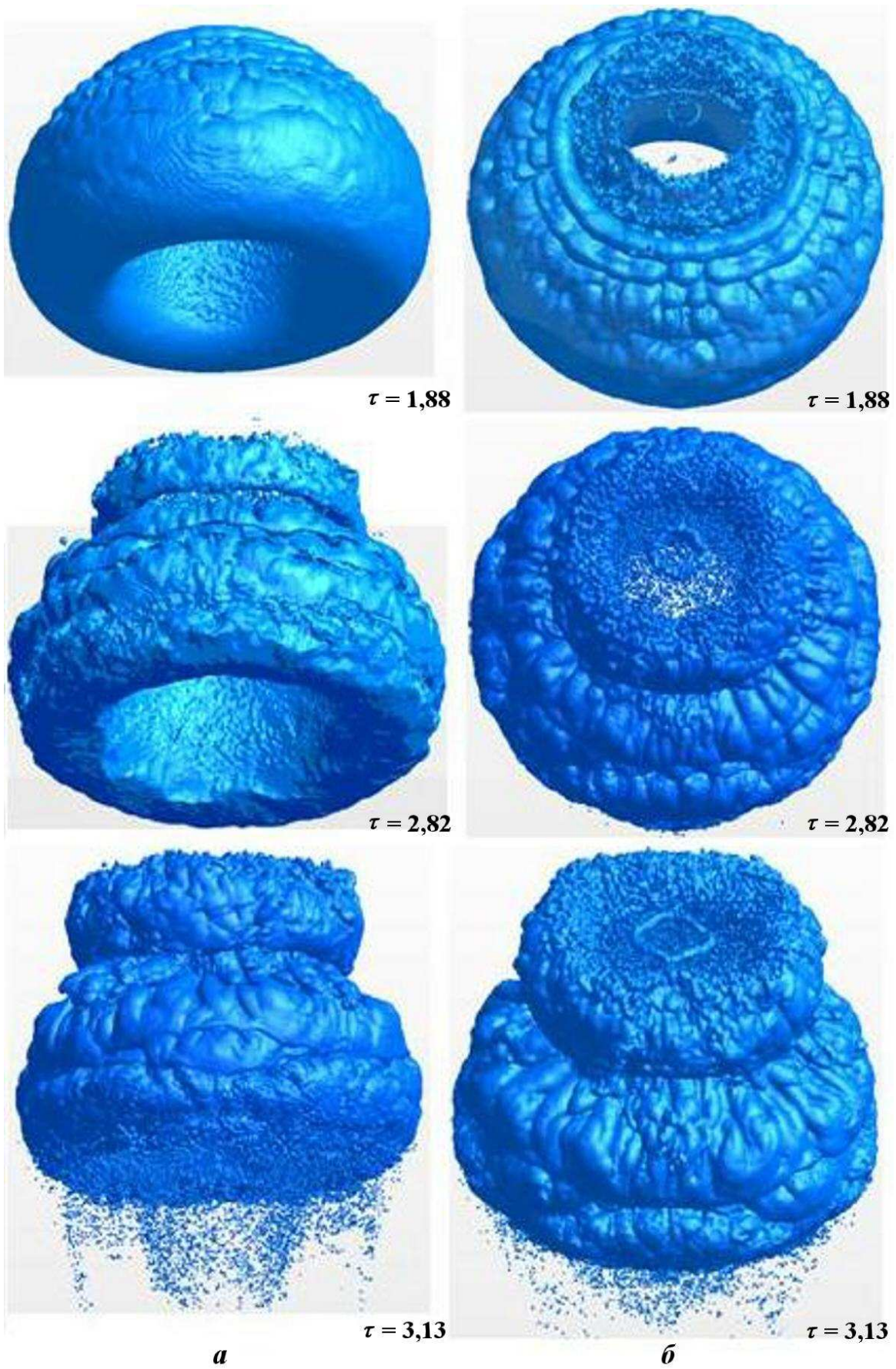


Рис. 5. Исоповерхности объемной доли вещества термика ( $\beta = 0,5$ ) в разные моменты времени на поздней стадии движения вихревого кольца, вид сбоку (а) и сверху (б)



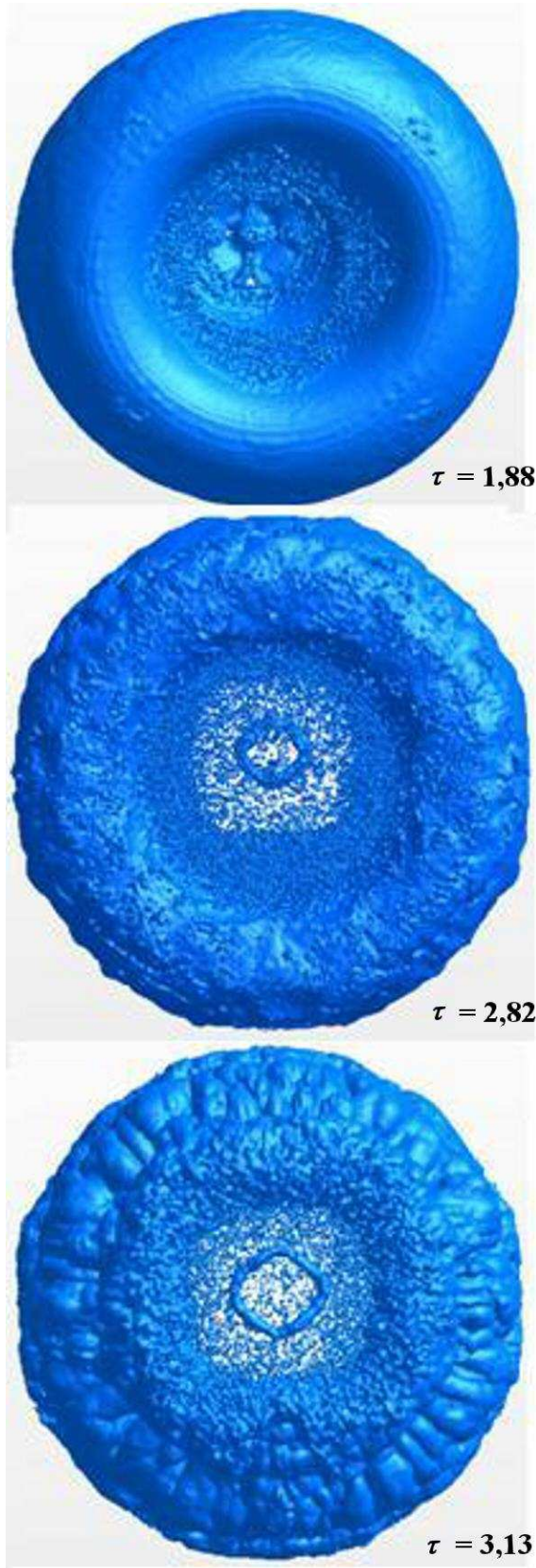


Рис. 6. Изоповерхности объемной доли вещества термика ( $\beta = 0,5$ ) в разные моменты времени на поздней стадии движения вихревого кольца, вид снизу

### 3. Интегральные величины в зависимости от времени

На рис. 8 приводятся временные зависимости интегральных величин — радиуса  $R_c$  и высоты подъема  $H_c$  термика. Они определялись по массовому объему доли вещества термика  $\beta(x, z)$  в ячейках плоскости, проходящей через ось симметрии ( $x = x_0 = 250$  м), по формулам

$$H_c = \frac{\int_{z=0}^Z \int_{x=0}^{X/2} \beta(x, z) (z - z_0) (x_0 - x) dx dz}{\int_{z=0}^Z \int_{x=0}^{X/2} \beta(x, z) (x_0 - x) dx dz};$$

$$R_c = \frac{\int_{z=0}^Z \int_{x=0}^{X/2} \beta(x, z) (x_0 - x)^2 dx dz}{\int_{y=0}^Y \int_{x=0}^{X/2} \beta(x, z) (x_0 - x) dx dz},$$

где  $\beta$  — объемная доля вещества термика;  $x, z$  — горизонтальная координата и высота центра термика;  $x_0, z_0$  — начальные горизонтальная координата и высота центра термика,  $x_0 = X/2$ ,  $z_0 = Z/3$ . Величины на рис. 8 приведены к безразмерному виду:

$$\tau \equiv \frac{t}{t_0}, \quad R_1 \equiv \frac{R_c}{R_0}, \quad H_1 \equiv \frac{H_c}{R_0}, \quad t_0 \equiv \sqrt{\frac{R_0}{g}},$$

где  $R_0$  — начальный радиус сферического термика;  $g$  — ускорение свободного падения.

На рис. 8 показаны также радиус  $R_1(\tau)$  и высота подъема  $H_1(\tau)$  термика, полученные из приближенной аналитической теории (см. Приложение), описывающей геометрические параметры вихревого кольца, начиная с момента  $t_1$  его формирования. Авторы приняли  $\tau_1 = t_1/t_0 = 1$ ;  $\Gamma_1 = 5,6$ . Согласие представляется удовлетворительным.

### Заключение

Выполнен 3D-расчет образования и движения вихревого кольца. Момент его образования  $\tau \approx 1$  оказывается близким к теоретически ожидаемому моменту, который ранее был получен в расчетах в двумерной постановке.

3D-расчет данной работы был проведен до довольно поздней стадии:  $\tau \lesssim 3,75$ . Показано, что на этой стадии интегральные величины — высота подъема и радиус вихревого кольца — достаточ-

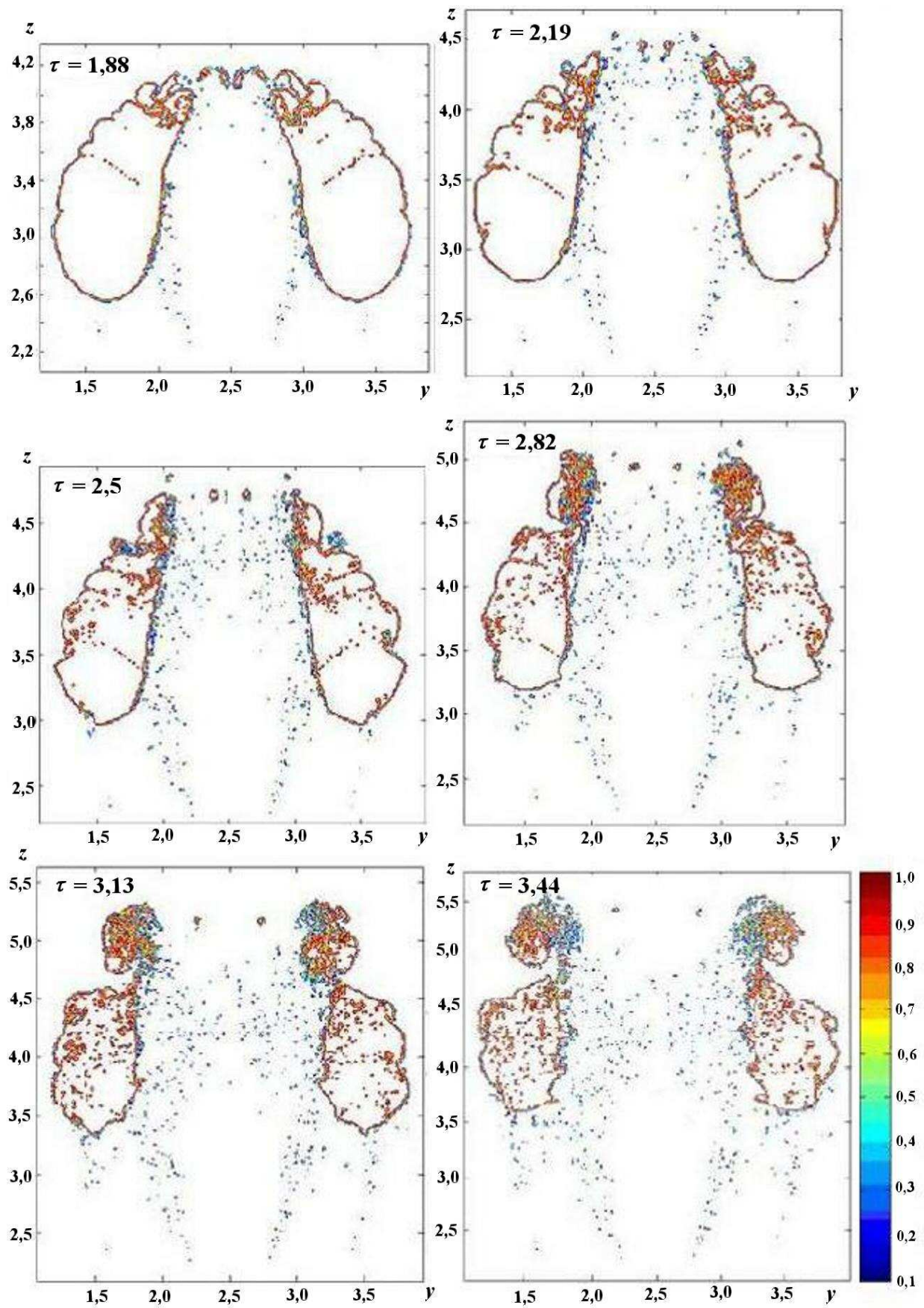


Рис. 7. Двумерные сечения  $x = 0$  в разные моменты времени на поздней стадии движения вихревого кольца

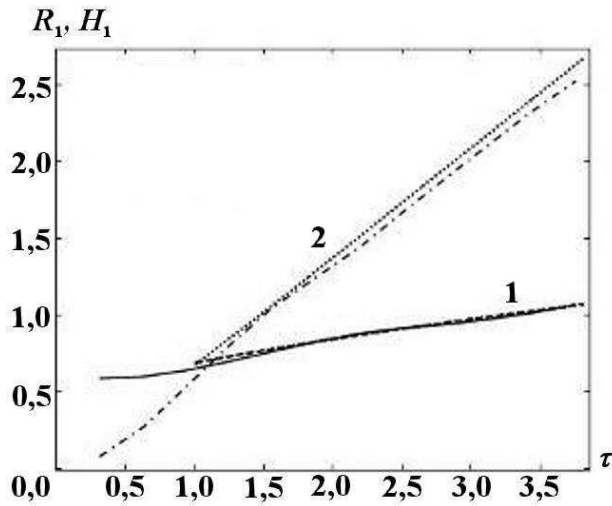


Рис. 8.  $(R, t)$ -диаграммы радиуса (1) и высоты подъема термика (2): —, ---- — численный расчет; ----, .... — приближенная аналитическая теория

но удовлетворительно описываются приближенной аналитической моделью, которая, в свою очередь, согласуется с известными экспериментальными данными.

#### Приложение. Теория движения плавучих вихревых колец в поле тяжести

Полагаем, что плотность  $\rho_0$  в первоначально покоящемся сферическом объеме  $\Omega_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$  много меньше плотности окружающей среды  $\rho_a$ . Завихренность  $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}$  остается сосредоточенной на поверхности плавучего объема, как отмечено в подразд. 2.1.

Полный импульс жидкости согласно [5] можно выразить через радиус  $R_1$  вихревого кольца и плотность, которая принята в [5] равной  $\rho_a$ :

$$P = \rho_a \pi \int_{\Sigma} r^2 \vec{\omega} d\vec{\Sigma} = \rho_a \pi \Gamma R_1^2.$$

Здесь интегрирование ведется по поверхности  $\Sigma$ , натянутой на контур  $C$  (рис. П1);  $d\vec{\Sigma}$  — элемент сечения;  $\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{\omega} d\vec{\Sigma}$ ;  $r$  — расстояние от оси симметрии.

С учетом малой плотности в кольце приведенный к безразмерному виду импульс равен

$$P_1 = \pi \left( \Gamma_1 R_1^2 - \frac{4}{3} u_1 \right) \approx \pi \left( \Gamma_1 R_1^2 - \frac{4}{3} u_{10} \right). \quad (\text{П1})$$

Здесь величины приведены к безразмерному виду: размеры — с помощью масштаба  $R_0$ , скорости — с помощью масштаба  $\sqrt{R_0 g}$ , плотность —



Рис. П1. Область интегрирования

с помощью масштаба  $\rho_a$ ; приведенная величина циркуляции равна

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{R_0 \sqrt{R_0 g}};$$

$u_1$  — скорость подъема центра кольца, а  $u_{10}$  — скорость в момент  $\tau_1$  его образования. В (П1) авторы пренебрегли изменением со временем малого слагаемого с  $u_1$ , т. е. положили  $u_1 \approx u_{10}$ .

Приведенный к безразмерному виду радиус  $R_1$  вихревого кольца определяется выражением

$$R_1^2 = \frac{1}{\Gamma_1} \int_{\Sigma} \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \vec{\omega} d\vec{\sigma}.$$

Приведенная к безразмерному виду сила Архимеда равна

$$F = \frac{4}{3} \pi. \quad (\text{П2})$$

Ее действие приводит к увеличению вихревого импульса

$$\frac{dP_1}{d\tau} = F.$$

Отсюда и из (П1), (П2) получим

$$R_1 = \sqrt{\frac{4}{3\Gamma_1} (\tau + u_{10})}. \quad (\text{П3})$$

Принимаем, что при  $\tau > \tau_1$  сечение вихревого кольца имеет правильную круговую форму радиусом  $a_1 < R_1$ . Из сохранения объема и выражения (П3) следует

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{3\pi R_1}}.$$

Для скорости подъема кольца  $U_1$  (в размерном виде) в [5] получено выражение



$$U_1 \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\Gamma r_1^2} \left( \frac{T}{2\pi\rho_a} + 3J \right), \quad (\text{П4})$$

$$J = \int_{\Sigma} \vec{\omega} (z - z_1) r \frac{dr}{dt} d\Sigma, \quad (\text{П5})$$

где далее в [5] пренебрегалось изменением  $\vec{\omega}$  по сечению кольца.

Рассмотрим произвольную функцию  $\vec{\omega}(\tilde{r})$  (но  $\vec{\omega}$  не зависит от  $\theta$ ), где  $\tilde{r}$  — расстояние от кольцевой оси. Пусть  $\theta$  — угол радиуса-вектора  $\vec{r}$  с направлением оси  $Z$ . Тогда интеграл в (П5) запишем в виде

$$\begin{aligned} J &\approx r_1 \int_{\tilde{r}=0}^a U \tilde{r}^2 \omega(\tilde{r}) \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) d\tilde{r} = \\ &= \pi r_1 \int_{\tilde{r}=0}^a U \tilde{r}^2 \omega(\tilde{r}) d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Здесь  $U(r) = \frac{\gamma(r)}{2\pi r}$  — круговая скорость, где

$$\gamma(\tilde{r}) = 2\pi \int_{\tilde{r}'=0}^{\tilde{r}} \tilde{r}' \omega(\tilde{r}') d\tilde{r}',$$

причем  $\gamma(a_1) = \Gamma$ . Тогда независимо от вида  $\omega(\tilde{r})$  (П6) можно записать

$$\begin{aligned} J &= \pi r_1 \int_{\tilde{r}=0}^a \tilde{r} \omega(\tilde{r}) d\tilde{r} \int_{\tilde{r}'=0}^{\tilde{r}} \tilde{r}' \omega(\tilde{r}') d\tilde{r}' = \\ &= \frac{\pi r_1}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Подставив (П7) в (П4), получим

$$U_1 = \frac{1}{\Gamma r_1^2} \left( \frac{T}{2\pi\rho_a} + \frac{3r_1\Gamma^2}{8\pi} \right). \quad (\text{П8})$$

Если завихренность равномерно распределена по сечению кольца, как это принято в [5], то для кинетической энергии согласно [5]

$$T = \frac{\Gamma^2 r_1 \rho_a}{2} \left( \ln \left( \frac{8r_1}{a} \right) - \frac{7}{4} \right). \quad (\text{П9})$$

Подставив (П9) в (П8), получим

$$U_1 = \frac{\Gamma}{4\pi r_1} \left( \ln \left( \frac{8r_1}{a} \right) - \frac{1}{4} \right).$$

Это выражение совпадает с полученным в [5].

Рассмотрим теперь случай завихренности, распределенной по поверхности кольца, что соответствует условиям задачи, рассматриваемой в данной работе. Для кинетической энергии можно получить тем же способом, что и в [5], выражение

$$T = \frac{\Gamma^2 r_1 \rho_a}{2} \left( \ln \left( \frac{8r_1}{a} \right) - \frac{11}{4} \right).$$

Тогда из (П8) следует

$$U_1 = \frac{\Gamma}{4\pi r_1} \left( \ln \left( \frac{8r_1}{a} \right) - \frac{5}{4} \right),$$

или в безразмерном виде

$$u_1 = \frac{\Gamma_1}{4\pi R_1} \left( \ln \left( \frac{8R_1}{a_1} \right) - \frac{5}{4} \right).$$

Высота подъема  $H_1$  вихревого кольца

$$H_1(\tau) = u_{10}\tau_1 + \int_{\tau_1}^{\tau} u_1 d\tau,$$

где  $u_{10} = u_1(\tau_1)$ .

Вычисленные таким образом величины  $H_1(\tau)$  и  $R_1(\tau)$  показаны на рис. П2 в сравнении с экспериментальными данными [6]. Согласие представляется удовлетворительным.

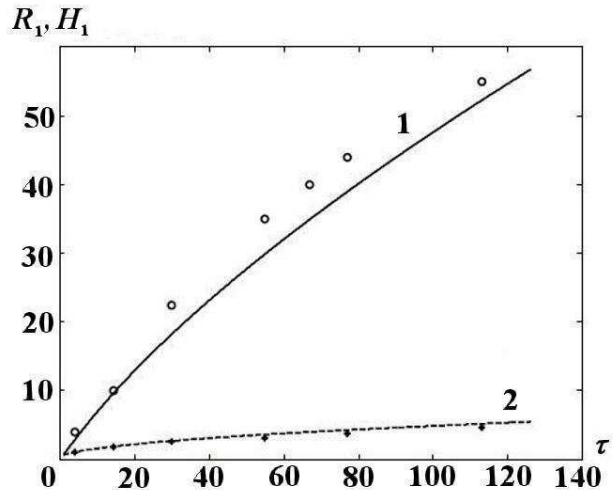


Рис. П2. Высота подъема (1) и радиус (2) вихревого кольца: —, --- — расчет;  $\circ$ ,  $\blacklozenge$  — измерения [6]

### Список литературы

1. Глаголева Ю. П., Жмайло В. А., Мальшиков В. Д. и др. Образование кольцевого вихря при подъеме легкого газа в тяжелом // Числ. методы мех. сплошной среды. 1974. Т. 5, № 1. С. 38—52.

2. *Глаголева Ю. П., Жогов Б. М., Курьянов Ю. Ф. и др.* Основы методики МЕДУЗА численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики // Там же. 1972. Т. 3, № 2. С. 18—55.
3. *Стадник А. Л., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. и др.* Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54—68.
4. *Valters J. K., Davidson J. F.* The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid // J. of Fluid Mech. 1963. Vol. 17, part 3. P. 321—336.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: ОГИЗ — Гостехиздат, 1947.
6. *Тарасов В. Ф.* О движении всплывающего вихревого кольца // Динамика сплошной среды. 1975. Вып. 23.

Статья поступила в редакцию 16.09.15.

3D NUMERICAL SIMULATION OF THE VORTEX RING GENERATION DUE TO A RISING THERMAL IN ATMOSPHERE / O. G. Sin'kova, V. P. Statsenko, Yu. V. Yanilkin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

The generation of a vortex ring due to a rising atmospheric thermal (light cloud) in the earth gravity field is studied numerically. 3D simulations were carried out with the EGAK code. Results of these simulations are compared with the approximate analytical solutions for the motion of a buoyant vortex ring verified using the existing experimental data.

*Keywords:* buoyant volume, field of gravity, vortex ring, turbulence, numerical simulation.

---