

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ ОГРАНИЧИТЕЛЕЙ ГРАДИЕНТА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

С. В. Лашкин, А. С. Козелков, Е. В. Глазунова, Н. В. Тарасова, А. В. Ялозо  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Анализируется использование ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках применительно к конечно-объемным методам дискретизации уравнений Навье—Стокса с помощью алгоритма SIMPLE. Рассматривается влияние ограничителей на точность результатов, получаемых с использованием градиентных конвективных схем второго порядка, в том числе точность вычисления градиента по итерационному алгоритму Грина—Гаусса. Приводятся расчеты сжимаемых и несжимаемых течений на сетках различной топологии. Даны рекомендации по оптимальному использованию ограничителей при численном решении задач с применением алгоритма SIMPLE.

*Ключевые слова:* ограничители градиента, неструктурированные сетки, уравнения Навье—Стокса, алгоритм SIMPLE.

### Введение

Одним из универсальных алгоритмов математического моделирования течений жидкости и газа является алгоритм SIMPLE [1, 2], использующий расщепленную систему уравнений Навье—Стокса (pressure-based algorithm). Робастность данного алгоритма напрямую зависит от устойчивости схем повышенного порядка точности при дискретизации конвективного слагаемого, входящего в уравнение сохранения количества движения. Применение таких схем обязательно в расчетах с использованием вихреразрешающих моделей турбулентности, течений с ударными волнами, волнами разрежения и т. д., поскольку схемы первого порядка в таких расчетах, хотя и повышают их надежность, зачастую приводят к чрезмерному *размазыванию* решения [3, 4]. Достаточное количество схем было предложено для блочно-структурированных [5] и произвольных неструктурированных сеток [6]. Основным недостатком большинства разработанных схем высокого порядка для дискретизации конвективного слагаемого является их неустойчивость и получение нефизичных, осциллирующих результатов при решении верификационных и практических задач на произвольных неструктурированных сетках [7].

Дальнейшие усилия в разработке и реализации схем повышенного порядка точности связаны с улучшением свойств диссипативности и дисперсии при аппроксимации конвективных потоков. Повышение точности схем без потери их строгого математического обоснования достигается заменой условия сохранения монотонности на условие уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing, TVD) [8]. Чтобы удовлетворить этому условию, вводится скалярный ограничитель градиента искомой функции, зависящий от локальных свойств решения.

В основном ограничители градиента используются в противопотоковых схемах второго порядка точности [8, 9], что должно предотвращать ложные осцилляции, часто возникающие при расчете течений с ударными волнами, волнами разрежения и т. д. В этом случае ограничители градиента предотвращают выход значения, получаемого при градиентной реконструкции величины на грани ячейки, за пределы ее минимума и максимума в ячейках, соседних с данной [10].

Ограничители градиента можно использовать и при вычислении самого градиента итерационным методом Грина—Гаусса [11], что обеспечивает более точное его значение по сравнению с одноитерационным вычислением. В многочисленных работах, посвященных способам вычисления градиента с использованием ограничителей, можно найти разнообразные подходы, в том числе основанные на узловом представлении сеточной модели [10, 12–15].

В настоящей работе рассмотрены два способа применения ограничителей градиента для численного решения уравнений Навье—Стокса на произвольных неструктурированных сетках с помощью алгоритма SIMPLE. Первый вариант основан на использовании ограничителя градиента при дискретизации конвективного слагаемого в уравнении сохранения количества движения, второй, в дополнение к первому, предполагает его использование при вычислении градиента по итерационному алгоритму Грина—Гаусса. При этом в качестве скалярного ограничителя градиента берется одна из трех лимитирующих функций [10, 12, 16].

### Вычисление ограничителей градиента на произвольных неструктурированных сетках

Способы вычисления скалярного ограничителя градиента на произвольных неструктурированных сетках — достаточно популярное направление исследований. В последние десятилетия опубликованы десятки работ, среди которых можно отметить обзоры [8, 9, 17]. Основная задача ограничителей градиента — подавлять осцилляции, возникающие при расчете течений с высокими градиентами величин на неструктурированных сетках.

Суть алгоритма расчета ограничителя состоит в отыскании такого его значения, чтобы при использовании градиентной реконструкции величины на произвольную грань ячейки значение этой величины не выходило за пределы ее минимума и максимума в окружающих ячейках:

$$\min(\varphi_N, \varphi_P) \leq \varphi_P + \alpha_P (\nabla\varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}) \leq \max(\varphi_N, \varphi_P), \quad (1)$$

где  $\varphi_P$  — значение величины в центре исходной ячейки  $P$ ;  $\varphi_N$  — значение величины в центре соседней с  $P$  ячейки  $N$ ;  $\alpha_P$  — скалярный ограничительный коэффициент ( $0 \leq \alpha_P \leq 1$ );  $\nabla\varphi_P$  — градиент величины  $\varphi$  в ячейке  $P$ ;  $\mathbf{d}_{Pf}$  — вектор расстояния между центром текущей ячейки и центром грани  $f$ , общей для ячеек  $P$  и  $N$  (рис. 1).

Согласно [10] для выполнения неравенства (1) вычисляются максимальное и минимальное значения величины  $\varphi$  по всем ячейкам — как самой ячейки  $P$ , так и ее окружающих:

$$\varphi_P^{\max} = \max(\varphi_P, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots); \quad \varphi_P^{\min} = \min(\varphi_P, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots).$$

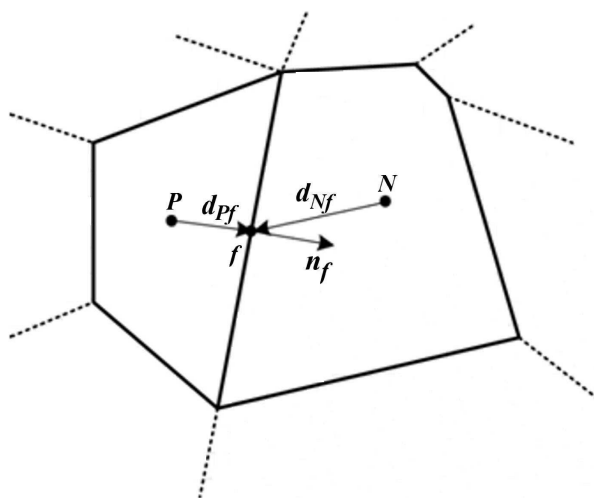


Рис. 1. Иллюстрация контрольного объема  $P$

Далее определяются максимальное  $\Phi_P^{\max}$  и минимальное  $\Phi_P^{\min}$  приращения величины относительно значений в исходной ячейке  $P$ :

$$\Phi_P^{\max} = \varphi_P^{\max} - \varphi_P; \quad \Phi_P^{\min} = \varphi_P^{\min} - \varphi_P. \quad (2)$$

После этого вычисляется приращение величины на каждой грани  $f$  ячейки  $P$ :

$$\Delta_f = \nabla \varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}. \quad (3)$$

Исходя из значений (2) и (3), для каждой грани вычисляется коэффициент  $r_f$ , используемый при расчете ограничительного коэффициента  $\alpha_P$  из (1) для конструирования лимитирующей функции:

$$r_f = \begin{cases} \frac{\Phi_P^{\max}}{\Delta_f}, & \text{если } \Delta_f > 0; \\ \frac{\Phi_P^{\min}}{\Delta_f}, & \text{если } \Delta_f < 0; \\ 1, & \text{если } \Delta_f = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В данной работе описанный алгоритм является основным при вычислении ограничителя градиента, хотя существуют и другие вариации алгоритма, в том числе с использованием узлов, образующих ячейку (контрольный объем) [10].

**Лимитирующие функции.** В алгоритме вычисления ограничительного коэффициента используется та или иная лимитирующая функция. На текущий момент известно и опубликовано более десятка разнообразных лимитирующих функций, обзор которых приведен в [11]. Здесь будем использовать три из них, хорошо известные [10, 12, 16].

Функция Барта—Джесперсена, впервые предложенная в [10], записывается в виде

$$\alpha_f = \min(r_f, 1),$$

где  $r_f$  — коэффициент, рассчитываемый по формуле (4);  $\alpha_f$  — ограничительный коэффициент для грани  $f$ .

Вторая исследуемая лимитирующая функция, Ван Леера, относится к семейству нелинейных (дифференциальных) функций [12]:

$$\alpha_f = \min\left(\frac{r_f^2 + r_f}{r_f^2 + 1}, 1\right).$$

Третья из рассматриваемых, лимитирующая функция Венкатакришнана, также относится к семейству нелинейных функций ограничения и предложена в [15]:

$$\alpha_f = \min\left(\frac{r_f^2 + 2r_f}{r_f^2 + r_f + 2}, 1\right).$$

Окончательно ограничительный коэффициент для ячейки  $P$  рассчитывается как минимум значений  $\alpha_f$  на ее гранях:

$$\alpha_P = \min(\alpha_{f1}, \alpha_{f2}, \dots).$$

На рис. 2 для каждой лимитирующей функции приведена диаграмма Свеби [14], показывающая зависимость ее значений  $\alpha_f$  от коэффициента  $r_f$ . Значение  $\alpha_f = 0$  соответствует схеме первого порядка точности,  $\alpha_f = 1$  — схеме второго порядка. Видно, что самая "строгая" функция ограничения — это функция Венкатакришнана, делающая переход к схеме второго порядка позже всех (при  $r_f = 2$ ).

**Ограничители в конвективных схемах.** Основные уравнения, решаемые с помощью алгоритма SIMPLE, — это уравнения неразрывности и сохранения количества движения, описывающие

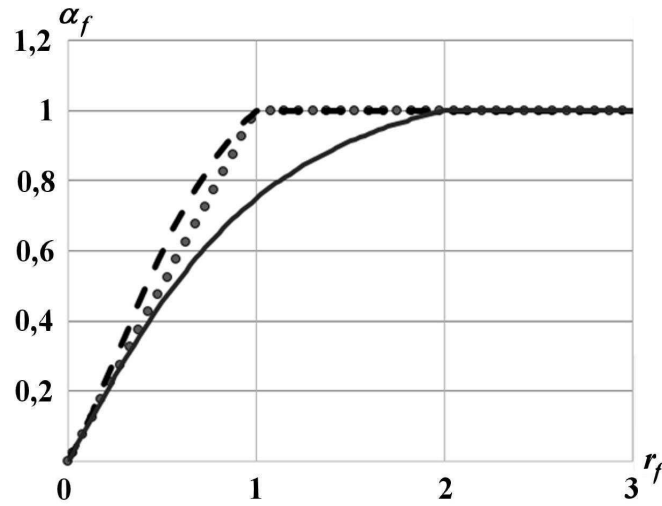


Рис. 2. Зависимости функций ограничителей от коэффициента  $r_f$ : • — Барта—Джесперсена; — — Ван Леера; — — Венкатакришна

течения вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0; \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mathbf{T}_\mu + \mathbf{T}_t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости;  $\rho$  — осредненная плотность;  $p$  — давление;  $\mathbf{T}_\mu$ ,  $\mathbf{T}_t$  — молекулярный и турбулентный тензоры вязких напряжений.

Рассмотрим дискретизацию конвективного (второго) слагаемого в уравнении сохранения количества движения [1, 18]. Ограничители градиента используются при вычислении компонент вектора скорости по схеме второго порядка. Применяя метод контрольного объема к конвективному слагаемому и переходя от интеграла по объему к интегралу по поверхности, получаем:

$$\int_S \rho \varphi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \sum_{f=nb(P)} (\rho \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{S})_f \mathbf{u}_f^{n+1}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{S}_f$  — вектор-площадь грани  $f$ ;  $\rho_f \mathbf{u}_f^n \cdot \mathbf{S}_f$  — массовый поток через грань  $f$  на предыдущем итерационном шаге  $n$ ;  $\mathbf{u}_f^{n+1}$  — вектор скорости на новом итерационном шаге  $n + 1$ , вычисляемый по схеме высокого порядка. В формуле (6) суммирование выполняется по всем граням  $f = nb(P)$  ячейки  $P$ .

Точность вычисления скорости  $\mathbf{u}_f^{n+1}$  напрямую влияет на точность получаемого результата. Однако использование схем высокого порядка на произвольных неструктурированных сетках для данного слагаемого может приводить к осцилляциям решения или вообще невозможности получения стационарного решения [7]. Как показывает вычислительная практика, лучше использовать схемы с отложенной коррекцией [19] и вводить *фактор смешивания*:

$$\mathbf{u}_f^{n+1} = \left( \mathbf{u}_f^{n+1} \right)^{\text{UD}} + \beta \left( \left( \mathbf{u}_f^n \right)^{\text{HO}} - \left( \mathbf{u}_f^n \right)^{\text{UD}} \right),$$

где  $\left( \mathbf{u}_f^{n+1} \right)^{\text{UD}}$  — вектор скорости по противопотоковой схеме первого порядка точности (UD);  $\left( \mathbf{u}_f^n \right)^{\text{CD}}$  — вектор скорости по схеме высокого порядка, например центрально-разностной (CD);  $\beta$  —

фактор смешивания схемы первого порядка и схемы высокого порядка. Значения для  $\beta$  задаются в диапазоне  $[0, 1]$ : при  $\beta = 0$  схема с отложенной коррекцией становится схемой первого порядка, при  $\beta = 1$  — схемой высокого порядка. Стоит отметить, что данный подход можно использовать и для "смешивания" схем только высокого порядка, например CD и QUICK [19]. Метод отложенной коррекции не является универсальным, так как  $\beta$  является постоянной величиной и меняет порядок точности схемы для всей расчетной области.

Схемы семейства TVD, в отличие от описанного выше метода отложенной коррекции, позволяют менять порядок схемы только там, где это необходимо, например в областях высоких градиентов компонент скорости, возникающих на фронте ударной волны. Один из вариантов такой схемы — противопотоковая схема с линейной интерполяцией второго порядка точности (Linear Upwind Differences, LUD) [11] — запишется в виде

$$\varphi_f = \begin{cases} \varphi_P + \alpha_P \nabla \varphi_P \cdot \mathbf{d}_{Pf}, & \text{если } m_f \geq 0; \\ \varphi_N + \alpha_N \nabla \varphi_N \cdot \mathbf{d}_{Nf}, & \text{если } m_f < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mathbf{d}_{Nf}$  — вектор расстояния от центра ячейки  $N$  до центра грани  $f$  (см. рис. 1);  $\alpha_N$  — ограничительный коэффициент в ячейке  $N$ ;  $m_f$  — массовый поток через грань  $f$ . Использование данного варианта схемы не позволяет значениям величин на гранях выходить за пределы минимума и максимума их значений в соседних ячейках. Такой подход позволяет использовать схемы высокого порядка практически во всей расчетной области и одновременно подавлять ложные осцилляции в областях высоких градиентов, где порядок схемы может понижаться до первого.

Будем использовать схему (7) дискретизации конвективного слагаемого алгоритма SIMPLE во всех численных экспериментах, приведенных ниже.

**Ограничители в вычислении градиента.** Точность вычисления градиентов компонент скорости и давления является важным фактором при численном решении нелинейной системы уравнений Навье—Стокса, особенно при трансзвуковых и сверхзвуковых течениях, где сила трения, зависящая от градиентов компонент скорости, играет существенную роль при оценке аэродинамических характеристик. Более того, производные компонент скоростей используются практически во всех полупэмпирических RANS-моделях турбулентности и влияют на получаемую турбулентную вязкость.

Одним из широко известных и применяемых на практике методов вычисления градиента в конечно-объемных кодах является алгоритм Грина—Гаусса, использующий следующую формулу [11]:

$$\nabla \varphi_P = \frac{1}{V} \sum_{f=nb(P)} \varphi_f \mathbf{S}_f,$$

где  $\varphi_f = \frac{\varphi_P + \varphi_N}{2}$  — значение  $\varphi$  на грани  $f$  ячейки  $P$ , вычисляемое простым арифметическим усреднением.

Дальнейшее уточнение значения градиента в ячейке требует модификации исходного алгоритма введением дополнительных итераций (их количество зависит от желаемой точности):

$$\nabla \varphi_P^k = \sum_{k=1}^M \frac{1}{V} \sum_{f=nb(P)} \varphi_f^k \mathbf{S}_f,$$

а также изменения способа вычисления скалярной величины  $\varphi_f^k$  на грани ячейки на второй и последующих итерациях  $k$ . Здесь  $M$  — общее количество итераций при вычислении градиента. Таким образом, на первой итерации  $\varphi_f^{k=1} = \frac{\varphi_P + \varphi_N}{2}$ , на второй и последующих итерациях для вычисления значения  $\varphi_f^k$  используются следующие формулы:

$$\varphi_f^k = \frac{\varphi_{f,P}^k + \varphi_{f,N}^k}{2}, \quad \varphi_{f,P}^k = \varphi_P + \alpha_P \left( \nabla \varphi_P^{k-1} \cdot \mathbf{d}_{Pf} \right), \quad \varphi_{f,N}^k = \varphi_N + \alpha_N \left( \nabla \varphi_N^{k-1} \cdot \mathbf{d}_{Nf} \right),$$

где  $\varphi_{f,P}^k, \varphi_{f,N}^k$  — значения  $\varphi$  на грани  $f$  со стороны ячейки  $P$  и со стороны ячейки  $N$  соответственно;  $\nabla\varphi_P^{k-1}, \nabla\varphi_N^{k-1}$  — градиенты  $\varphi$  в ячейках  $P$  и  $N$  с предыдущей итерации  $k-1$ . Как и для вышеописанной схемы высокого порядка LUD, использование ограничителей градиента в исходной схеме не позволит значениям  $\varphi_f$  выходить за пределы минимума и максимума  $\varphi$  в соседних ячейках.

В настоящей работе выполняются три итерации для вычисления градиентов компонент скорости и градиента давления, используемых в уравнении движения (5). По опыту авторов, дальнейшее увеличение числа итераций не приводит к существенному повышению точности, при этом нерационально расходуются вычислительные ресурсы.

## Численные эксперименты

Представленная методика реализована в пакете программ ЛОГОС — программном продукте, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на *параллельных* ЭВМ [18, 20–23]. Параллельная реализация модели основана на алгебраическом многосеточном методе [20, 22], позволяющем эффективно использовать сотни вычислительных ядер, а также существенно улучшить сходимость численного метода [20]. Пакет программ ЛОГОС ориентирован на решение задач вычислительной гидродинамики на произвольных неструктурированных сетках [24]. Он успешно прошел верификацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных гидродинамических задач [20, 21, 24, 25], включая расчеты турбулентных и нестационарных течений [3–6, 26, 32], а также геофизических явлений [27–29, 35].

Во всех представленных ниже расчетах использовалась модель турбулентности  $k$ - $\omega$  SST с автоматическим определением ширины пограничного слоя [30].

**Задача 1. Течение в канале за обратным уступом.** Исследование применимости ограничителей градиента при расчете несжимаемых турбулентных течений проводилось на задаче о течении за обратным уступом [31] с числом Рейнольдса  $Re = 2,1 \cdot 10^4$ . Детальный численный анализ данной задачи на сетках различной структуры представлен в [4, 25, 32].

В численном эксперименте использовались три типа трехмерных расчетных сеток (исходная постановка задачи — двумерная): гексагональная ( $1,125 \cdot 10^6$  ячеек), полиэдральная ( $1,05644 \cdot 10^6$  ячеек) и тетраэдральная ( $1,646 \cdot 10^6$  ячеек) (рис. 3). Для всех сеток вблизи твердых стенок построены призматические слои с коэффициентом роста не более 1,2. Толщина первой расчетной ячейки гексагональной сетки составляет  $2,28 \cdot 10^{-5}$  м, полиэдральной и тетраэдральной —  $4,16 \cdot 10^{-3}$  м, что обеспечивает значение безразмерной величины  $y^+ < 1$ . Расчетная область в координатном направлении  $Z$  имеет толщину, равную удвоенной высоте уступа.

Для оценки результатов расчета анализировался коэффициент трения вдоль нижней стенки  $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty u_\infty^2}$ , где  $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке;  $\rho_\infty$  и  $u_\infty$  — соответственно плотность моделируемого вещества и модуль скорости в бесконечно удаленной точке (обычно это плотность и скорость на входе в расчетную область). Расчетный коэффициент  $C_f$  сравнивался с экспериментальными значениями, полученными в области образования вихря. На рис. 4 представлены графики зависимости коэффициента трения от координаты  $x$  для трех описанных выше ограничителей, применяемых при вычислении конвективного слагаемого уравнения движения.

Анализ графиков показывает, что результаты, полученные на гексагональной сетке, более качественно описывают точку перехода коэффициента трения от отрицательных значений к положительным. Для данной сеточной модели все рассматриваемые лимитирующие функции дают близкий результат (максимальное отличие от эксперимента — около 1%). Решения, полученные на двух неортогональных сетках, дают большее отличие от эксперимента в точке присоединения, причем лимитирующая функция Венкатакришнаана показывает наименее качественный результат по сравнению с другими ограничителями. Это не является неожиданностью, так как данная функция предъявляет большие требования при переходе к схеме высокого порядка точности.

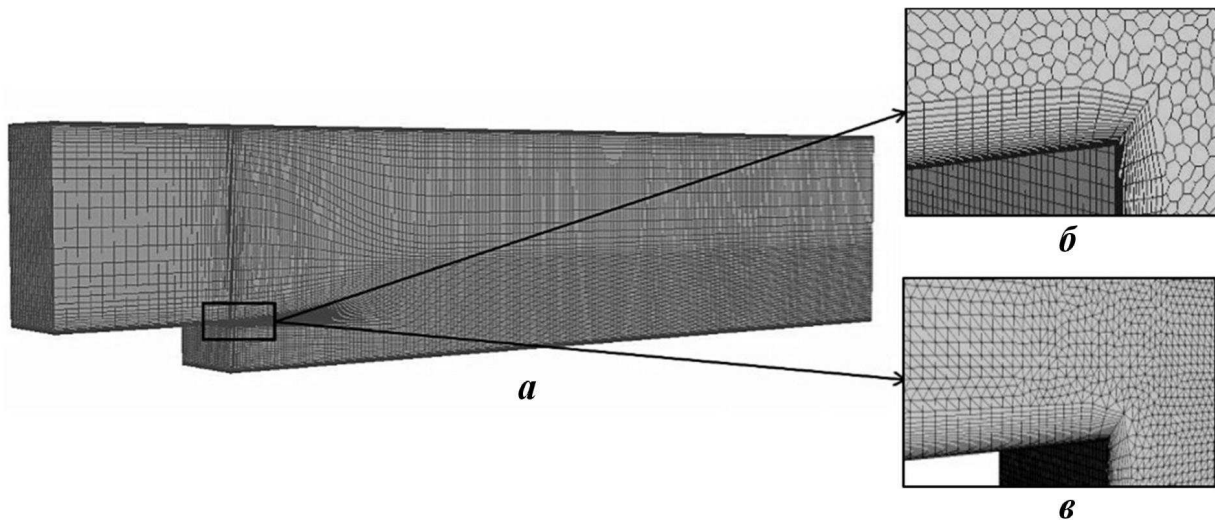


Рис. 3. Задача 1. Внешний вид сеток:  $a$  — гексагональная блочно-структурированная сетка;  $b$ ,  $c$  — элементы неструктурированных полиэдральной и тетраэдральной сеток для выделенной области уступа

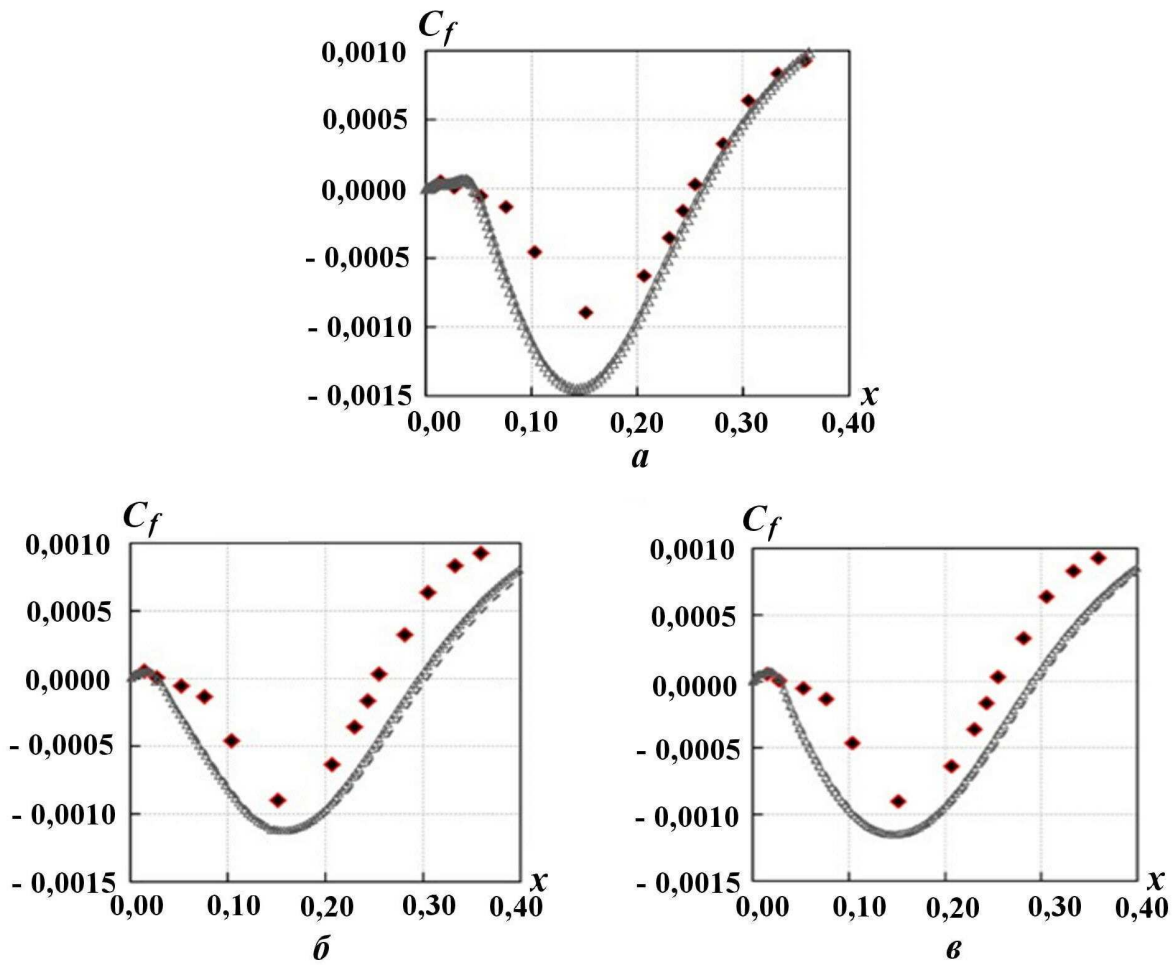


Рис. 4. Задача 1. Коэффициент трения на гексагональной ( $a$ ), тетраэдральной ( $b$ ) и полиэдральной ( $c$ ) сетках для трех ограничителей:  $\Delta$  — Ван Леера;  $- - -$  — Венкатакришна;  $—$  — Барта—Джесперсена;  $\blacklozenge$  — эксперимент

Во второй части численного эксперимента определялось, вносит ли существенный вклад в получаемые результаты уточнение градиентов компонент скорости при использовании в итерационном алгоритме Грина—Гаусса лимитирующей функции Венкатакришнана. На рис. 5 сравниваются результаты применения данного ограничителя при вычислении диффузионного слагаемого уравнения движения с его дополнительным использованием для уточнения градиентов и без такого использования.

Можно видеть, что для данной задачи уточнение вычисления градиента скорости в итерационном методе Грина—Гаусса с использованием ограничителя не оказало существенного влияния на точность получаемого решения. Следует заметить, что проведенные аналогичные исследования для других ограничителей также показали несущественность влияния уточнения градиента с применением ограничителя на итоговый результат.

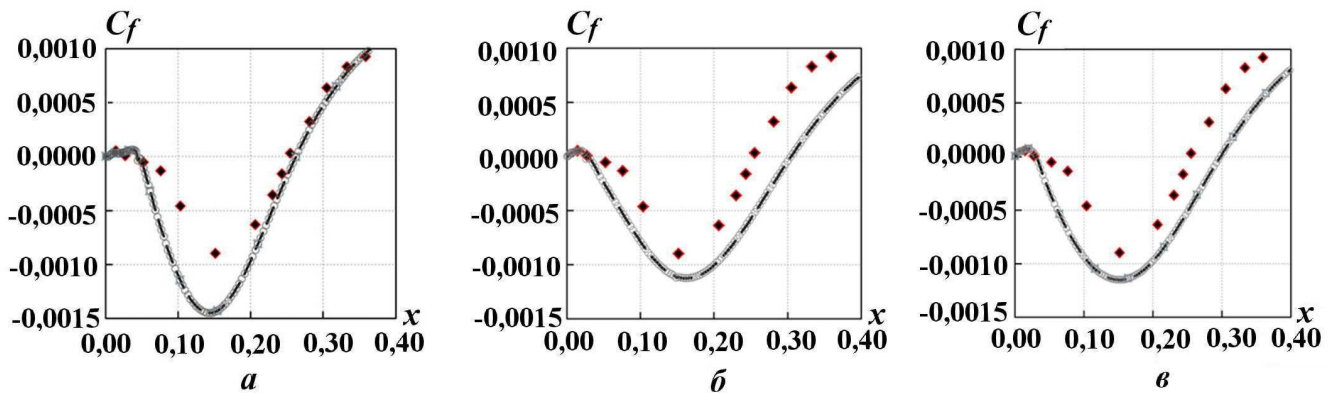


Рис. 5. Задача 1. Коэффициент трения, полученный на гексагональной (а), тетраэдральной (б) и полиэдральной (в) сетках с применением ограничителя Венкатакришнана: — — без его использования в алгоритме Грина—Гаусса; о — с его использованием в алгоритме Грина—Гаусса; ♦ — эксперимент

**Задача 2. Течение в трансзвуковом диффузоре.** Применимость ограничителей в случае расчета сжимаемых течений исследовалась на примере двух задач. Первая из них — расчет течения вязкого сжимаемого газа в трансзвуковом диффузоре с прямым скачком уплотнения. Расчетная область представляет собой канал переменного сечения (рис. 6) с минимальной высотой горла  $h = 4,4 \cdot 10^{-2}$  м. Поток разгоняется до звуковой скорости в области минимального сечения, и на выходе из канала в зависимости от противодавления за горлом реализуется скачок уплотнения соответствующей интенсивности [33]. Течение характеризовалось числом Рейнольдса  $Re \approx 7 \cdot 10^5$ .

В экспериментах использовались трехмерные сеточные модели (исходная постановка задачи — двумерная), отличающиеся типом и количеством расчетных ячеек. Вблизи твердых стенок были построены призматические слои с коэффициентом роста 1,2. Основные параметры построения расчетных сеток представлены в таблице.

#### Параметры построения расчетных сеток для задачи 2

Параметр	Сетка		
	гексагональная	полиэдральная	тетраэдральная
Количество ячеек	$3,6 \cdot 10^4$	$1,15 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$
Размер 1-го призматического слоя, м	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
Количество призматических слоев	8	10	10



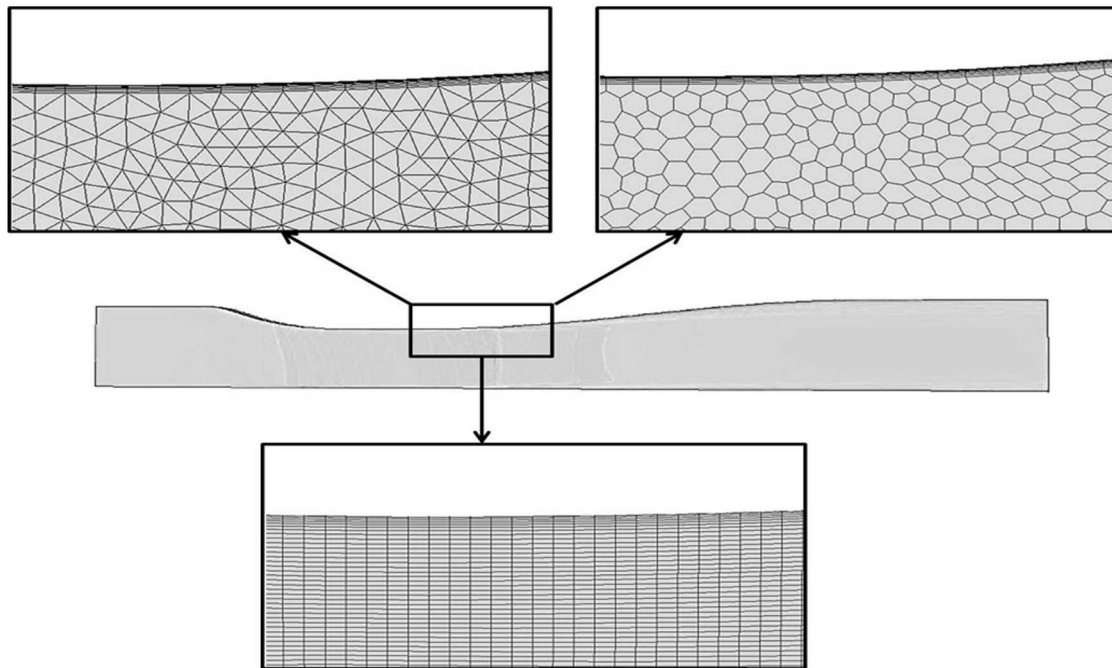


Рис. 6. Задача 2. Используемые расчетные сетки в окрестности горла

Гексагональная сетка имеет сгущение в области скачка уплотнения, неструктурированные сетки построены равномерно. Характерные размеры ячеек тетраэдральной и полиэдральной сеток сопоставимы с характерным размером ячеек блочно-структурированной сетки. Их внешний вид в окрестности скачка уплотнения представлен на рис. 6.

В данной задаче анализировалось распределение статического давления вдоль верхней образующей канала. Результаты расчетов в области скачка уплотнения с применением для вычисления конвективного слагаемого уравнения движения трех лимитирующих функций представлены на рис. 7.

Видно, что на гексагональной сетке результаты для разных лимитирующих функций практически не отличаются. Для неортогональных сеток более существенны различия как между результатами моделирования и экспериментальными данными, так и между результатами для разных лимитирующих функций. Результат, наиболее далекий от эксперимента, был получен на полиэдральной сетке. Это связано с тем, что полиэдральные элементы заметно повышают диссипативность схемы.

Что касается лимитирующих функций, то функция Венкатакришнана, как и ожидалось, более существенно понизила порядок схемы (до первого) и в целом показала более отличающийся от эксперимента результат по сравнению с функциями Барта—Джесперсена и Ван Леера.

На рис. 8 показано сравнение результатов расчетов с применением и без применения ограничителя Венкатакришнана в многоитерационном алгоритме Грина—Гаусса. Видно, что для данной задачи уточнение вычисления градиентов в итерационном методе Грина—Гаусса с применением ограничителя не оказало существенного влияния на точность решения.

**Задача 3. Обтекание модельного крыла ONERA M6.** Второй задачей, на которой исследовалась применимость ограничителей для сжимаемых течений, была задача обтекания тестового крыла ONERA M6 [34]. Численное моделирование проводилось на двух трехмерных сеточных моделях (исходная постановка задачи — трехмерная): гексагональной и тетраэдральной с количеством ячеек  $2 \cdot 10^6$  и  $6 \cdot 10^6$  соответственно. Каждая сетка имеет призматические слои вдоль стенок крыла с коэффициентом роста 1,2. Толщина первой расчетной призматической ячейки гексагональной сетки  $6,8 \cdot 10^{-6}$ , тетраэдральной —  $1 \cdot 10^{-3}$ .

Геометрия расчетной области и внешний вид расчетных сеток показаны на рис. 9. Обтекание моделировалось при угле атаки  $\alpha = 3,06^\circ$ , числе Маха  $M = 0,8395$  и числе Рейнольдса  $Re =$

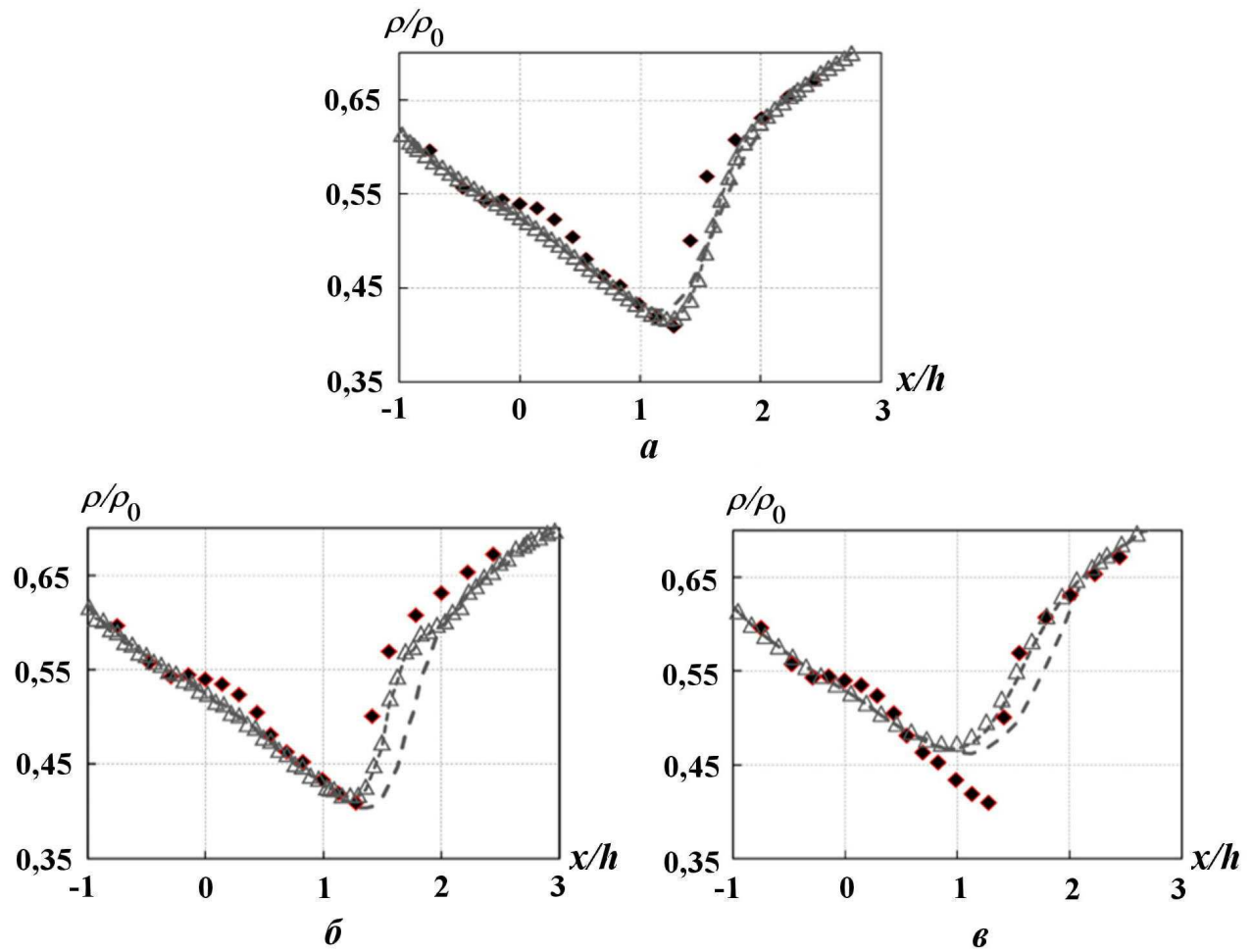


Рис. 7. Задача 2. Распределение статического давления, полученное на гексагональной (*a*), тетраэдральной (*б*) и полиэдральной (*в*) сетках с применением трех ограничителей:  $\Delta$  — Ван Леера; — — — Венкатакришна; ····· — Барта—Джесперсена;  $\blacklozenge$  — эксперимент

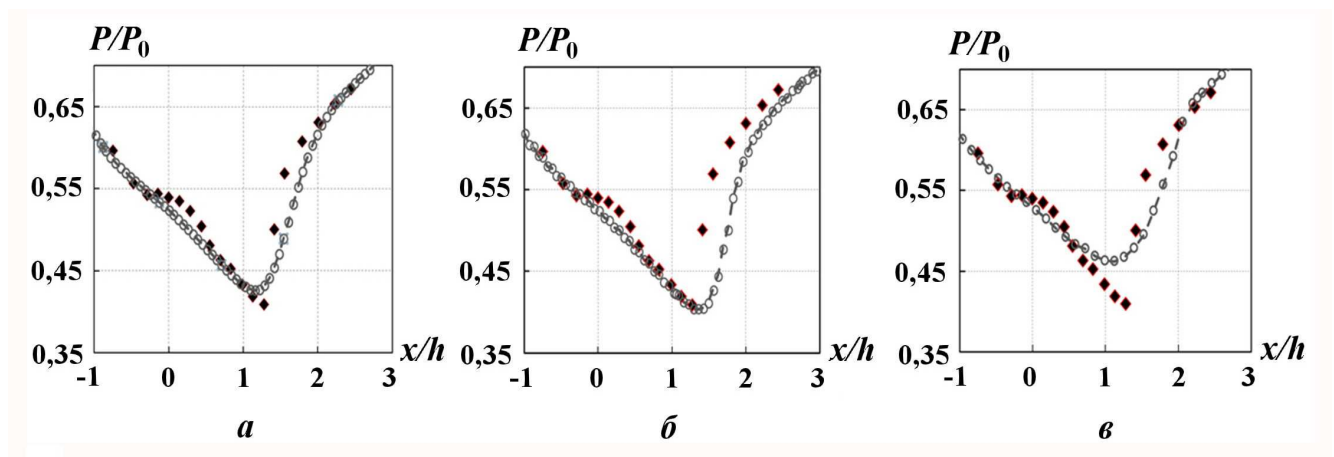


Рис. 8. Задача 2. Распределение статического давления, полученное на гексагональной (*a*), тетраэдральной (*б*) и полиэдральной (*в*) сетках с применением ограничителя Венкатакришна: — — — без его использования в алгоритме Грина—Гаусса;  $\circ$  — с его использованием в алгоритме Грина—Гаусса;  $\blacklozenge$  — эксперимент

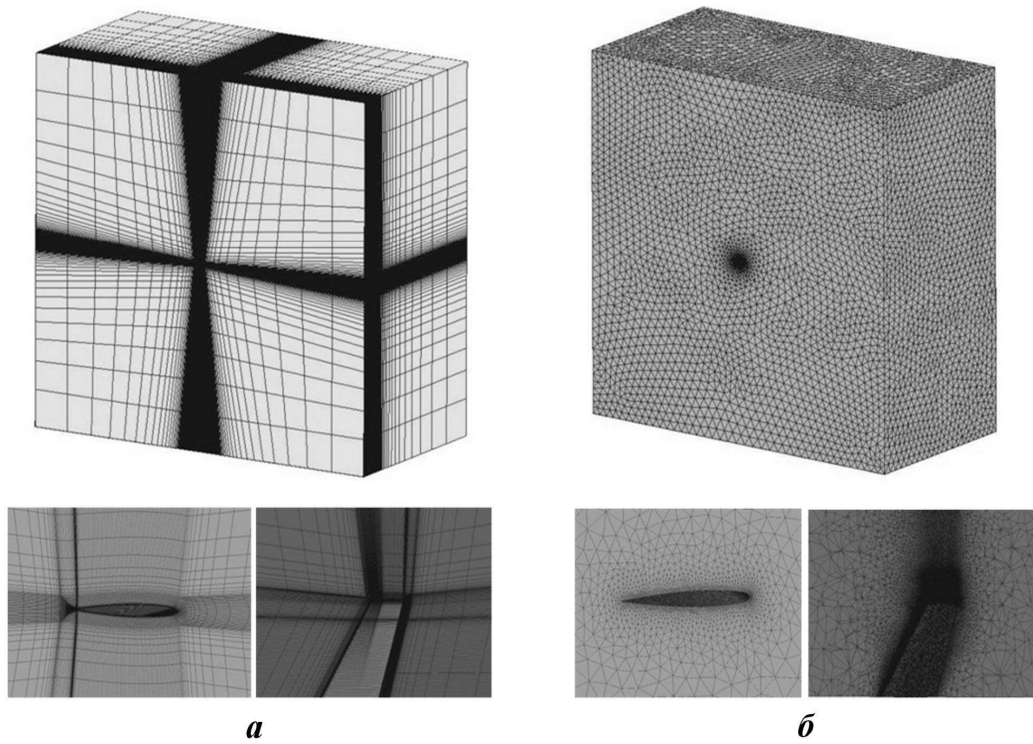


Рис. 9. Задача 3. Внешний вид гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сеток: общий вид (вверху), а также виды сбоку (внизу слева) и сверху (внизу справа) вблизи крыла

$= 1,172 \cdot 10^6$ . Для исследования влияния ограничителей анализировалось распределение коэффициента давления  $C_P$  в сечении крыла  $z = 0,2$ , определяемого соотношением

$$C_P = \frac{P_x - P_{ref}}{2\rho_\infty u_\infty^2}, \quad (8)$$

где  $P_x$  — текущее давление;  $P_{ref}$ ,  $\rho_\infty$  и  $u_\infty$  — давление, плотность и модуль скорости в бесконечно удаленной точке.

Сравнение результатов расчетов для различных сеток с применением ограничителей для вычисления конвективного слагаемого уравнения движения представлено на рис. 10. Анализ графиков показывает, что в области скачка уплотнения лимитирующие функции Ван Леера и Барта—Джесперсена влияют на порядок схемы незначительно, в то время как ограничитель Венкатакришнана, как ожидалось, более существенно понижает ее порядок (до первого).

На рис. 11 представлено сравнение применения ограничителя Венкатакришнана с его использованием для уточнения градиентов и без него. Как и в предыдущих задачах, существенного влияния на точность решения не замечено.

### Заключение

В статье исследовано влияние ограничителей градиента на точность результатов при моделировании сжимаемых и несжимаемых течений с применением алгоритма SIMPLE. Приведен алгоритм расчета ограничительного коэффициента с различными типами лимитирующих функций. Ограничители градиента использовались при вычислении конвективного слагаемого уравнения движения, а также самого градиента итерационным методом Грина—Гаусса.

На серии численных экспериментов показано, что ограничители градиента, применяемые в конвективном слагаемом, понижают порядок аппроксимации схемы, приводя к потере точности. Огра-

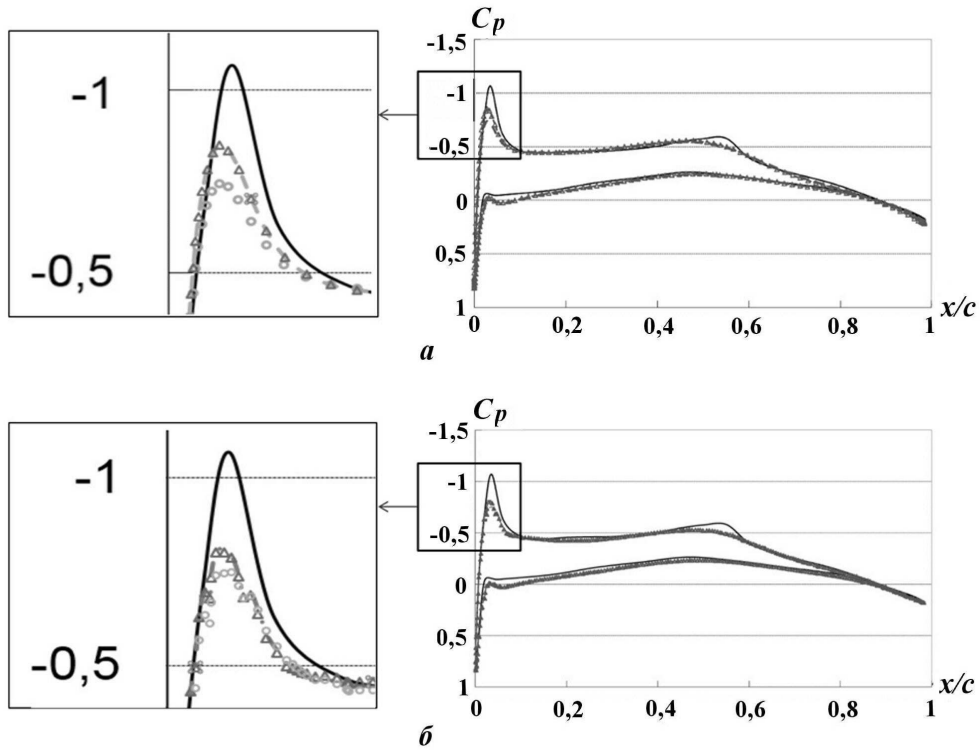


Рис. 10. Задача 3. Распределение коэффициента давления на гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сетках для трех ограничителей:  $\Delta$  — Ван Леера;  $\circ$  — Венкатакришнана; - - - — Барта—Джесперсена; — — — эксперимент

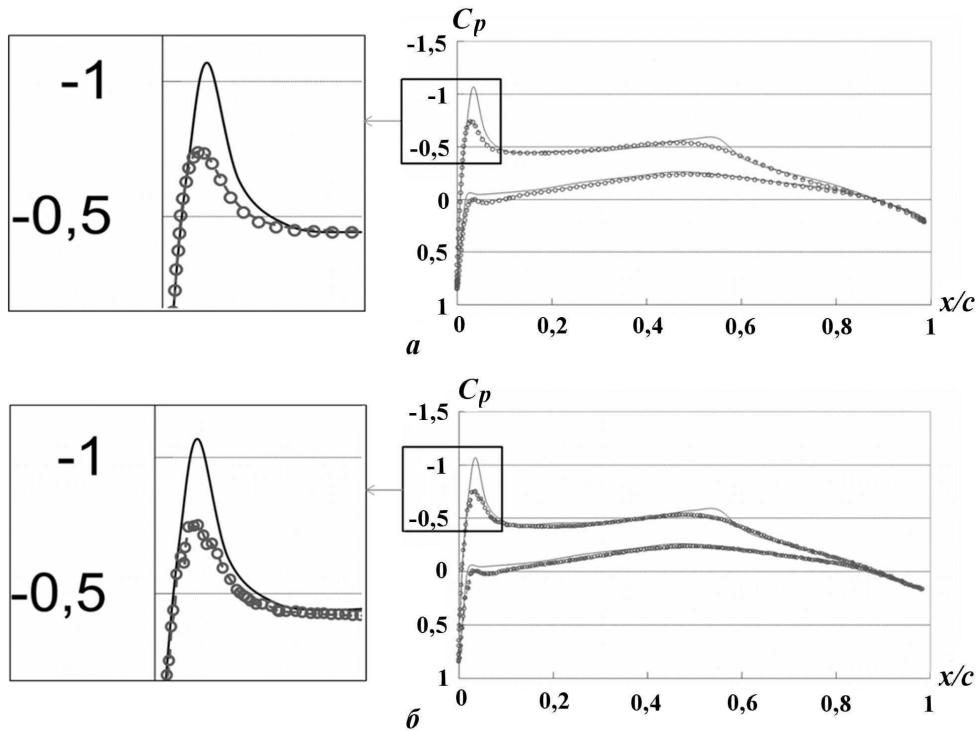


Рис. 11. Задача 3. Распределение коэффициента давления, полученное на гексагональной (а) и тетраэдральной (б) сетках с применением ограничителя Венкатакришнана: - - - — без его использования в алгоритме Грина—Гаусса;  $\circ$  — с его использованием в алгоритме Грина—Гаусса; — — — эксперимент

нитель Венкатакришна на как в несжимаемых, так и сжимаемых течениях понижает точность расчета в отличие от ограничителей Барта—Джесперсена и Ван Леера, дающих более точный результат в исследуемых областях высоких градиентов. Применение ограничителей в вычислении градиента итерационным методом Грина—Гаусса на данных задачах не оказало существенного влияния на результат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00267).

### Список литературы

1. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 2002.
2. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984.
3. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др.* Моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках методом отсоединенных вихрей // Математическое моделирование. 2013. Т. 26, № 8. С. 81—96.
4. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С. и др.* Исследование схем дискретизации конвективного потока для моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости методом отсоединенных вихрей // Фундаментальные исследования. 2013. № 10. С. 1051—1058.
5. *Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Володченкова К. Б.* Моделирование турбулентных течений на сетках гибридной структуры с использованием схем высокого порядка точности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. Вып. 3. С. 18—31.
6. *Курулин В. В., Козелков А. С.* Численная схема для моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости с использованием вихреразрешающих подходов // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 135—146.
7. *Jasak H., Weller H. G., Gosman A. D.* High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes // Int. J. for Num. Meth. in Fluids. 1999. Vol. 31, No 4. P. 431—449.
8. *Darwish M. S., Moukalled F.* TVD schemes for unstructured grids // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 599—611.
9. *Park J. S., Kim C.* Multi-dimensional limiting process for finite volume methods on unstructured grids // Computers & Fluids. 2012. Vol. 65. P. 8—24.
10. *Barth T. J., Jaspersen T. J.* The Design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper. 1989. No 89-0366,
11. Gradient Computation. [http://www.cfd-online.com/Wiki/Gradient\\_computation](http://www.cfd-online.com/Wiki/Gradient_computation).
12. *Van Albada G. D., Van Leer B., Roberts W. W. Jr.* A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // Astronomy and Astrophysics. 1982. Vol. 108. P. 76—84.
13. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357—393.
14. *Sweby P. K.* High resolution schemes using flux-limiters // SIAM J. Num. Anal. 1984. Vol. 21. P. 995—1011.
15. *Venkatakrishnan V.* Perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA Journal. 1996. Vol. 34, No 3. P. 533—547.
16. *Venkatakrishnan V.* On the accuracy of limiters and convergence to steady state solution // AIAA Paper. 1993. No 93-0880.

17. *Bidadi S., Rani Sarma L.* Quantification of numerical diffusivity due to TVD schemes in the advection equation // *J. Comp. Phys.* 2014. Vol. 261. P. 65–82.
18. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В. и др.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2013. Вып. 4. С. 44–56.
19. *Jasak H.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow. London: Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, 1996.
20. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., и др.* Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физмалит, 2013.
21. *Betelin V. B., Shagaliev R. M., Aksenov S. V. et al.* Mathematical simulation of hydrogen-oxygen combustion in rocket engines using LOGOS code // *Acta Astronautica.* 2014. Vol. 96. P. 53–64.
22. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др.* Алгебраический метод в задачах вычислительной физики // *Вычислительные методы и программирование.* 2014. Т. 15. С. 183–200.
23. *Козелков А. С., Куркин А. А., Крутякова О. Л. и др.* Зонный RANS-LES подход на основе алгебраической модели рейнольдсовых напряжений // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2015. № 5. С. 24–33.
24. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н. и др.* Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
25. *Козелков А. С., Дерюгин Ю.Н., Циберева Ю.А. и др.* Минимальный базис задач для валидации методов численного моделирования турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости // *Труды Нижегородского гос. тех. ун-та им. Р. Е. Алексеева.* 2014. Т. 106, № 4. С. 21–69.
26. *Козелков А. С., Курулин В. В., Пучкова О. Л., Лашкин С. В.* Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2014. Т. 7, № 1. С. 40–51.
27. *Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Курулин В. В.* Моделирование цунами космогенного происхождения в рамках уравнений Навье–Стокса с источниками различных типов // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2015. № 2. С. 142–150.
28. *Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. и др.* Моделирование возмущений в озере Чебаркуль при падении метеорита в 2013 году // *Там же.* № 6. С. 134–143.
29. *Козелков А. С.* Методика численного моделирования цунами оползневой типа на основе уравнений Навье–Стокса // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 218–236.
30. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal.* 1994. Vol. 32, No 8. P. 1598–1605.
31. *Зайков Л. А., Стрелец М. Х., Шур М. Л.* Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в каналах с обратным уступом // *Теплофизика высоких температур.* 1996. Т. 34, № 35. С. 724–736.
32. *Kozelkov A., Kurulin V., Emelyanov V. et al.* Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes // *J. Sci. Comp.* 2015. Vol. 89. P. 1–16.
33. *Burt M.* Summaries of the test cases. Case D5 // *A Selection of Experimental Test Cases for the Validation of CFD Codes. AGARD Advisory Report No 303.* Vol. 1. August 1994. P. 114–115.
34. *Schmitt V., Charpin F.* Pressure distributions on the ONERA-M6-Wing at transonic mach numbers // *Experimental Database for Computer Program Assessment. AGARD Advisory Report No 138.* May 1979. P. B1(1–44).

35. Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н. Влияние угла входа тела в воду на высоты генерируемых волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 166—176.

Статья поступила в редакцию 19.01.16.

USE OF GRADIENT LIMITERS TO SOLVE NAVIER-STOKES EQUATIONS ON ARBITRARY UNSTRUCTURED GRIDS / S. V. Lashkin, A. S. Kozelkov, E. V. Glazunova, N. V. Tarasova, A. V. Yalozo (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N.Novgorod region)

The paper analyses the use of gradient limiters on arbitrarily-shaped unstructured grids in the finite volume methods for the Navier-Stokes equation discretization with the SIMPLE algorithm. The effect of limiters on the accuracy of results obtained using the convective gradient schemes of the second order, as well as the accuracy of gradients calculated using the Green-Gauss iterative algorithm is considered. Simulations of compressible and incompressible flows using grids of different topologies are described. An optimal use of limiters for solving problems with the SIMPLE algorithm is recommended.

*Keywords:* gradient limiters, unstructured grids, Navier-Stokes equations, algorithm SIMPLE.

---