

УДК 517.958:536.2

## **$DS_n$ -МЕТОД С TVD-РЕКОНСТРУКЦИЕЙ И СИНТЕТИЧЕСКИМ $P_1SA$ -МЕТОДОМ УСКОРЕНИЯ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ $RZ$ -ГЕОМЕТРИИ**

А. Д. Гаджиев, Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск Челябинской области)

Рассмотрена новая методика для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения. Суть нового подхода состоит в применении метода дискретных ординат с TVD-реконструкцией для решения кинетического уравнения и синтетического метода на основе  $P_1$ -приближения для ускорения сходимости итераций при совместном решении уравнения переноса и уравнения энергии.

*Ключевые слова:* перенос излучения, TVD-реконструкция, итерационный метод.

### **Введение**

Разработка эффективного численного метода решения уравнения переноса теплового излучения совместно с уравнением энергии представляет собой сложную проблему. Связано это с тем, что для решения кинетического уравнения переноса излучения обычно требуется консервативная схема второго порядка аппроксимации с монотонными свойствами, что плохо согласуется между собой. Как известно [1], среди линейных разностных схем для уравнения переноса нет монотонных схем второго порядка, поэтому при построении надо ориентироваться на нелинейную схему.

Вторая проблема возникает при совместном решении уравнения переноса с уравнением энергии, где приходится применять итерационный метод. Но метод простых итераций может сходиться очень медленно. В работе [2] дана оценка спектрального радиуса оператора перехода для простых итераций. Показано, что спектральный радиус в зависимости от сечений может стать сколь угодно близким к единице, что означает крайне медленную сходимость итераций. Поэтому необходимо ускорение сходимости итераций.

В данной работе для решения отмеченных проблем предлагается следующий подход. Уравнение переноса излучения решается по нелинейной TVD-схеме [3], в которой на плоскости  $RZ$  в каждой счетной ячейке для интенсивности излучения применяется кусочно-линейная реконструкция. При этом в качестве TVD-ограничителей (лимитеров) используются либо одномерные ограничители Чакравати—Ошера [4] по сеточным каналам, либо двумерные TVD-ограничители Барт—Джесперсена [5]. Последний носит более общий характер, он применим не только для структурированных сеток, но и для неструктурированных. Сочетание кусочно-линейной реконструкции с TVD-ограничителем обеспечивает второй порядок аппроксимации и монотонные свойства. При этом монотонность трактуется в смысле принадлежности к классу TVD-схем [6].

Что касается зависимости интенсивности от угловой переменной, то она в данной работе обрабатывается по DD/St-схеме метода дискретных ординат [7]. Счет в каждой счетной ячейке проводится по DD-схеме второго порядка, и лишь при получении отрицательного решения осуществляется пересчет данной ячейки по монотонной St-схеме первого порядка. По угловой переменной также

можно было провести кусочно-линейную TVD-реконструкцию. Но, как показали численные расчеты, DD/St-схема несколько предпочтительнее по точности, а монотонность решения при этом удовлетворительная.

Следует отметить, что кусочно-линейная TVD-реконструкция, применяемая в данной работе, позволяет сохранять в новом методе экономичный бегущий рекуррентный счет, характерный для методов дискретных ординат. Достигается это тем, что интенсивность в ячейке представляется в виде суммы значения в центре ячейки, которое учитывается неявно, и кусочно-линейной добавки, рассчитываемой по известным значениям величин с предыдущего шага по времени. При этом значение в центре ячейки рассчитывается по рекуррентной бегущей схеме подобно  $DS_n$ -методу. В работе [8] для решения уравнения переноса теплового излучения также применяется  $DS_n$ -метод с TVD-реконструкцией, а кусочно-линейная добавка в ячейке для интенсивности излучения, определяемая по известным значениям интенсивности с предыдущей итерации, умножается на интенсивность в центре ячейки.

Для решения второй проблемы — ускорения сходимости итераций при совместном решении уравнения переноса излучения с уравнением энергии — в работах [9, 10] предлагается использовать ВДМ-метод. Он относительно прост и весьма эффективен. Однако, как показано в [10], неустрашимым его недостатком является ухудшение сходимости итераций в оптически плотных средах на подробной пространственной сетке. В силу этого в данной работе предлагается применять  $P_1SA$ -метод [11–13], который слабее зависит от шагов по времени и пространству и в котором основная тяжесть итераций перекладывается с кинетического уравнения на приближение более низкого уровня, каким является  $P_1$ -приближение.

Но здесь возникают новые проблемы: как построить монотонную схему для гиперболической системы  $P_1$ -уравнений и какую методику применять для совместного решения  $P_1$ -уравнений с уравнением энергии. Кроме того, для достижения сходимости к кинетическому решению необходимо обеспечивать согласованность разностных  $P_1$ -уравнений со схемой решения кинетического уравнения. В данной работе для решения системы  $P_1$ -уравнений применяется неявный конечно-объемный метод, в котором балансные  $P_1$ -уравнения в ячейке дополняются соотношениями, связывающими значения плотности излучения и компонент потока на гранях ячеек с их аналогами в центрах прилегающих ячеек. В качестве таких дополнительных соотношений берется предложенный Майером [14] римановский решатель в узловых точках. В работе [15] используется неявный римановский решатель для гиперболической системы уравнений газодинамики. Как оказалось, данный подход в неявном варианте хорошо применим и для  $P_1$ -уравнений. Для согласования разностной схемы  $P_1$ -уравнений со схемой решения кинетического уравнения используется четырехшаговая процедура Ларсена [16, 17].

При совместном решении системы  $P_1$ -уравнений и энергетического уравнения применяются два подхода. В первом из них используется прямой метод, аналогичный методу Фотрие [18]. В данном подходе неявно рассчитываются плотность излучения и компоненты потока в центрах ячеек, при этом неявно учитывается межгрупповой обмен. Но для двумерной геометрии этот метод не является безусловно устойчивым — возникает ограничение на шаг по времени [19, 20]. Второй подход основан на применении ВДМ-метода к системе  $P_1$ -уравнений и уравнения энергии. Этот метод является безусловно устойчивым, и с его помощью достигается минимизация кинетических итераций за счет перекладывания их тяжести на итерации по системе  $P_1$ -уравнений.

## 1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение теплового излучения, состоит из спектрального уравнения переноса в кинетической постановке и уравнения энергии, описывающего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов. Система уравнений в  $RZ$ -геометрии для изотропного рассеяния выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{I_\nu}{\rho} \right) + \vec{\Omega} \nabla I_\nu + \alpha_\nu I_\nu &= \frac{\alpha_{c\nu}}{4\pi} B_\nu + \frac{\alpha_s}{4\pi} U_\nu; \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_0^\infty \int_{\vec{\Omega}} \alpha_{c\nu} \left( I_\nu - \frac{1}{4\pi} B_\nu \right) d\vec{\Omega} d\nu. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь используются следующие обозначения:  $t$  — время;  $\vec{r} = (r, z)$  — радиус-вектор;  $\rho(\vec{r}, t)$  — плотность вещества;  $\vec{\Omega} = (\mu = \cos \theta, \xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi)$  — единичный вектор в направлении полета фотона, где  $\theta$  — угол между  $\vec{\Omega}$  и осью  $Z$ ,  $\phi$  — угол между проекцией  $\vec{r}$  и проекцией  $\vec{\Omega}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $Z$ ;  $\nu$  — энергия фотонов;  $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \nu, t)$  — спектральная интенсивность излучения;  $\vec{\Omega} \nabla I_\nu = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi I_\nu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \mu I_\nu) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\eta I_\nu)$  — оператор переноса в осесимметричном случае;  $\alpha_{c\nu}$  — коэффициент поглощения;  $\alpha_s$  — коэффициент рассеяния;  $\alpha_\nu = \alpha_{c\nu} + \alpha_s$  — коэффициент ослабления;  $B_\nu(T, \nu)$  — интенсивность равновесного излучения,  $T(\vec{r}, t)$  — температура среды;  $U_\nu = \int_{\vec{\Omega}} I_\nu d\vec{\Omega}$  — спектральная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света  $c$ ;  $E(T)$  — удельная внутренняя энергия вещества.

## 2. Разностная аппроксимация

Проведя интегрирование системы (1) в пространстве  $(t^n, t^{n+1}) \times D_{i+1/2, j+1/2} \times (\phi_l, \phi_{l-1}) \times (\mu_{m+1}, \mu_m)$  и используя формулу Гаусса—Остроградского, получим в многогрупповом приближении систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1}}{c\tau} \left( \left( \frac{I_g}{\rho} \right)^{n+1} - \left( \frac{I_g}{\rho} \right)^n \right) + \vec{\Omega} \nabla_h I_g^{n+1} + \alpha_g^{n+1} I_g^{n+1} &= Q_g^{n+1}; \\ \rho^{n+1} \frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} &= \sum_g \alpha_{cg}^{n+1} (U_g^{n+1} - B_g^{n+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\tau = t^{n+1} - t^n$ ;  $\vec{\Omega} \nabla_h I$  — разностный оператор переноса;  $Q_g^{n+1} = \frac{1}{4\pi} (\alpha_{cg}^{n+1} B_g^{n+1} + \alpha_{sg}^{n+1} U_g^{n+1})$ ; индекс  $g$  означает принадлежность группе  $g$  ( $g = 1, \dots, G$ ).

Повышение порядка аппроксимации системы (2) с сохранением монотонности будем проводить на основе TVD-реконструкции St-схемы. В многомерном случае существуют различные определения вариации функции [21]. По этой причине методы многомерной реконструкции не имеют строгого обоснования. Применимость TVD-методологии в каждом конкретном случае должна быть проверена. В данной работе рассмотрено два способа повышения порядка аппроксимации на основе TVD-реконструкции.

В первом способе используется TVD-реконструкция, рассмотренная в [13] для решения одномерного уравнения переноса. С этой целью в соответствии с TVD-методологией в качестве производных по всем направлениям берутся одномерные ограничители, которые используют односторонние производные. В данной работе используются ограничители Чакравати—Ошера [4] и minmod [21].

Во втором способе повышения порядка аппроксимации применяется TVD-реконструкция, рассмотренная в [15] для двумерной системы уравнений газовой динамики на неструктурированной сетке. Эта TVD-реконструкция сложнее предыдущей, но не связана с канальной структурой структурированных сеток.

### Итерационный метод $P_1SA$

Для ускорения сходимости итераций при совместном решении уравнения переноса и уравнения энергии предлагается применять итерационный метод  $P_1SA$  [12, 13, 17]. Итерационный метод на каждой внешней итерации ( $\sigma$  — итерационный индекс) состоит из двух этапов.

На первом этапе методом простой итерации решается кинетическое уравнение с известной правой частью, взятой с предыдущей внешней итерации, и уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \frac{I_g^{\sigma+1/2} - I_g^n}{c\tau} + \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} I_g \right)^{\sigma+1/2} + \alpha^\sigma I_g^{\sigma+1/2} &= Q_g^\sigma; \\ \frac{E^{\sigma+1/2} - E^n}{\tau} &= \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} \left( U_g^{\sigma+1/2} - B_g^{\sigma+1/2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение энергии решаем методом Ньютона, линеаризовав внутреннюю энергию и функцию Планка по температуре. Из линеаризованного уравнения энергии на внутренних итерациях  $\nu$  первого этапа находим температуру:

$$T^{\nu+1} = T^\nu + \frac{E^n - E^\nu + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^\sigma \left( U_g^{\sigma+1/2} - B_g^\nu \right)}{E_T^\nu + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^\sigma B_{gT}^\nu},$$

где  $E_T, B_T$  — производные по  $T$  энергии и функции Планка.

При сходимости итераций  $\nu$  получаем  $T^{\sigma+1/2} = T^{\nu+1}$  и переходим на второй этап.

На втором этапе решается согласованная с кинетическим уравнением из (3) система  $P_1$ -уравнений в поправочной форме. Для согласования применим четырехшаговую процедуру Ларсена [16]. В соответствии с ней систему  $P_1$ -уравнений возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{U_g^{\sigma+1} - U_g^n}{c\tau} + \operatorname{div}_h \left( \vec{\Phi}_g^{\sigma+1} \right) + \alpha_{cg}^\sigma U_g^{\sigma+1} &= \alpha_{cg} B_g^{\sigma+1} + \Delta_{g,0}^{\sigma+1/2}; \\ \frac{\vec{\Phi}_g^{\sigma+1} - \vec{\Phi}_g^n}{c\tau} + \frac{1}{3} \operatorname{grad}_h \left( U_g^{\sigma+1} \right) + (\alpha_s^\sigma + \alpha_{cg}^\sigma) \vec{\Phi}_g^{\sigma+1} &= \Delta_{g,1}^{\sigma+1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\operatorname{div}_h, \operatorname{grad}_h$  — разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов, определенные как

$$\left( \operatorname{div}_h \vec{\Phi} \right)_i \equiv \frac{1}{\Delta V_i} \left[ \sum_k \left( R \vec{n} \Delta l \vec{\Phi} \right)_k \right]_i; \quad \left( \operatorname{grad}_h U \right)_i \equiv \frac{1}{\Delta S_i} \left[ \sum_k \left( \vec{n} \Delta l U \right)_k \right]_i,$$

где  $\Delta V_i, \Delta S_i$  — объем и площадь  $i$ -й ячейки;  $\vec{n}_k$  — внешняя нормаль к  $k$ -й грани ячейки;  $\Delta l_k$  — длина грани  $k$ ;  $R_k$  — радиус на грани  $k$ ;  $U_i, \vec{\Phi}_i$  — значения плотности излучения и потока в центре  $i$ -й ячейки,  $U_k, \vec{\Phi}_k$  — значения этих величин на грани  $k$ . Дополнительные члены

$$\begin{aligned} \Delta_{g,0}^{\sigma+1/2} &\equiv \operatorname{div}_h \vec{\Phi}_g^{\sigma+1/2} - \int_{4\pi} \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} I_g^{\sigma+1/2} \right) d\vec{\Omega}; \\ \Delta_{g,1}^{\sigma+1/2} &\equiv \frac{1}{3} \operatorname{grad}_h U_g^{\sigma+1/2} - \int_{4\pi} \operatorname{div}_h \left( \vec{\Omega} I_g^{\sigma+1/2} \right) \vec{\Omega} d\vec{\Omega}, \end{aligned} \quad (5)$$

вычисляемые по значениям  $I_g^{\sigma+1/2}$  с кинетического этапа, представляют собой корректирующие добавки, обеспечивающие совпадение решения ускоряющей системы (4) с кинетическим аналогом при ускорении сходимости итераций.

От системы  $P_1$ -уравнений (4) перейдем к поправочной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U_g^{\sigma+1}}{c\tau} + \operatorname{div} \left( \delta \vec{\Phi}_g^{\sigma+1} \right) + \alpha_{cg}^{\sigma} \delta U_g^{\sigma+1} &= \alpha_{cg}^{\sigma} \delta B_g^{\sigma+1} + \delta Q_g^{\sigma+1/2}; \\ \frac{\delta \vec{\Phi}_g^{\sigma+1}}{c\tau} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} (\delta U_g^{\sigma+1}) + (\alpha_s^{\sigma} + \alpha_{cg}^{\sigma}) \vec{\Phi}_g &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\delta U^{\sigma+1} = U^{\sigma+1} - U^{\sigma+1/2}$ ;  $\delta \vec{\Phi}^{\sigma+1} = \vec{\Phi}^{\sigma+1} - \vec{\Phi}^{\sigma+1/2}$ ;  $\delta B^{\sigma+1} = B^{\sigma+1} - B^{\sigma+1/2}$ ;  $\delta Q_g^{\sigma+1/2} = \alpha_{cg}^{\sigma} \times (B_g^{\sigma+1/2} - B_g^{\sigma}) + \alpha_s^{\sigma} (U_g^{\sigma+1/2} - U_g^{\sigma})$ .

Заметим, что  $P_1$ -система (6) не содержит корректирующих добавок  $\Delta_{g,0}^{\sigma+1/2}$ ,  $\Delta_{g,1}^{\sigma+1/2}$ , их не нужно вычислять. В этом состоит преимущество системы уравнений в поправочной форме.

Дополним систему (6) уравнением энергии в поправочной форме

$$\frac{\delta E^{\sigma+1}}{\tau} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^{\sigma} (\delta U_g^{\sigma+1} - \delta B_g^{\sigma+1}), \quad (7)$$

где  $\delta E^{\sigma+1} = E^{\sigma+1} - E^{\sigma+1/2}$ .

В качестве граничного условия для  $P_1$ -системы на внешней границе  $\Gamma$  рассматриваемой области  $D$ , где решается краевая задача, применим условия Маршака [22]. В соответствии с работой [16] граничное условие тоже должно быть дополнено корректирующей добавкой для согласования с кинетическим решением. При переходе к поправочной форме граничное условие для системы (6) примет однородную форму без корректирующей добавки:

$$-\frac{1}{4} \delta U_g^{\sigma+1} + \frac{1}{2} \delta \vec{\Phi}_g^{\sigma+1} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{для } (r, z) \in \Gamma. \quad (8)$$

Система уравнений (6)–(8) не является замкнутой. Нужны соотношения, связывающие  $\delta U_g^{\sigma+1}$ ,  $\delta \vec{\Phi}_g^{\sigma+1}$  в центрах ячеек и на их гранях. От этих соотношений зависит точность и монотонность численного метода. Поскольку система уравнений (6) представляет собой гиперболическую систему, то при построении дополнительных соотношений естественно использовать инварианты Римана, связывающие  $U$ ,  $\vec{\Phi}$  на гранях ячеек с их аналогами в центрах примыкающих ячеек. В работе [14] Майером предложены хорошо зарекомендовавшие себя новые соотношения связи для гиперболической системы уравнений газодинамики, обеспечивающие монотонность в рамках схемы первого порядка аппроксимации. Это достигается благодаря направленному тензорному характеру аппроксимационной вязкости. В [15] соотношения Майера используются в неявном виде. В применении к  $P_1$ -системе (6) дополнительные соотношения из [15] принимают вид

$$(\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1} + \sqrt{3} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{i_n}^{\sigma+1} \cdot \vec{n}_{\vec{j}_k, i_n} = (\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} + \sqrt{3} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{\vec{j}_k}^{\sigma+1} \cdot \vec{n}_{\vec{j}_k, i_n}, \quad (9)$$

$$(\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1} + \sqrt{3} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{i_n}^{\sigma+1} \cdot \vec{n}_{\underline{j}_k, i_n} = (\delta U_g)_{\underline{j}_k, i_n}^{\sigma+1} + \sqrt{3} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{\underline{j}_k}^{\sigma+1} \cdot \vec{n}_{\underline{j}_k, i_n}, \quad n \in C(j_k);$$

$$\sum_{n \in C(j_k)} \left( (\vec{n} \Delta l)_{\underline{j}_k, i_n} (\delta U_g)_{\underline{j}_k, i_n}^{\sigma+1} + (\vec{n} \Delta l)_{\vec{j}_k, i_n} (\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} \right) = 0. \quad (10)$$

Здесь центры ячеек обозначены через  $i_n$ , а узлы через  $j_k$  (рис. 1); индекс  $\vec{j}_k$  означает половину грани  $s_k$  от узла  $j_k$ ,  $\underline{j}_k$  — половину соседней грани  $s_{k-1}$ , тоже от узла  $j_k$ ;  $\vec{n}_{s_k}$  — внешняя нормаль к грани  $s_k$ ;  $\vec{n}_{\vec{j}_k, i_n} = \vec{n}_{s_k}$ ,  $\vec{n}_{\underline{j}_k, i_n} = \vec{n}_{s_{k-1}}$  — единичные нормали к половинам граней, примыкающих к узлу  $j_k$ ;  $\Delta l_{s_k}$  — длина грани  $s_k$ ;  $\Delta l_{\vec{j}_k, i_n} = 0,5 \Delta l_{s_k}$ ,  $\Delta l_{\underline{j}_k, i_n} = 0,5 \Delta l_{s_{k-1}}$  — длины половин граней, примыкающих к узлу  $j_k$ . Упорядоченное множество ячеек, окружающих узел  $j_k$ , обозначено через  $C(j_k)$ .

Соотношения (9) представляют собой инварианты Римана вдоль выделенных направлений  $\vec{n}_{\vec{j}_k, i_n}$  и  $\vec{n}_{\underline{j}_k, i_n}$  соответственно, приходящие из центра ячейки  $i_n$  в узел  $j_k$ . При этом узловое значения  $U_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1}$ ,  $U_{\underline{j}_k, i_n}^{\sigma+1}$  соответствуют плотности излучения в  $j_k$  для разных нормалей,  $\vec{\Phi}_{j_k}^{\sigma+1}$  — поток в узле.

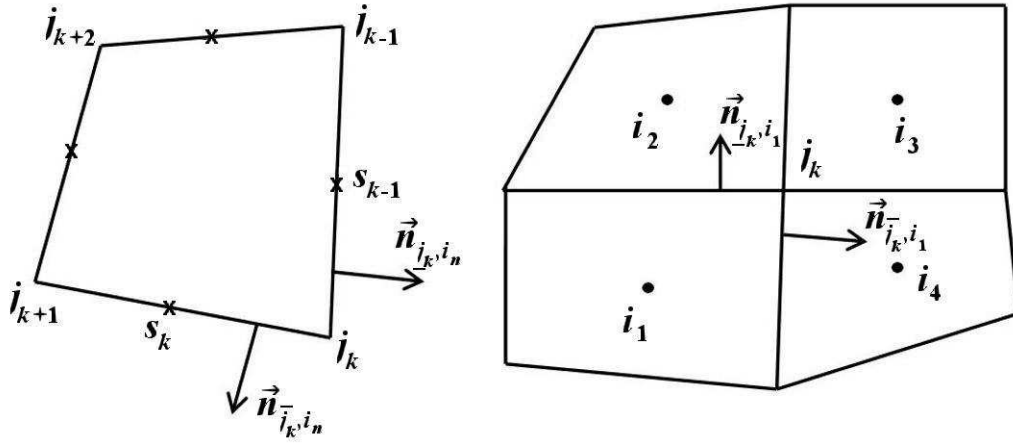


Рис. 1. Обозначения для пространственной ячейки

Уравнение (10) по аналогии с [14] выводится на основании интегрального закона сохранения для всей рассматриваемой области  $D$  [23]. Поскольку соотношения (9), (10) сформированы для поправок, то они не содержат корректирующих добавок.

Уравнения (9), (10) являются уравнениями относительно неизвестных величин  $(\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1}$ ,  $(\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1}$ ,  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{j_k, i_n}^{\sigma+1}$ ,  $n \in C(j_k)$ . Число неизвестных  $2C(j_k) + 2$  равно числу уравнений, т. е. система замкнута. Для решения системы уравнений подставим в уравнение (10) выражения для  $(\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1}$ ,  $(\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1}$  из системы (9). Тогда для потока в узле получим выражения через  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{\sigma+1}$ ,  $(\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1}$  в центрах примыкающих ячеек:

$$(\delta \vec{\Phi}_g)_{j_k}^{\sigma+1} = M_{j_k}^{-1} \sum_{n \in C(j_k)} \left( M_{j_k, i_n} (\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{\sigma+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1} \vec{n}_{j_k, i_n} \right), \quad (11)$$

где  $M = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_1 n_2 & n_2^2 \end{pmatrix}$ ;  $M_{j_k, i_n} = (M \Delta l)_{\vec{j}_k, i_n} + (M \Delta l)_{\vec{j}_k, i_n}$ ;  $\vec{n}_{j_k, i_n} = (\vec{n} \Delta l)_{\vec{j}_k, i_n} + (\vec{n} \Delta l)_{\vec{j}_k, i_n}$ ;  $M_{j_k} = \sum_{n \in C(j_k)} M_{j_k, i_n}$ . Первое слагаемое в скобках (11) есть интерполяция на узел потоков  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{\sigma+1}$  из окружающих ячеек, а второе слагаемое представляет собой диссипативную добавку вида  $h \text{grad}(\delta U_g)_{j_k}$ .

Определяя поток в узле  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{j_k}^{\sigma+1}$  по формуле (11), плотности излучения можно вычислять из уравнений (9):

$$\begin{aligned} (\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} &= (\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1} - \sqrt{3} \left( (\delta \vec{\Phi}_g)_{j_k}^{\sigma+1} - (\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{\sigma+1} \right) \cdot \vec{n}_{\vec{j}_k, i_n}; \\ (\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} &= (\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1} - \sqrt{3} \left( (\delta \vec{\Phi}_g)_{j_k}^{\sigma+1} - (\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{\sigma+1} \right) \cdot \vec{n}_{\vec{j}_k, i_n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь первые слагаемые в правых частях представляют собой просто перенос  $(\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1}$  на узел, а вторые слагаемые дают направленную диссипацию.

В уравнениях (6) надо знать значения величин  $(\delta U_g)_{s_k}$ ,  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{s_k}$  в центрах граней. Будем их рассчитывать на основании (11), (12) по формулам интерполяции [14]:

$$\begin{aligned} (\delta U_g)_{s_k, i_n}^{\sigma+1} &= \frac{1}{2} \left( (\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} + (\delta U_g)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} \right); \\ R_{s_k} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{s_k, i_n}^{\sigma+1} &= \frac{1}{2} \left( R_{\vec{j}_k} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} + R_{\vec{j}_k} \left( \delta \vec{\Phi}_g \right)_{\vec{j}_k, i_n}^{\sigma+1} \right), \end{aligned}$$

где  $R_{\vec{j}_k} = (2r_{j_k} + r_{j_{k+1}}) / 3$ ;  $R_{\vec{j}_k} = (2r_{j_k} + r_{j_{k-1}}) / 3$ .

Далее, подставив полученные формулы в систему уравнений (6), получим разностные уравнения относительно  $(\delta U_g)_{i_n}^{\sigma+1}$ ,  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{\sigma+1}$  в центрах данной ячейки и всех ее соседей, имеющих с ней общий узел.

Полученную систему разностных уравнений с уравнением энергии (7) будем решать итерационно в два полуэтапа ВДМ-методом [9].

На первом полуэтапе, задавая известное значение величины  $\alpha_{cg}^\sigma (\delta B_g)^k$  в правой части уравнения (6), находим  $(\delta U_g)_{i_n}^{k+1/2}$ ,  $(\delta \vec{\Phi}_g)_{i_n}^{k+1/2}$ . При этом сетки могут быть как структурированными, так и неструктурированными. Для неструктурированных сеток используем решатель BICGSTAB [24] (далее по тексту P<sub>1</sub>SA–BICGSTAB). Для структурированных сеток можно применять более экономичные методы матричной и потоковой прогонок в сочетании с методом расщепления (далее P<sub>1</sub>SA–ВДМ).

На втором полуэтапе система поправочных уравнений решается отдельно в каждой ячейке. При этом в качестве граничного условия на гранях ячейки берутся односторонние потоки с известной итерации  $k + 1/2$ , т. е. задаются значения входящих потоков

$$X \delta U_{s_k}^{k+1} - Y \left( \delta \vec{\Phi}_{s_k}^{k+1} \cdot \vec{n}_{s_k} \right) = \delta Z_{s_k}^{k+1/2} \equiv X \delta U_{s_k}^{k+1/2} - Y \left( \delta \vec{\Phi}_{s_k}^{k+1/2} \cdot \vec{n}_{s_k} \right), \quad k = 1, \dots, k(i_n), \quad (13)$$

где  $k(i_n)$  — число граней ячейки  $i_n$ ;  $X = 1/4$ ;  $Y = 1/2$ .

Вычислим значения входящих потоков (инвариантов) по их значениям в центре ячейки. Тогда получим уравнение

$$X \delta U_{s_k}^{k+1} + Y \left( \delta \vec{\Phi}_{s_k}^{k+1} \cdot \vec{n}_{s_k} \right) = X \delta U_{i_n}^{k+1} + Y \left( \delta \vec{\Phi}_{i_n}^{k+1} \cdot \vec{n}_{s_k} \right), \quad k = 1, \dots, k(i_n). \quad (14)$$

Из уравнений (13), (14) выразим  $\delta U_{s_k}^{k+1}$ ,  $\delta \vec{\Phi}_{s_k}^{k+1} \cdot \vec{n}_{s_k}$  через известные  $\delta Z_{s_k}^{k+1/2}$  и искомые  $\delta U_{i_n}^{k+1}$ ,  $\delta \vec{\Phi}_{i_n}^{k+1}$  в центре ячейки. Подставляя полученные выражения  $\delta U_{s_k}^{k+1}$ ,  $\delta \vec{\Phi}_{s_k}^{k+1} \cdot \vec{n}_{s_k}$  в систему поправочных уравнений и исключая из них поток, получаем явную формулу для плотности излучения:

$$(q^0 + d) \delta U_{i_n}^{k+1} = \left( \alpha_{cg} \delta B_g^{k+1} \right)_{i_n} + \left( \delta Q_g^{\sigma+1/2} \right)_{i_n} + \left( \delta P^{k+1/2} \right)_{i_n}, \quad (15)$$

где  $q^0 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c$ ;  $d = \frac{X \sum_{k=1}^4 (r\Delta l)_{s_k}}{24\Delta V_{i_n}}$ ;  $\delta P$  — поправочный коэффициент, определяемый через односторонние потоки.

Подставив полученное выражение  $\delta U_{i_n}^{k+1}$  в уравнение энергии второго полуэтапа, получим в линеаризованном виде формулу для поправочной температуры:

$$\delta T^{\hat{\nu}+1} = \frac{-\delta E^{\hat{\nu}} + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^\sigma \left( \frac{\delta Q_g^{\sigma+1/2} + \delta P^{k+1/2}}{q_g^0 + d} - b_g^{\sigma+1/2} \delta B_g^{\hat{\nu}} \right)}{E_T^{\hat{\nu}} + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^\sigma b_g^{\sigma+1/2} B_{gT}^{\hat{\nu}}}, \quad b_g^{\sigma+1/2} = \frac{1}{q_g^0 + d} + d,$$

где  $\hat{\nu}$  — итерации Ньютона по нелинейности  $E(T)$  и  $B_g(T)$ . При сходимости итераций  $\hat{\nu}$  получаем  $T^{\sigma+1} = T^{\hat{\nu}+1}$ . При сходимости итераций  $\sigma$  получаем на шаге плотности излучения  $U^{n+1} = U^{\sigma+1} = U^{\sigma+1/2} + \delta U^{\sigma+1}$ .

### Численные расчеты

В данной работе приводятся результаты расчетов четырех тестовых задач.

Первые три задачи построены на основе задач Флека [25]. Начальная температура равна  $T^0 = 0,00001$  кэВ, плотность вещества  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, уравнение состояния  $E = 0,81T$ , рассеяние отсутствует ( $\alpha_s = 0$ ). По угловым переменным расчеты проводились на квадратуре  $ES_8$ . На внутреннюю границу падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества  $T = 1$  кэВ, на внешней задается условие *свободной поверхности*. На остальных границах заданы условия отражения. По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке  $\varepsilon_g = 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3,0; 4,0; 5,0; 7,0; 9,0; 11,0; 15,0$  кэВ (число групп 15).

Четвертая задача построена на основе работы [26], где рассматривается возникновение *шахматного эффекта* в градиентных схемах.

**Задача 1.** Задача построена на основе второй задачи Флека [25] в двумерной осесимметричной постановке. В этой постановке плоский слой ( $0 \leq r \leq 4$  см) заменяется на сферу с вырезанным центром ( $0 \leq r \leq 105$  см,  $-105$  см  $\leq z \leq 105$  см,  $101$  см  $\leq \bar{R} \leq 105$  см,  $\bar{R} = \sqrt{r^2 + z^2}$ ). Расчетная область удалена от центра системы координат на достаточное расстояние, чтобы решение совпало с одномерным плоским случаем, для которого получены упрощенные аналитические формулы [27]. По радиусу использовалась неравномерная сетка в 56 ячеек, по углу было взято 12 направлений. Система разбивалась на три области. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле  $\alpha_c = \chi (1 - e^{-\varepsilon/T})/\varepsilon^3$ ;  $\chi = 27$  в области 1 ( $101$  см  $\leq \bar{R} \leq 103$  см) и в области 3 ( $103,4$  см  $\leq \bar{R} \leq 105$  см);  $\chi = 10\,000$  в области 2 ( $103$  см  $\leq \bar{R} \leq 103,4$  см).

Расчеты проводились по St- и TVD-схемам. В качестве ограничителей для схемы TVD взяты ограничители minmod, Чакравати—Ошера, Барт—Джесперсона. При выходе на стационарный режим при  $ct = 180$  см численное решение можно сравнить с решением по аналитическим формулам [27]

$$T = \begin{cases} \sqrt[7]{1 - 0,00659 (\bar{R} - \bar{R}_0)} & \text{в области 1;} \\ \sqrt[7]{5,8683 - 2,44 (\bar{R} - \bar{R}_0)} & \text{в области 2;} \\ \sqrt[7]{0,00659 (4 + \bar{R}_0 - \bar{R})} & \text{в области 3,} \end{cases}$$

где  $\bar{R}_0 = 101$  см.

На рис. 2 приведены профили температуры вещества при  $ct = 180$  см, рассчитанные по разным схемам и аналитическим формулам. Видно, что профили температуры, полученные из численных расчетов по схемам типа TVD, намного ближе к профилю, рассчитанному по аналитическим формулам, чем профиль, полученный по St-схеме первого порядка. Схема типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера немного лучше согласуется с аналитическим решением, чем схема типа TVD с ограничителем Барт—Джесперсона, а последняя — лучше, чем схема типа TVD с ограничителем minmod.

На рис. 3 приведены точное решение и профили температуры вещества при  $ct = 9$  см, рассчитанные по схеме типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера, DDAD-схеме [9], St-схеме,  $MDS_n$ -схеме [28]. В качестве точного решения брались результаты на сильно измельченной сетке. Из рисунка видно, что профиль температуры, полученный по St-схеме, сильно отличается от точного решения, схема типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера и DDAD-схема показывают сопоставимые результаты. Наилучшее согласие с точным решением дает  $MDS_n$ -схема.

На рис. 4 приведены профили температуры вещества, полученные по тем же схемам, что на рис. 3, при  $ct = 180$  см. Видно, что профиль температуры по схеме типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера согласуется с профилями, полученными по DDAD-схеме и  $MDS_n$ -схеме. Наилучшие результаты в этой задаче показала  $MDS_n$ -схема.

В табл. 1 приведено сравнение числа итераций по температуре при использовании ВДМ-метода и  $P_1SA$ -метода на структурированной сетке. Показано, что предлагаемый  $P_1SA$ -метод в данной задаче позволил за 20 временных шагов уменьшить общее число итераций примерно в 2 раза.

В табл. 2 приведено время счета задачи по методам  $P_1SA$  и ВДМ для схемы типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера на двух сетках:



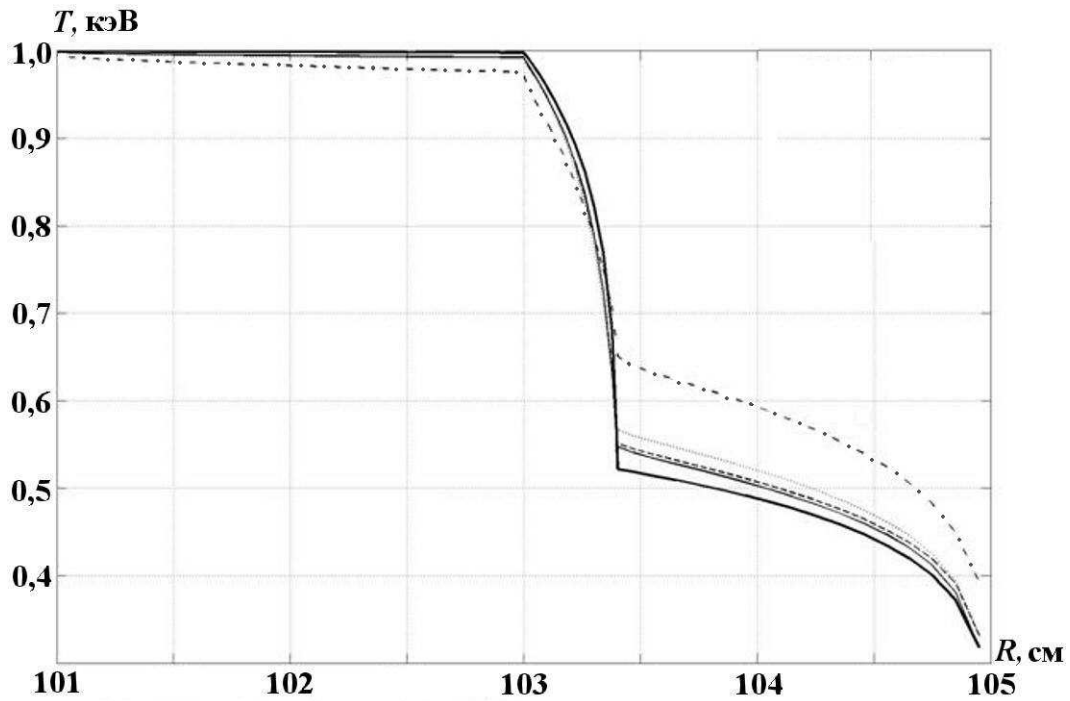


Рис. 2. Задача 1. Профили температуры вещества при  $ct = 180$  см: ---- — схема типа TVD с ограничителем Барт–Джесперсона; — — схема типа TVD с ограничителем Чакравати–Ошера; ..... — схема типа TVD с ограничителем minmod; - - - - — St-схема; — — — — аналитические формулы

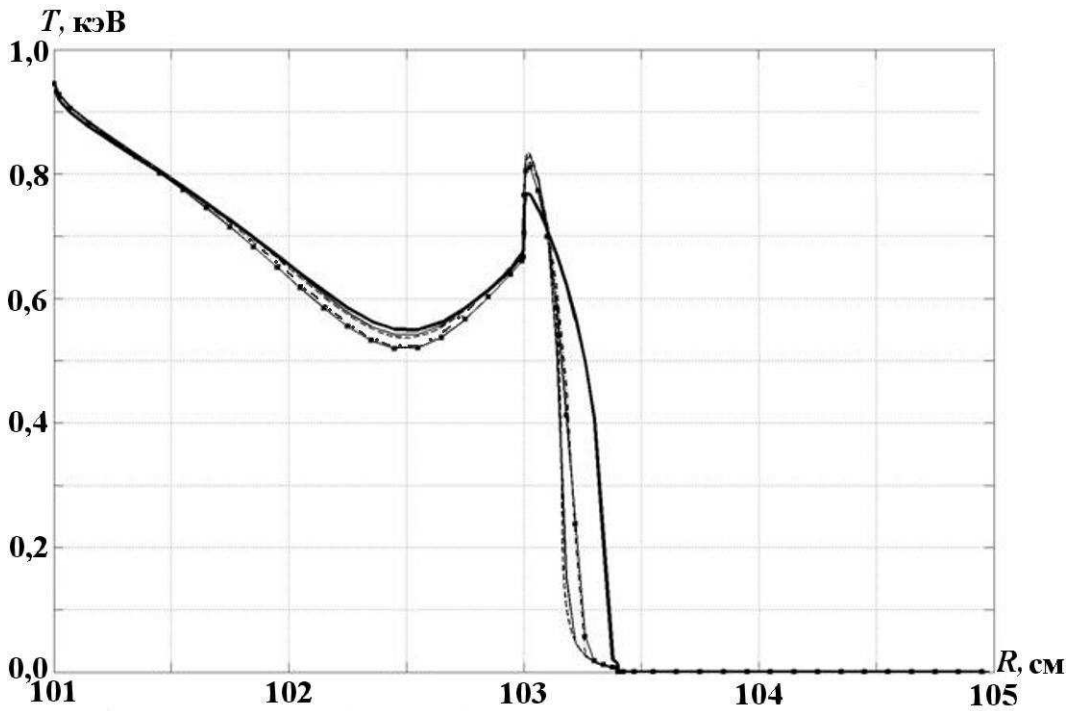


Рис. 3. Задача 1. Профили температуры вещества при  $ct = 9$  см: ---- — точное решение; — —  $MDS_n$ -схема; —■— — DDAD-схема; - - - - — схема типа TVD с ограничителем Чакравати–Ошера; — — — — St-схема

- 1) неравномерная сетка по радиусу в 56 ячеек, 12 направлений по углу, квадратура  $ES_8$  по угловым переменным;
- 2) неравномерная сетка по радиусу в 56 ячеек, 50 направлений по углу, квадратура  $ES_{24}$  по угловым переменным.

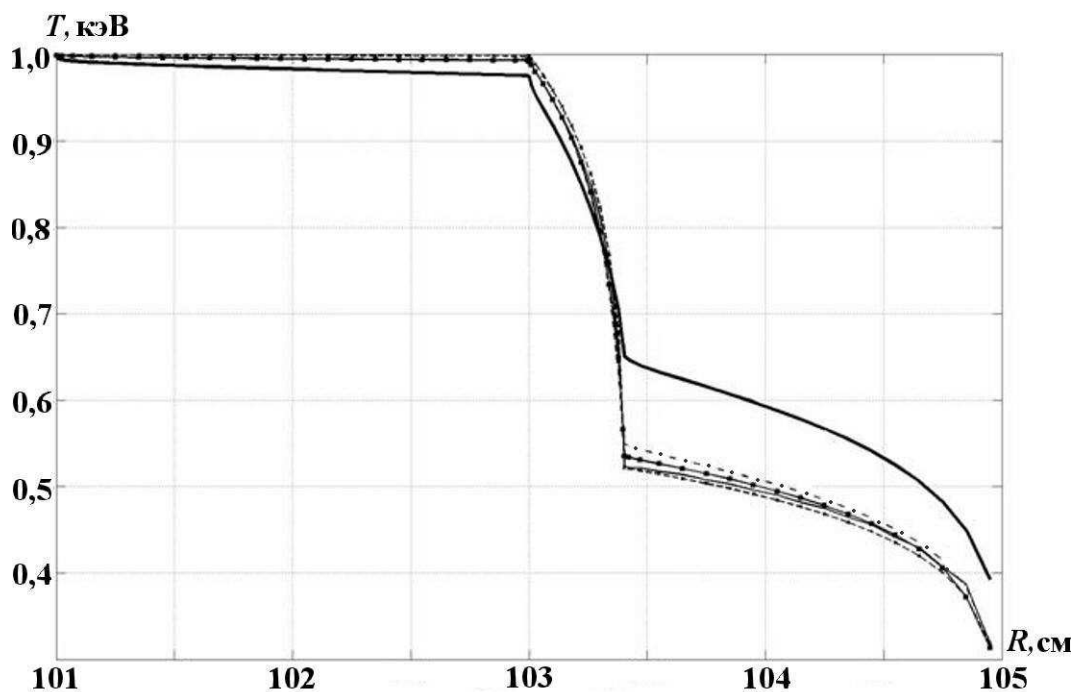


Рис. 4. Задача 1. Профили температуры вещества при  $ct = 180$  см: ---- — аналитические формулы; — —  $MDS_n$ -схема; —■— — DDAD-схема; ---- — схема типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера; — — St-схема

Таблица 1

Задача 1. Число итераций по температуре для ВДМ- и  $P_1SA$ -методов (шаг по времени  $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$  нс, константа сходимости по температуре  $\epsilon_{сх} = 10^{-4}$ )

Число итераций	ВДМ		$P_1SA$		Отношение числа итераций ВДМ-метода к числу итераций $P_1SA$ -метода	
	TVD	St	TVD	St	TVD	St
	Общее за 20 шагов	352	337	208	179	2
Среднее за 20 шагов	18	17	10	9	2	2
Максимальное за один шаг	20	19	13	11	1,5	1,7

Таблица 2

Задача 1. Время счета по методам  $P_1SA$  и ВДМ для схемы типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера на двух сетках

Итерационный метод	Сетка 1	Сетка 2
$P_1SA$ —ВДМ	15 мин	13 ч
ВДМ	15 мин	26 ч
$P_1SA$ —BICGSTAB	45 мин	35 ч

Из табл. 2 видно, что на более подробных сетках по пространственным и угловым переменным эффективность  $P_1SA$ -метода по сравнению с ВДМ-методом возрастает. Заметим, что отношение временных затрат, приведенное в табл. 2, остается таким же и для следующих задач.

**Задача 2.** Задача представляет собой модификацию предыдущей задачи посредством введения в центре плотной области оптически прозрачной среды. Введенная область ограничена прямыми, выходящими из начала координат под углами  $\pi/3$ ,  $2\pi/3$  к оси  $Z$ .

На рис. 5 приведены графики распределения температуры вещества вдоль оси  $R$ , полученные по схеме первого порядка и по схеме с TVD-реконструкцией (с ограничителем Чакравати—Ошера и с ограничителем Барт—Джесперсона), в сравнении с аналитическим решением для первой задачи Флека

$$T = \sqrt[3]{0,4592 - 0,1552 (\bar{R} - \bar{R}_0)}, \quad \bar{R}_0 = 102 \text{ см.}$$

Видно, что температуры вещества, полученные из численных расчетов по всем схемам, хорошо согласуются с аналитическим решением в прозрачной среде. Следует отметить, что наилучшее согласие с аналитическим решением дает TVD-схема с ограничителем Чакравати—Ошера.

На рис. 6 приведены графики распределения температуры вещества вдоль оси  $Z$ , полученные по схеме первого порядка и по схеме с TVD-реконструкцией (с ограничителем Чакравати—Ошера и с ограничителем Барт—Джесперсона), в сравнении с аналитическим решением, приведенным в задаче 1 для неоднородной среды. Видно, что температуры вещества, полученные из численных расчетов по схемам типа TVD, лучше согласуются с аналитической формулой, чем полученные по St-схеме первого порядка. Схема типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера лучше согласуется с аналитическим решением, чем схема типа TVD с ограничителем Барт—Джесперсона.

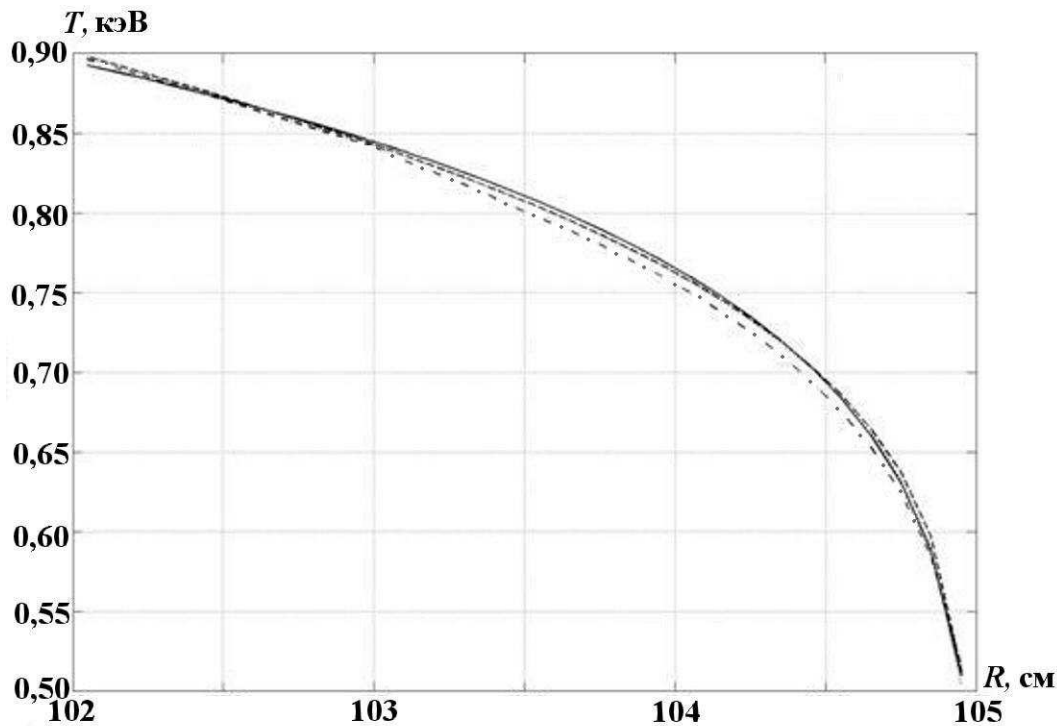


Рис. 5. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль оси  $R$ : ---- — схема типа TVD с ограничителем Барт—Джесперсона; .... — схема типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера; -.-.- — St-схема; — — аналитическое решение

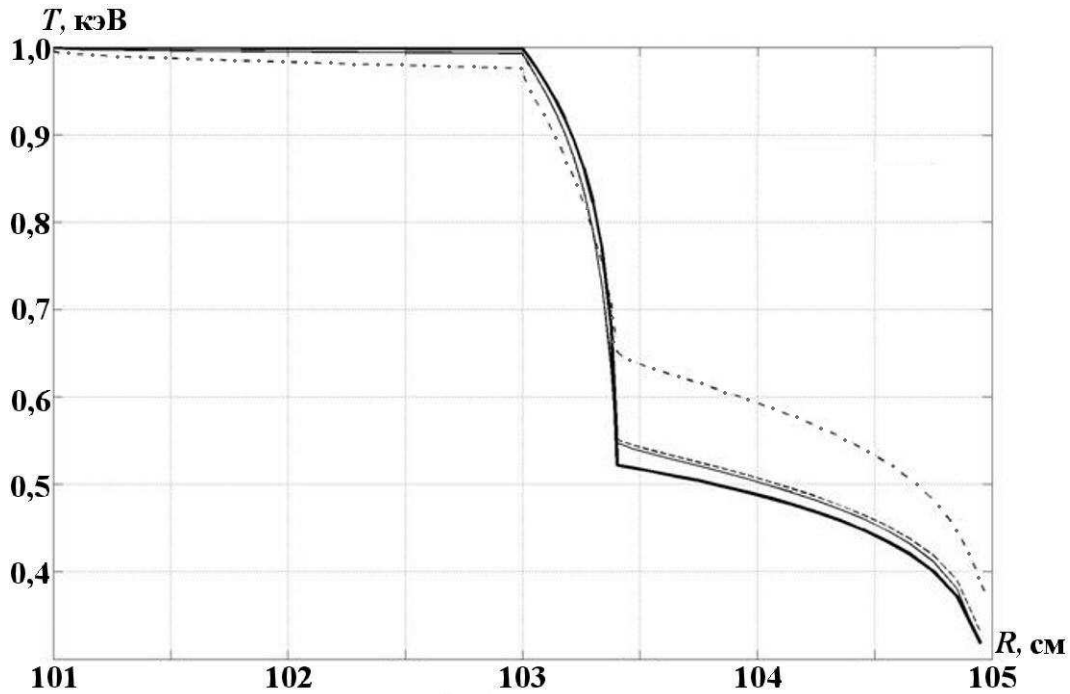


Рис. 6. Задача 2. Профили температуры вещества: ---- — схема типа TVD с ограничителем Барт—Джесперсона; — схема типа TVD с ограничителем Чакравати—Ошера; ..... — St-схема; — — аналитическое решение

**Задача 3.** В данной задаче решение рассматривается в оптически плотной сфере с вырезанным центром ( $0 \leq r \leq 2$  см,  $-2$  см  $\leq z \leq 2$  см,  $1$  см  $\leq \bar{R} \leq 2$  см,  $\bar{R} = \sqrt{r^2 + z^2}$ ). Коэффициент поглощения рассчитывается по формуле  $\alpha_c = 10\,000 (1 - e^{-\varepsilon/T})/\varepsilon^3$ .

Данная задача характеризуется большим количеством итераций. В задаче проводились исследования зависимости числа итераций от шага по времени и по пространству. Рассматривались две серии расчетов.

В первой серии расчетов фиксировался шаг по времени ( $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$  нс) и изменялось количество ячеек в области:

- вариант 1: 10 ячеек по углу, 50 — по радиусу, число шагов  $Nt = 20$ ;
- вариант 2: 10 ячеек по углу, 100 — по радиусу, число шагов  $Nt = 20$ ;
- вариант 3: 10 ячеек по углу, 200 — по радиусу, число шагов  $Nt = 20$ .

Во второй серии расчетов фиксировалась сетка по пространству (10 ячеек по углу, 50 — по радиусу) и изменялся шаг по времени:

- вариант 4:  $\tau = 10^{-5}$  нс, число шагов  $Nt = 40$ ;
- вариант 5:  $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$  нс, число шагов  $Nt = 20$ ;
- вариант 6:  $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$  нс, число шагов  $Nt = 10$ .

Результаты сравнения данных расчетов представлены в табл. 3, где использованы следующие обозначения: *Sum* — суммарное число итераций за  $Nt$  шагов; *Sr* — среднее число итераций за  $Nt$  шагов; *Max* — максимальное число итераций за один шаг; *K1* — отношение *Sum* ВДМ-метода к *Sum*  $P_1SA$ -метода; *K2* — отношение *Max* ВДМ-метода к *Max*  $P_1SA$ -метода. Из таблицы видно, что в данной задаче при разном количестве ячеек для ВДМ-метода требуется примерно в 3 раза больше итераций, чем для  $P_1SA$ -метода. С увеличением шага по времени при сохранении числа ячеек в системе эффективность  $P_1SA$ -метода по сравнению с ВДМ-методом становится выше и отношение числа итераций доходит до 4.

На рис. 7 показаны зависимости количества итераций от номера шага по времени для ВДМ-метода и  $P_1SA$ -метода для задачи с фиксированным временным шагом  $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$  нс на сгущающихся сет-

Результаты расчетов задачи 3

Вариант	ВДМ			$P_1SA$			K1	K2
	$Sum$	$Sr$	$Max$	$Sum$	$Sr$	$Max$		
1	659	33	42	223	11	13	2,9	3,2
2	1 049	52	66	308	15	20	3,4	3,3
3	1 675	84	105	590	30	38	2,8	2,8
4	691	17	24	292	7	11	2,4	2,2
5	659	33	42	225	11	13	2,9	3,2
6	631	63	71	152	15	18	4,2	3,9

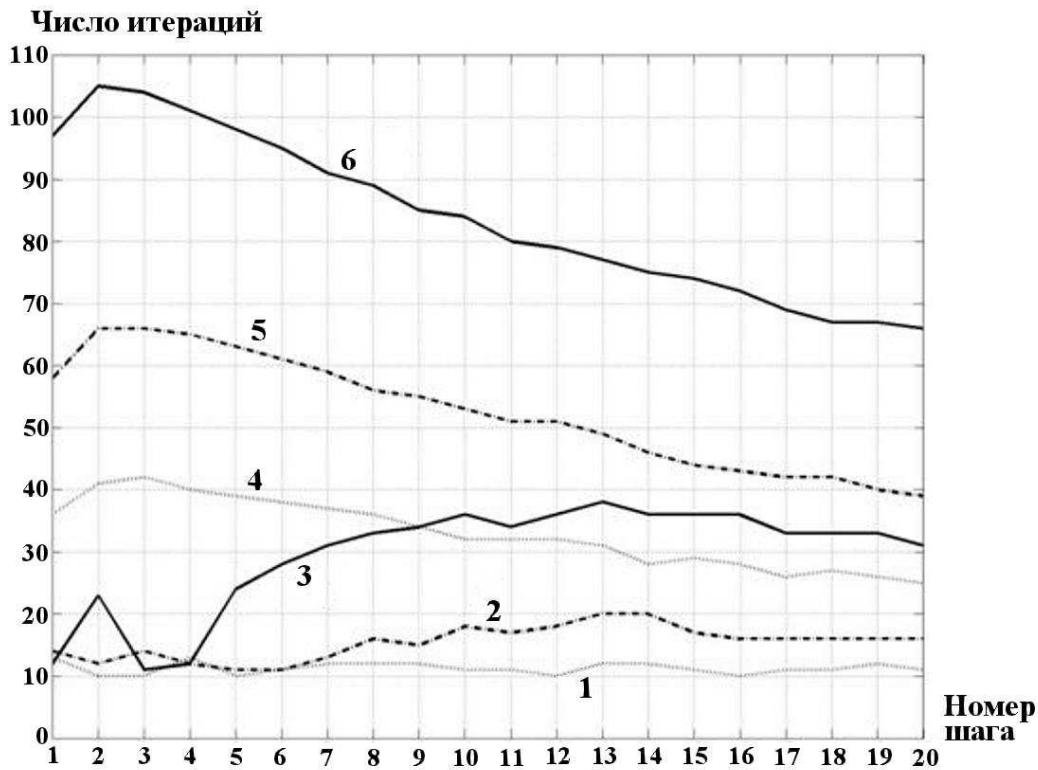


Рис. 7. Задача 3. Зависимости числа итераций от номера шага: 1 —  $P_1SA$ -метод, сетка  $10 \times 50$ ; 2 —  $P_1SA$ -метод, сетка  $10 \times 100$ ; 3 —  $P_1SA$ -метод, сетка  $10 \times 200$ ; 4 — ВДМ-метод, сетка  $10 \times 50$ ; 5 — ВДМ-метод, сетка  $10 \times 100$ ; 6 — ВДМ-метод, сетка  $10 \times 200$

ках. Видно, что количество итераций в  $P_1SA$ -методе имеет более слабую зависимость от разностной сетки, чем в ВДМ-методе.

**Задача 4.** В центре квадратной области  $100 \text{ см} \leq r \leq 103 \text{ см}$ ,  $100 \text{ см} \leq z \leq 103 \text{ см}$  задана температура  $T = 1 \text{ кэВ}$ . По координатам  $r$  и  $z$  взята равномерная сетка в  $50 \times 50$  ячеек. Данная задача приводится для исследования возможности возникновения шахматного эффекта при применении на ускоряющем этапе схемы, построенной по аналогии с работой [26].

Результаты расчетов на разные моменты времени представлены на рис. 8–11 (см. также цветную вкладку). Слева на рисунках изображено пространственное распределение температуры, справа — профиль температуры вещества вдоль направления  $r = 101,41 \text{ см}$ , выделенного на изображении слева. Из рис. 8–11 видно, что в схеме типа Майера, реализованной в данной работе для поправок, в отличие от работы [15] шахматного эффекта не возникает. Следует отметить, что в начале счета данной задачи на рис. 8–10 виден лучевой эффект. Однако при выходе на стационарное состояние (рис. 11) он практически не заметен.

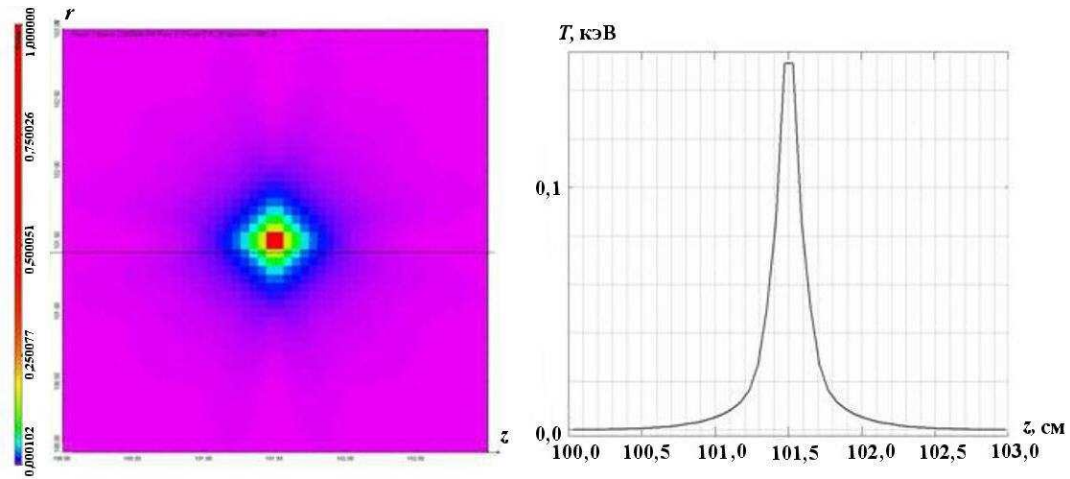


Рис. 8. Задача 4. Распределение температуры вещества при  $ct = 0,6$  см

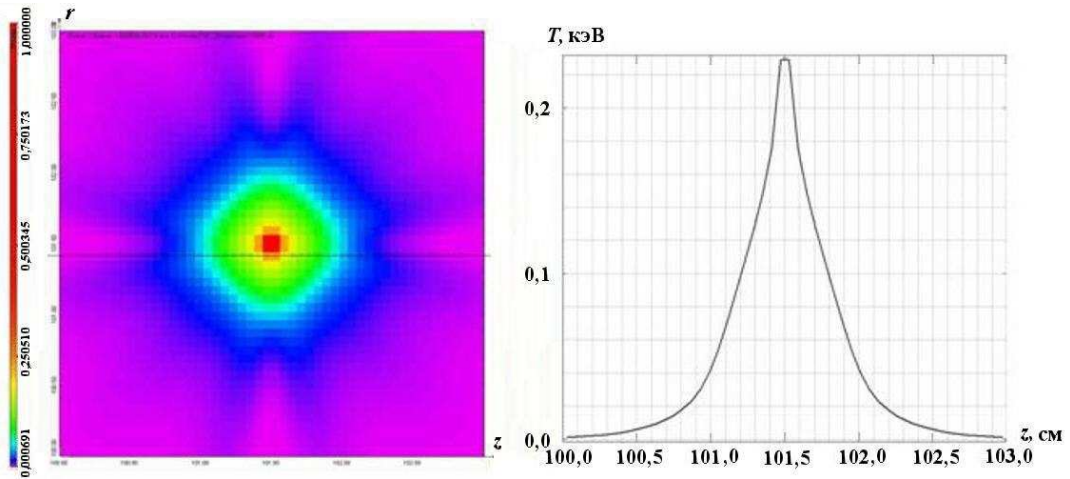


Рис. 9. Задача 4. Распределение температуры вещества при  $ct = 3$  см

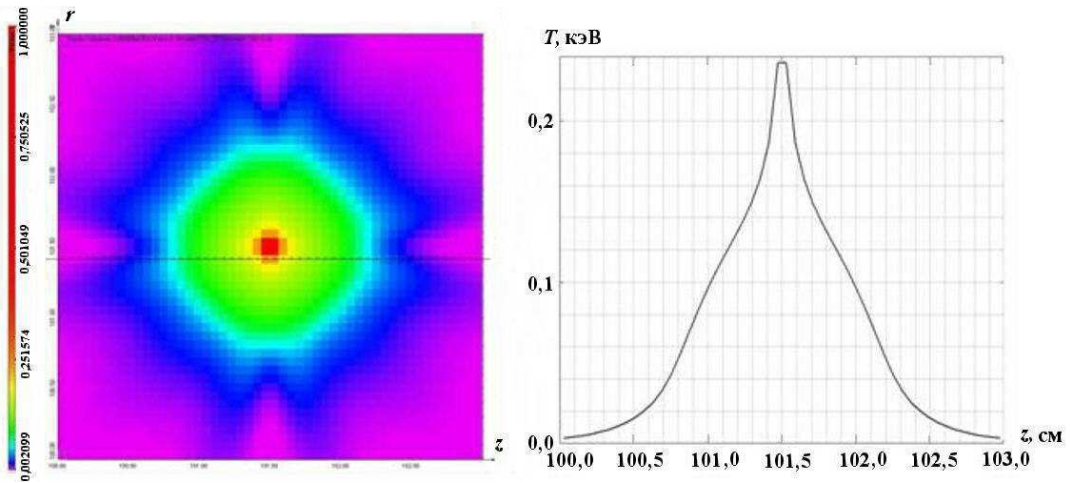


Рис. 10. Задача 4. Распределение температуры вещества при  $ct = 6$  см

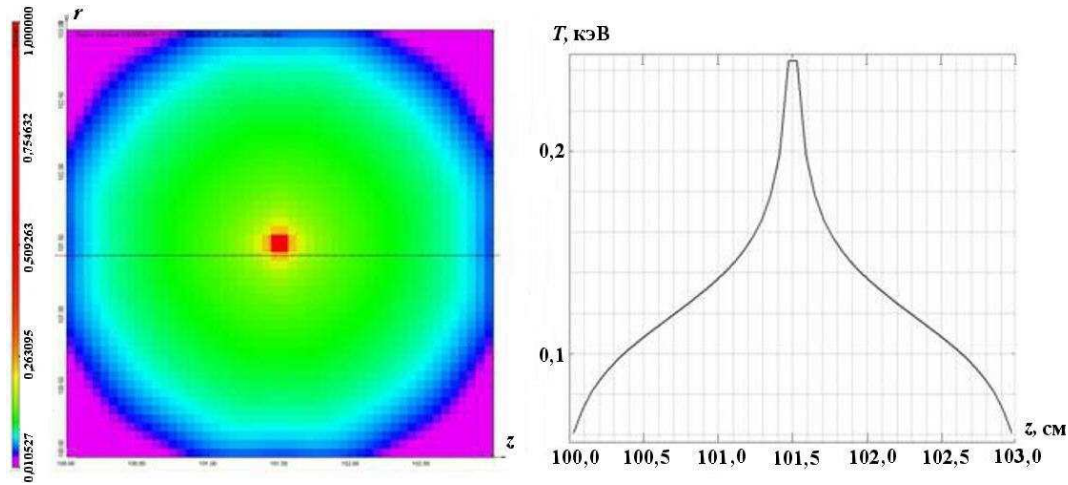


Рис. 11. Задача 4. Распределение температуры вещества при  $ct = 24$  см

### Заключение

В данной работе рассмотрена реализация неявной схемы типа TVD для решения уравнения переноса теплового излучения в двумерной осесимметричной геометрии. Эта схема сочетает в себе консервативность, монотонность в смысле методологии TVD-схем и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами. В схеме используются ограничители, которые вычисляются явно по известным значениям величин с предыдущего временного шага. Рассмотрены одномерные TVD-ограничители Чакравати—Ошера, *minmod* и *двумерный* ограничитель Барт—Джесперсона. Показано, что использованный *одномерный* ограничитель типа Чакравати—Ошера в данных задачах дает результаты несколько лучше двумерных ограничителей.

Кроме того, предложенная схема типа TVD обладает следующими достоинствами:

1. Простота реализации. Повышение точности достигается при незначительном усложнении алгоритма St-схемы.
2. Сопоставимое с St-схемой число итераций за счет монотонности численного решения и отсутствия переключений с одной схемы на другую.
3. Дополнительное увеличение точности в ячейках, где освещена только одна сторона. Поскольку TVD-реконструкция производится и для неосвещенных сторон в ячейке, то ячейки с одной освещенной стороной также разрешаются по схеме второго порядка.

Используемый для решения гиперболической системы  $P_1$ -уравнений неявный конечно-объемный метод с соотношениями связи в форме римановского решателя [14] обеспечивает достаточный уровень монотонности для поправочных уравнений. Это важно для сходимости итераций.

В данной работе метод ускорения  $P_1SA$ , рассмотренный в работе [13] для одномерного уравнения переноса, применен в двумерном случае. В этом методе для ускорения итераций по кинетическому уравнению используется приближение низкого уровня, а именно  $P_1$ -приближение. Реализованный метод ускорения итераций позволил уменьшить число итераций более чем в 2 раза по сравнению с ВДМ-методом в задачах 1, 2 и в 3 раза в задаче 3. При этом в отличие от ВДМ-метода количество итераций слабо зависит от измельчения сетки и увеличения шага по времени.

Метод  $P_1SA$ , рассмотренный в данной работе, может применяться на разных видах разностных сеток. На структурированных сетках для решения поправочной системы на ускоряющем этапе используется экономичный итерационный метод ИМСР [29], который уменьшает время счета  $P_1SA$ -методом по сравнению с ВДМ-методом во второй задаче Флека на достаточно подробной сетке в 2 раза. На неструктурированных сетках предлагается использовать метод ВГССТАВ, который "дороже" ВДМ-метода, и его эффективность падает с увеличением числа ячеек.

Список литературы

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. № 47. Вып. 3. С. 271—306.
2. Gelbard E. M., Hageman L. A. The Synthetic Method as applied to the SN equations // Nucl. Sci. Eng. 1969. Vol. 37. P. 288.
3. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357—393.
4. Osher S. and Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955—984.
5. Barth T. Numerical Methods for Conservation Laws on Structured and Unstructured Meshes // VKI Lecture Series, 2003. <http://people.nas.nasa.gov/>.
6. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Мат. моделирование. 1989. Т. 1, № 5. С. 95—120.
7. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
8. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к  $DS_n$ -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37—48.
9. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А.  $DS_n$ -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 2. С. 33—46.
10. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Журнал вычислит. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842—1849.
11. Alcouff R. E. Diffusion synthetic acceleration methods for the diamond-differenced discrete-ordinates equations // Nucl. Sci. Eng. 1977. Vol. 64. P. 344.
12. Волощенко А. М.  $KP_1$ -схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в трехмерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Журнал вычислит. мат. и мат. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 344—372.
13. Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А. Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 3, С. 3—15.
14. Maire P. H. A high-order cell-centered Lagrangian scheme for compressible fluid flows in two-dimensional cylindrical geometry // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228. P. 2391—2425.
15. Vaziev E. M., Gadzhiev A. D., Kuzmin S. Y. An implicit finite-volume TVD method for solving 2D hydrodynamics equations on unstructured meshes // Joint Int. Conf. on Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications (NASCA 13). Calais, France. 24—26 June 2013.
16. Larsen E. W. Unconditionally stable diffusion synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. Part I: Theory // Nucl. Sci. Eng. 1982. Vol. 82. P. 47.
17. McCoy D. R., Larsen E. W. Unconditionally stable diffusion synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. Part II: Numerical Results // Ibid. P. 64.
18. Feautrier P. C. R. // Acad. Ssi. Paris. 1964. Vol. 258. P. 3198.



19. Adams B. T., Morel J. E. A Two-grid acceleration scheme for the multigroup  $S_n$  equations with neutron upscattering // Nucl. Sci. Eng. 1993. Vol. 115. P. 253.
20. Adams B. T., Morel J. E. An acceleration scheme for the multigroup  $S_n$  equations with fission and thermal upscattering // Proc. of Joint Int. Conf. on Math. Methods and Supercomputing for Nuclear Applications. Saratoga Springs, New York, USA, 5–10 October 1997. Vol. 1. P. 343.
21. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
22. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
23. Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А. Неявная конечно-объемная схема с TVD-реконструкцией для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в  $P_1$ -приближении // Забавихинские науч. чтения XII. 2–6 июня 2014 г. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 334.
24. SPARSKIT. Version 2. Joucef Saad June 6, 1994. <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/>.
25. Fleck J. F., Cumming J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.
26. Бондаренко Ю. А., Голубев А. И., Горбунов А. А. и др. О "шахматном эффекте" в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 1. С. 49–53.
27. Завьялов В. В., Шестаков А. А. Упрощенные решения задач Флека // Там же. 2013. Вып. 1. С. 45–52.
28. Козманов М. Ю. Монотонные схемы для системы переноса излучения // Там же. 1989. Вып. 2. С. 51–55.
29. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339–347.

Статья поступила в редакцию 04.03.16.

*DS<sub>n</sub> METHOD WITH TVD RECONSTRUCTION AND SYNTHETIC P<sub>1</sub>SA ITERATION ACCELERATION FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL THERMAL RADIATION TRANSPORT EQUATION IN THE AXIALLY SYMMETRIC RZ GEOMETRY / A. D. Gadzhiev, D. A. Koshutin, A. A. Shestakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region)*

A new technique for numerical solution of the two-dimensional thermal radiation transport equation is considered. The idea of the new approach is to use the discrete ordinate method with TVD reconstruction for solving the kinetic equation and a synthetic method based on a  $P_1$ -approximation for accelerated convergence of iterations in joint solution of the transport and energy equations.

*Keywords:* radiation transport, TVD reconstruction, iteration method.

---