

УДК 517.958:536.2

## РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОГРУППОВОГО КВАЗИПЕРЕНОСА

Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск Челябинской области)

Описана модель расчета теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса для двумерной геометрии, полученная путем введения множителей на пребег в диффузационном приближении. Проводится сравнение результатов расчетов модельных задач.

*Ключевые слова:* перенос излучения, приближение квазипереноса.

### Введение

Одной из наиболее трудных задач теории переноса является решение спектрального уравнения переноса излучения, что определяется главным образом большой размерностью рассматриваемого пространства. В связи с этим применяют различные приближения, сводящие задачу переноса излучения к более простой. К таким приближениям относятся многогрупповое приближение [1], метод сферических гармоник [2],  $SP_n$ -метод [3], диффузационное приближение [4], квазидиффузационное приближение [5], приближение лучистой теплопроводности [6] и др. Проблема создания эффективных методик в спектральном кинетическом приближении остается актуальной до сих пор.

В 2010 г. в работе [7] было предложено систему уравнений переноса заменять уравнениями квазипереноса, где решения получаются по диффузационным уравнениям с нелинейным множителем при коэффициенте поглощения. В отличие от квазидиффузационного приближения, которое приводит к гиперболической системе уравнений, в приближении квазипереноса решается параболическая система, для которой можно построить монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации. Модель квазипереноса по сравнению с кинетическими расчетами дает аналогичный результат за существенно меньшее время.

В настоящей работе предлагается и исследуется обобщение метода квазипереноса на двумерный случай. Для получения множителей к диффузационному потоку на кинетическом этапе используются две разностные схемы: монотонная линейная St-схема [8] первого порядка аппроксимации и нелинейная схема с TVD-реконструкцией [9] повышенного (выше первого) порядка аппроксимации. На диффузационном этапе используется схема РОМБ [10, 11]. При решении двумерной диффузационной системы применяется итерационный метод стабилизирующей поправки (ИМСП) [12]. Для совместного решения уравнений диффузии и уравнения энергии применяется метод выделения диагонального элемента в поправочной форме (ВДЭПФ) [13]. Приближение квазипереноса можно распараллелить по группам, направлениям и пространственным переменным.

### Решение кинетического уравнения в приближении квазипереноса

Рассмотрим двумерное нестационарное кинетическое уравнение переноса излучения в многогрупповом приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат:

$$r \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (J_g) + \frac{\partial}{\partial r} (\xi r J_g) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu r J_g) - \frac{\partial}{\partial \psi} (\eta J_g) + r \alpha_g J_g = \frac{r}{4\pi} (\alpha_{cg} B_g + \alpha_s U_g). \quad (1)$$

Здесь используются следующие обозначения:  $\vec{r} = (r, z)$  — радиус-вектор;  $t$  — время;  $\vec{\Omega} = \{\mu = \cos \theta, \xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi\}$  — единичный вектор в направлении полета фотона, где  $\theta$  — угол между  $\vec{\Omega}$  и осью  $Z$ ,  $\phi$  — угол между проекцией  $\vec{r}$  и проекцией  $\vec{\Omega}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $Z$ ;  $J_g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  — интенсивность излучения, соответствующая группе  $g$ ,  $g = 1, \dots, G$ ;  $\alpha_{cg}$  — коэффициент поглощения;  $\alpha_s$  — коэффициент рассеяния;  $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_s$  — коэффициент ослабления;  $B_g(T)$  — интенсивность равновесного излучения (функция Планка с множителем);  $U_g = \int J_g d\vec{\Omega}$  — плотность энергии излучения группы  $g$ , умноженная на скорость света.

Проинтегрировав уравнение (1) по  $\mu$  от  $-1$  до  $1$  и по  $\psi$  от  $0$  до  $2\pi$  и использовав для потока закон Фика [1], получим систему уравнений диффузии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (U_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial (r (\vec{\Phi}_g)_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\vec{\Phi}_g)_z}{\partial z} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{1}{3} \operatorname{grad} U_g + \alpha_g \vec{\Phi}_g &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vec{\Phi}_g = \int J_g \vec{\Omega} d\vec{\Omega}$  — поток энергии излучения:

$$\vec{\Phi}_g = \begin{pmatrix} \Phi_{g1} \\ \Phi_{g2} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{g1} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J_g d\mu d\psi, \quad \Phi_{g2} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J_g d\mu d\psi.$$

Совместно с системой уравнений (2) решается уравнение энергии

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g), \quad (3)$$

где  $E$  — внутренняя энергия вещества;  $\rho$  — плотность вещества.

Начальные условия имеют вид

$$U_g(r, z, t)|_{t=t_0} = U_g^0(r, z); \quad \vec{\Phi}_g(r, z, t)|_{t=t_0} = \vec{\Phi}_g^0(r, z).$$

Границные условия задаются на границе  $\Sigma$  области  $D(r, z)$ :

$$\xi_g U_g - \eta_g (\vec{\Phi}_g \cdot \vec{n})|_{(r, z) \in \Sigma} = \varphi_g, \quad g = 1, \dots, G. \quad (4)$$

Здесь  $\vec{n}$  — внешняя нормаль;  $\xi_g, \eta_g, \varphi_g$  — параметры для задания граничных условий,  $\xi_g \geq 0, \eta_g \geq 0, \xi_g + \eta_g > 0$ .

Система уравнений (1)–(4) решается в области  $[t^0, t^N] \times D(r, z)$ , где  $[t^0, t^N]$  — интервал времени;  $D$  — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось  $Z$ , расположенная в полу平面  $\{-\infty < z < \infty, r \geq 0\}$ . Интервал  $[t^0, t^N]$  разбивается на временные шаги  $\tau = t^{n+1} - t^n$ . Счетная область  $D$  покрывается структурированной сеткой из четырехугольников.

Вводя нормальные компоненты вектора теплового потока  $W_g^1 = \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n} \Delta l)_i$ ,  $W_g^2 = \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n} \Delta l)_j$ , где  $\vec{n}_i, \vec{n}_j$  — счетные нормали, направленные в сторону возрастания индексов, получаем конечно-разностную схему в терминах нормальных составляющих потока:

$$\begin{aligned} (q_g^0 U_g)^{n+1} + \frac{1}{V_{ij}} \left( \Delta_i (r W_g^1)^{n+1} + \Delta_j (r W_g^2)^{n+1} \right) &= \frac{1}{c\tau} (U_g)^n + \alpha_{cg} B_g^{n+1}; \\ (W_g^1)^{n+1} + \frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} \left( M_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{n+1}) - M_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{n+1}) \right) &= 0; \\ (W_g^2)^{n+1} + \frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} \left( -L_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{n+1}) + L_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{n+1}) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned}\Delta_i(\cdot) &= (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i \Big|_{j+1/2}; \quad \Delta_j(\cdot) = (\cdot)_{j+1} - (\cdot)_j \Big|_{i+1/2}; \\ M_{i+1/2} &= \frac{1}{3} \left( (\Delta_j z)_{i+1/2}^2 + (\Delta_j r)_{i+1/2}^2 \right) = \frac{1}{3} \Delta l_{i+1/2}^2; \\ M_{j+1/2} &= \frac{1}{3} \left( (\Delta_i z)_{j+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2} + (\Delta_i r)_{j+1/2} (\Delta_j r)_{i+1/2} \right); \\ L_{i+1/2} &= \frac{1}{3} \left( (\Delta_j z)_{i+1/2} (\Delta_i z)_{j+1/2} + (\Delta_j r)_{i+1/2} (\Delta_i r)_{j+1/2} \right); \\ L_{j+1/2} &= \frac{1}{3} \left( (\Delta_i z)_{j+1/2}^2 + (\Delta_i r)_{j+1/2}^2 \right) = \frac{1}{3} \Delta l_{j+1/2}^2.\end{aligned}$$

В квазипереносном приближении [7] система диффузационных уравнений (5) решается на итерациях и имеет вид

$$\begin{aligned}(q_g^{0\nu} U_g)^{\nu+1} + \frac{1}{V_{ij}} \left( \Delta_i (r W_g^1)^{\nu+1} + \Delta_j (r W_g^2)^{\nu+1} \right) &= \frac{1}{c\tau} (U_g)^n + \alpha_{cg} B_g^{\nu+1}; \\ (W_g^1)^{\nu+1} + \frac{\bar{m}_g^1}{\Delta S_{ij} \alpha_g^\nu} \left( M_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{\nu+1}) - M_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{\nu+1}) \right) &= 0; \\ (W_g^2)^{\nu+1} + \frac{\bar{m}_g^2}{\Delta S_{ij} \alpha_g^\nu} \left( -L_{i+1/2} \Delta_i (U_g^{\nu+1}) + L_{j+1/2} \Delta_j (U_g^{\nu+1}) \right) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь  $\nu$  — итерационный индекс;  $(U_g)^n$  вычисляется на диффузционном этапе, а коэффициенты  $(\bar{m}_g^1)^{n+1}$ ,  $(\bar{m}_g^2)^{n+1}$  вычисляются на кинетическом этапе через потоки в центрах ячеек  $(W_g^1)_k^{n+1}$  и плотности на гранях  $(U_g)_i^{n+1}$ ,  $(U_g)_j^{n+1}$  (ниже индекс  $n+1$  опускается):

$$\begin{aligned}\bar{m}_g^1 &= \frac{(W_g^1)_k}{(W_g^1)_d}, \quad (W_g^1)_d = -\frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} (M_{i+1/2} \Delta_i U_g - M_{j+1/2} \Delta_j U_g), \\ (W_g^1)_k &= \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n} \Delta l)_{i+1/2} = \left( \Delta_j z \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J_g d\mu d\psi - \Delta_j r \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J_g d\mu d\psi \right)_{i+1/2}; \\ \bar{m}_g^2 &= \frac{(W_g^2)_k}{(W_g^2)_d}, \quad (W_g^2)_d = -\frac{1}{\Delta S_{ij} \alpha_g} (-L_{i+1/2} \Delta_i U_g + L_{j+1/2} \Delta_j U_g), \\ (W_g^2)_k &= \vec{\Phi}_g \cdot (\vec{n} \Delta l)_{j+1/2} = \left( -\Delta_i z \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J_g d\mu d\psi + \Delta_i r \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J_g d\mu d\psi \right)_{j+1/2}.\end{aligned}$$

На выбор коэффициентов  $\bar{m}_g^1$ ,  $\bar{m}_g^2$  накладываются ограничения:  $m_{\min} \leq \bar{m}_g^1$ ;  $\bar{m}_g^2 \leq m_{\max}$ . Понятно, что из условия положительности коэффициента диффузии следует  $m_{\min} > 0$ . В одномерном случае при введении ограничений на коэффициенты  $\bar{m}_g^1$ ,  $\bar{m}_g^2$  в работе [7] предлагается использовать  $0,05 \leq m_{\min} \leq 0,2$ . Для выбора  $m_{\min}$  в двумерном случае используются те же ограничения. Выбор  $m_{\max}$  осуществляется исходя из условия, чтобы кинетический поток превышал диффузионный не более чем в 3 раза.

Двумерную краевую задачу решаем с помощью ИМСП [12]. На каждом этапе ИМСП используется разностная схема РОМБ [10, 11]. Для совместного решения уравнений диффузии и уравнения энергии применяется итерационный метод ВДЭПФ [13].

## Численные расчеты

В данном разделе приводятся результаты расчетов трех тестовых задач.

Первые две задачи построены на основе второй задачи Флека [14]. В этих задачах плоский слой толщиной 4 см прогревается стационарным планковским источником излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Начальная температура равна  $T_0 = 0,00001$  кэВ, плотность вещества  $\rho = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ , уравнение состояния  $E = 0,81T$ , рассеяние отсутствует.

Третья задача моделирует остывание нагретой системы за счет излучения через *свободную поверхность*.

**Задача 1. Вторая задача Флека для сферы.** Для численного моделирования одномерной плоской задачи Флека в двумерной осесимметричной постановке рассмотрим сферический слой ( $101 \text{ см} \leq R \leq 105 \text{ см}$ ,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ ). На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток, определяемый по единичной температуре, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности. На остальных границах заданы условия отражения.

Для численного моделирования по радиусу взята неравномерная сетка из 67, 134, 268 ячеек со сгущением к границам вещества. По углу взята равномерная сетка из 15 ячеек. В пространстве направлений — квадратура  $ES_{16}$ . Многогрупповой коэффициент поглощения берется из задачи Флека:

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 103 \leq R \leq 103,4; \\ \frac{27}{\varepsilon_g^3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

По энергии фотонов бралось 28 групп с границами по  $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0$ . Задача считалась с постоянным шагом  $2 \cdot 10^{-4}$  до выхода на стационарный режим при  $ct = 600$  см с константой сходимости итераций по температуре, равной 0,00001. Для выбора  $m_{\min}$  в данной задаче проведены исследования, аналогичные выполненным в работе [7].

На рис. 1 показаны отклонения температуры вещества от аналитического решения [15] вдоль горизонтального канала в норме  $L_1$ :

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} |T_{i+1/2,j+1/2} - T_{\text{точное}}| h_i}{\sum_{i=1}^{i_{\max}} h_i}$$

при  $ct = 600$  см для разных  $m_{\min}$  в схемах St и TVD. Здесь  $h_i$  — линейный размер ячейки вдоль радиуса. Видно, что минимум отклонения температуры для разных схем различен, но находится в некотором интервале, строго больше нуля. Коэффициент  $m_{\min}$  для данной задачи в схемах St и TVD можно выбирать в интервале  $0,05 \leq m_{\min} \leq 0,1$ . Дальнейшие расчеты велись с  $m_{\min} = 0,1$  и  $m_{\max} = 2,7$ .

На рис. 2–5 приведены графики распределения температуры вещества вдоль радиуса, полученные по кинетическому, квазипереносному и диффузионному приближениям при  $ct = 9$  см и  $ct = 600$  см на сетке из 67 интервалов. Для сравнения приведены результаты, полученные по расчетам на сходимость на сетке из 5 000 интервалов, которые будем считать *точным* решением. Результаты, полученные по разным приближениям, очень близки друг к другу, поэтому они приведены для трех участков: первый ( $101 \text{ см} \leq R \leq 103 \text{ см}$ ) и третий ( $103,4 \text{ см} \leq R \leq 105 \text{ см}$ ) участки — оптически прозрачная среда, второй ( $103 \text{ см} \leq R \leq 103,4 \text{ см}$ ) — оптически плотная среда.

Из рис. 2 видно, что в оптически прозрачной области самый близкий к точному решению результат дает кинетическое приближение, а ближе всех к кинетическому приближению — приближение квазипереноса с использованием St-схемы на кинетическом этапе. Дальше всех от точного решения отстоит диффузионное решение.

В оптически плотной области ближе всех к точному решению лежат решения, полученные в приближении квазипереноса с использованием St- и TVD-схем (см. рис. 3), а дальше всех — кинетиче-

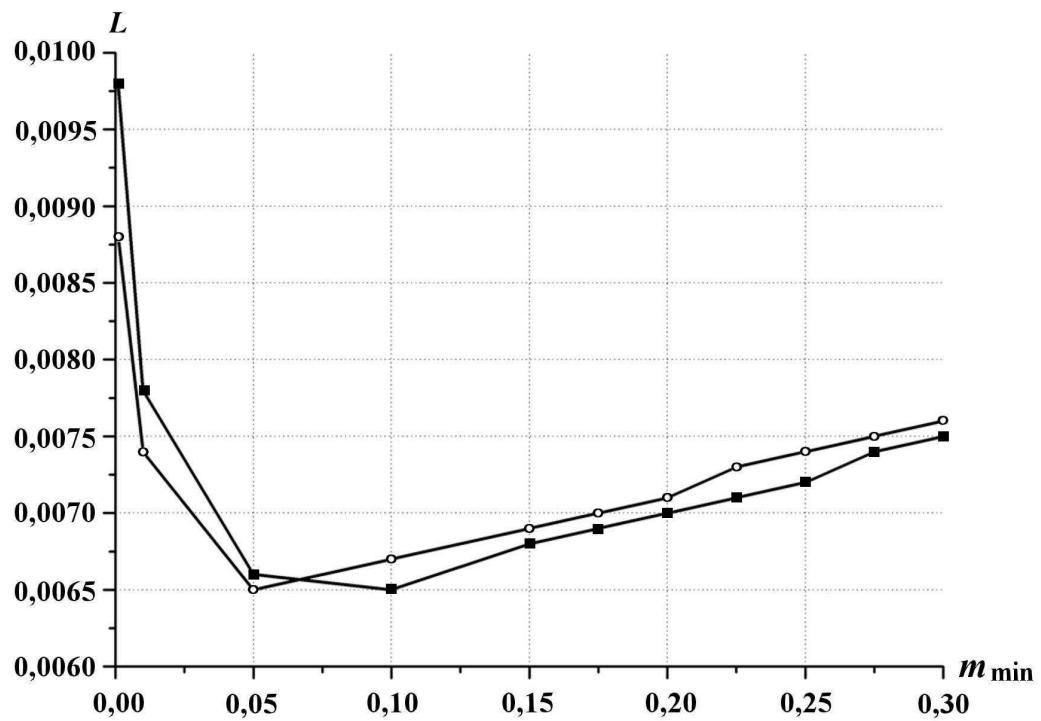


Рис. 1. Задача 1. Отклонения температуры вещества от аналитического решения: —■— St-схема; —○— TVD-схема

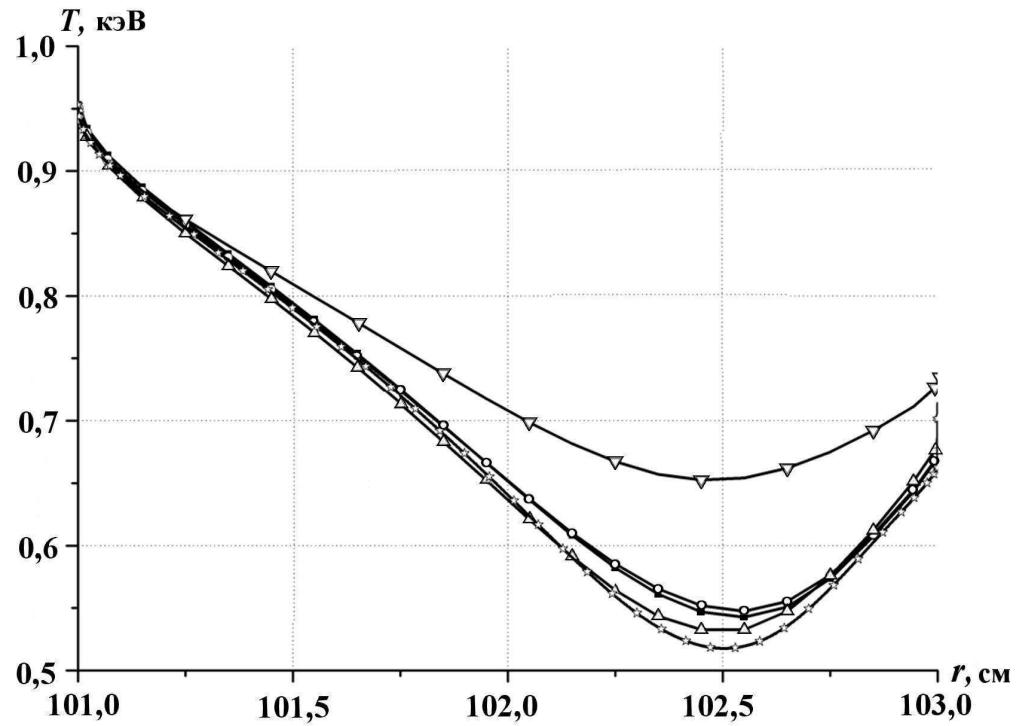


Рис. 2. Задача 1. Профили температуры вещества при  $101 \text{ см} \leq R \leq 103 \text{ см}$  и  $ct = 9 \text{ см}$ : —■— квазиперенос, St-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— кинетическое решение, TVD-схема; —▽— диффузионное решение; —★— точное решение

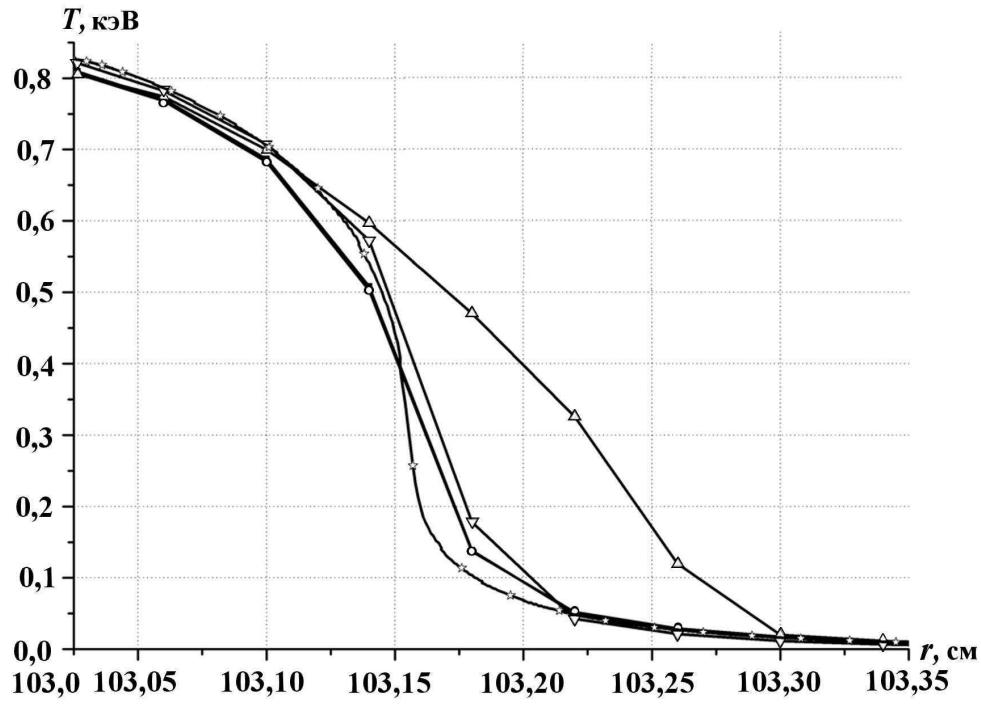


Рис. 3. Задача 1. Профили температуры вещества при  $103 \text{ см} \leq R \leq 103,35 \text{ см}$  и  $ct = 9 \text{ см}$ : —■— квазиперенос, St-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— кинетическое решение, TVD-схема; —▽— диффузионное решение; —★— точное решение

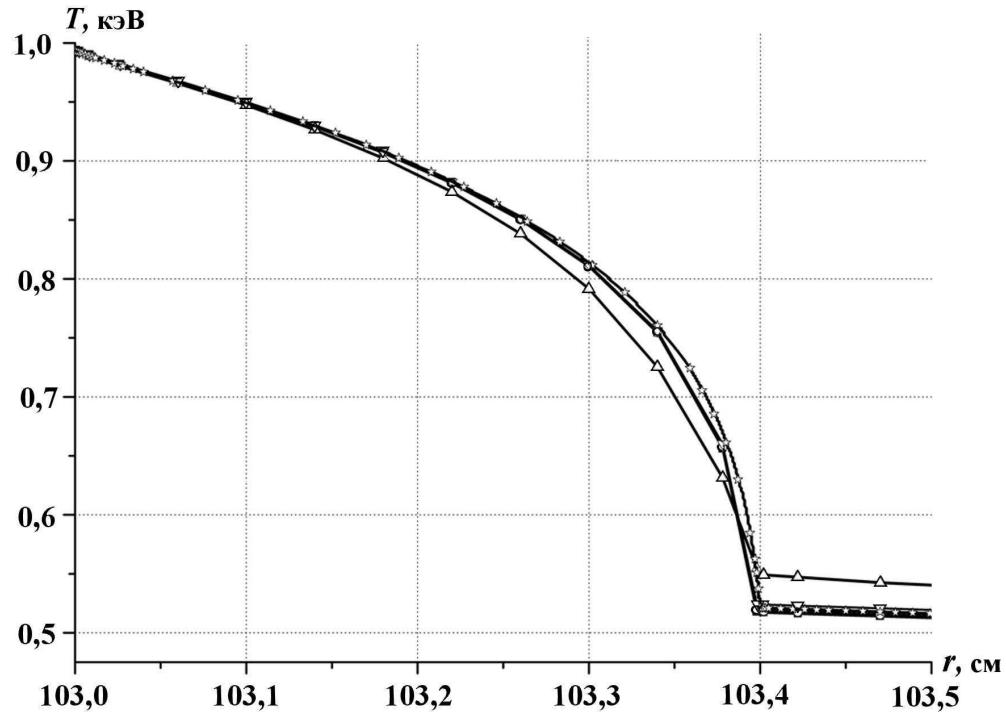


Рис. 4. Задача 1. Профили температуры вещества при  $103 \text{ см} \leq R \leq 103,5 \text{ см}$  и  $ct = 600 \text{ см}$ : —■— квазиперенос, St-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— кинетическое решение, TVD-схема; —▽— диффузионное решение; —★— точное решение

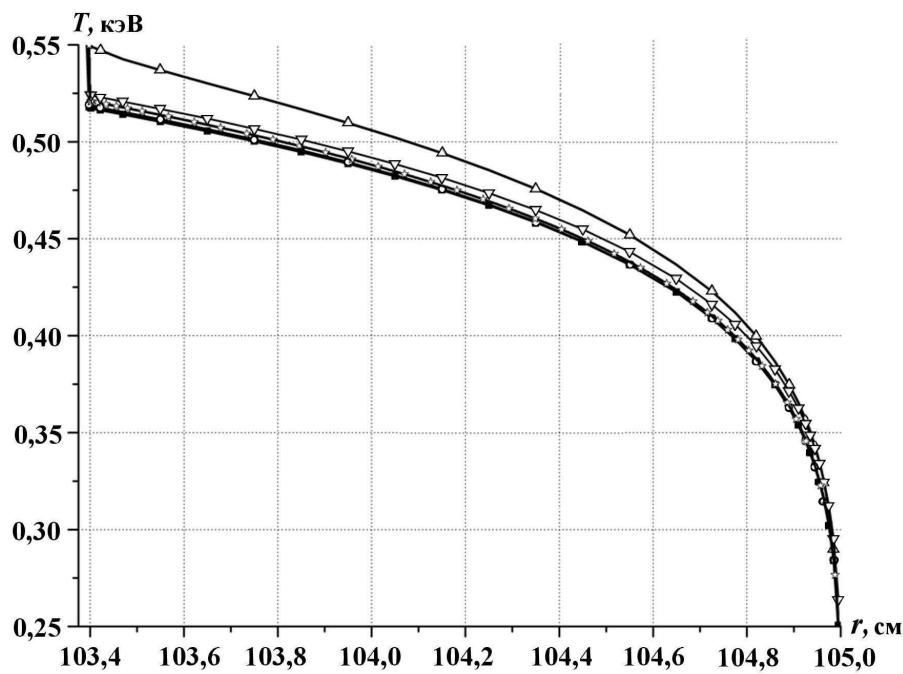


Рис. 5. Задача 1. Профили температуры вещества при  $103,4 \text{ см} \leq R \leq 105 \text{ см}$  и  $ct = 600 \text{ см}$ : —■— квазиперенос, St-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— кинетическое решение, TVD-схема; —▽— диффузионное решение; —★— точное решение

ское решение, которое в оптически плотной среде требует более подробной сетки, чем приближение квазипереноса. Результаты в приближении квазипереноса с использованием St- и TVD-схем в этой области совпадают, поэтому маркеры, соответствующие этому приближению с St-схемой, на рисунке не видны.

Из рис. 4 видно, что в оптически плотной области при выходе на стационарный режим все приближения дают практически совпадающие профили температуры, поэтому не все маркеры видны. Дальше всех от точного решения отстоит кинетическое решение по TVD-схеме, которое в оптически плотной среде требует более подробной сетки, чем остальные приближения.

В оптически прозрачной области при выходе на стационарный режим ближе всех к точному получаются решения в приближении квазипереноса (см. рис. 5), далее идут диффузионное решение и кинетическое решение по TVD-схеме.

В табл. 1 приведены интегральные потоки (в безразмерных единицах) через внешнюю поверхность сферы при  $ct = 600 \text{ см}$ , полученные в кинетическом (К), квазипереносном (КП) и диффузионном (Д) приближениях на сетке из 268 ячеек; в скобках дается отличие от точного решения (на сетке из 5 000 интервалов). Видно, что интегральные потоки, полученные в кинетическом и диффузионном приближениях, отличаются от точного решения сильнее, чем полученные в приближении квазипереноса.

В табл. 2 приведено время счета за 40 шагов, полученное при решении задачи в кинетическом, квазипереносном и диффузионном приближениях на сетке из 268 ячеек. Результаты указаны для последовательного режима без распараллеливания. Видно, что время счета задачи в приближении квазипереноса намного меньше времени ее счета в кинетическом приближении и ближе ко времени счета при диффузионном приближении.

**Задача 2. Вторая задача Флека для сферы с двумя щелями.** Задача представляет собой модификацию предыдущей задачи посредством введения в плотную область двух щелей (рис. 6), заполненных оптически прозрачным веществом. Щели ограничены прямыми, выходящими из начала координат под углами  $0 \leq \theta \leq 5^\circ$  и  $85^\circ \leq \theta \leq 95^\circ$  к оси  $Z$ . По радиусу взята неравномерная

Таблица 1

**Задача 1. Интегральные выходящие потоки через внешнюю поверхность сферы и отличие от точного решения на 5 000 интервалах**

Модель	Сетка		
	67 ячеек	134 ячейки	268 ячеек
Д, схема РОМБ	767 788,8 (2,9 %)	762 568,7 (2,2 %)	759 116,8 (1,7 %)
КП, St-схема	758 141,0 (1,6 %)	750 519,2 (0,6 %)	746 527,1 (0,08 %)
КП, TVD-схема	756 381,8 (1,4 %)	750 201,6 (0,6 %)	746 571,1 (0,08 %)
К, TVD-схема	805 127,5 (7,9 %)	768 051,2 (2,9 %)	756 632,5 (1,4 %)
Точное решение	—	745 922,2	—

Таблица 2

**Задача 1. Время счета (в мин) за 40 шагов**

Модель	Сетка		
	67 ячеек	134 ячейки	268 ячеек
Д, схема РОМБ	0,5	2	13
КП, St-схема	3	7	20
КП, TVD-схема	5	12	29
К, TVD-схема	30	57	498

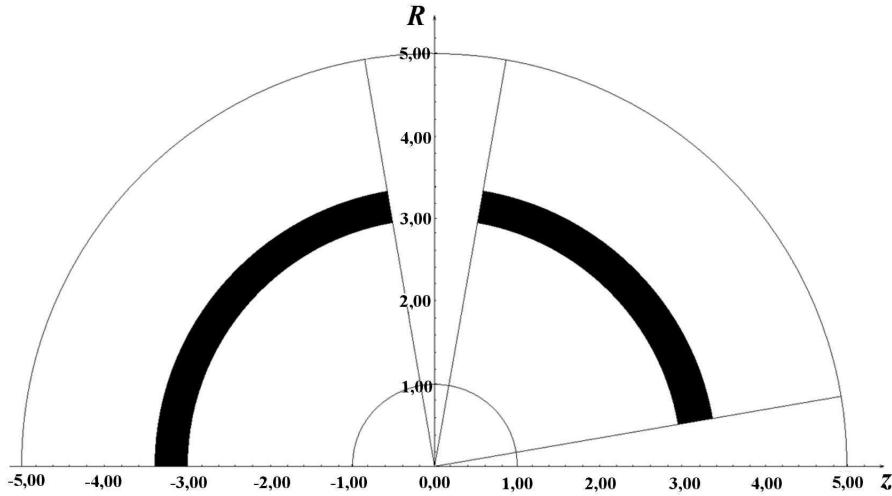


Рис. 6. Геометрия задачи 2

сетка из 134 ячеек со сгущением к границам веществ. По углу взята равномерная сетка из 36 ячеек. В пространстве направлений — квадратура  $ES_{16}$ .

На рис. 7, 8 приведены графики распределения температуры вещества соответственно вдоль горизонтального и вертикального каналов, полученные по кинетическому и квазипереносному приближениям при  $ct = 9; 27; 600$  см. Видно, что распределения температуры, полученные по кинетическому и квазипереносному приближениям, очень близки между собой. Отличие возникает только в моменты формирования тепловой волны в зазорах при  $ct = 9$  см и  $ct = 27$  см. Видно, что приближение квазипереноса сглаживает возникающий в кинетическом приближении пик температуры.

На рис. 9 приведен профиль температуры вещества по угловому каналу (на выходе из плотной области) в зависимости от номера ячейки при  $ct = 600$  см. Видно отличие распределений температур

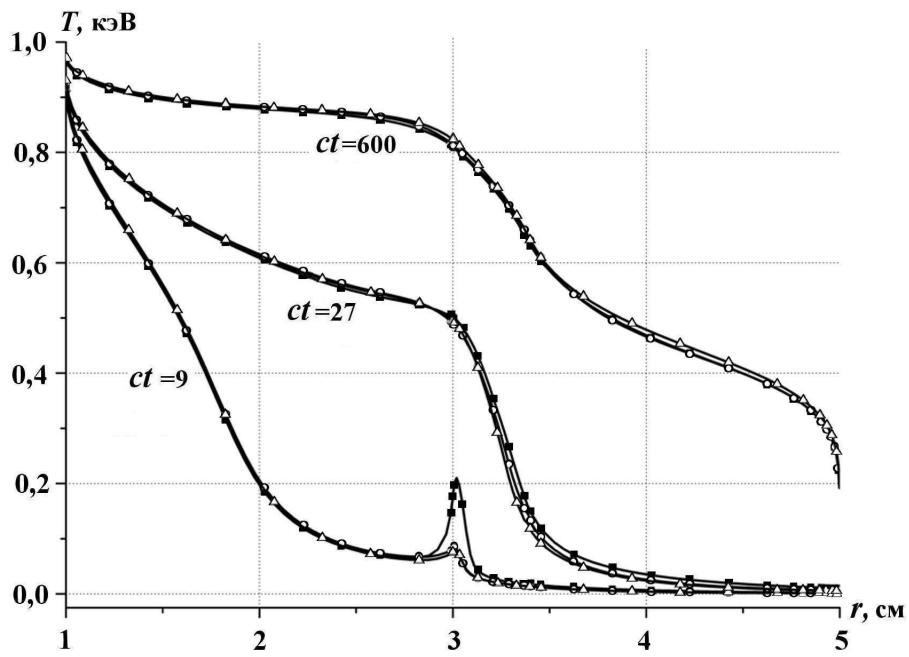


Рис. 7. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль горизонтального канала: —■— кинетическое решение, TVD-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— квазиперенос, St-схема

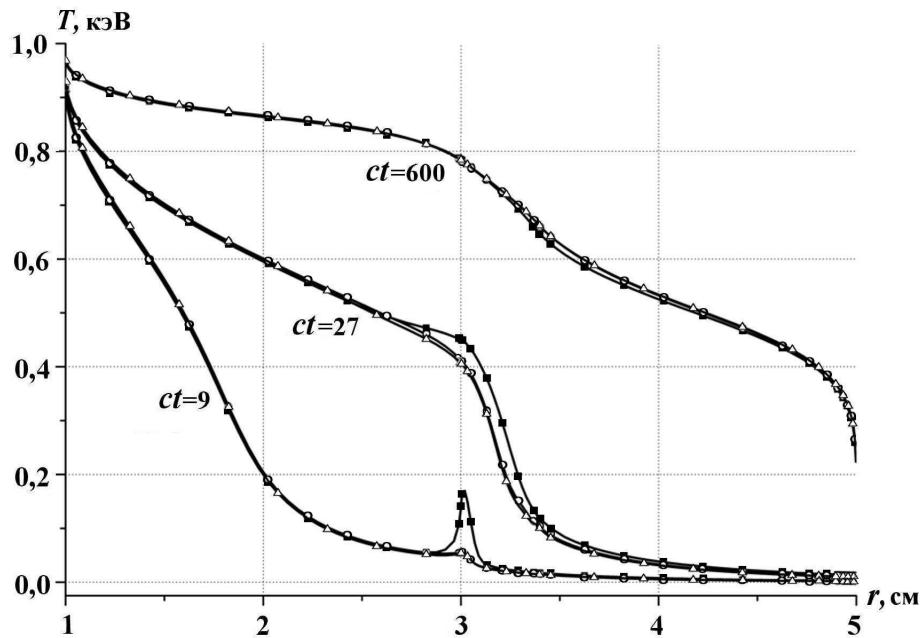


Рис. 8. Задача 2. Профили температуры вещества вдоль вертикального канала: —■— кинетическое решение, TVD-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— квазиперенос, St-схема

по углу, полученных по разным приближениям на достаточно редкой угловой сетке (36 интервалов). При увеличении числа ячеек по углу отличие температур быстро исчезает.

**Задача 3. Остыивание сферического слоя.** Для численного моделирования остыивания оптически плотного вещества рассмотрен сферический слой толщиной 1 см ( $1 \text{ см} \leq R \leq 2 \text{ см}$ ) с начальной

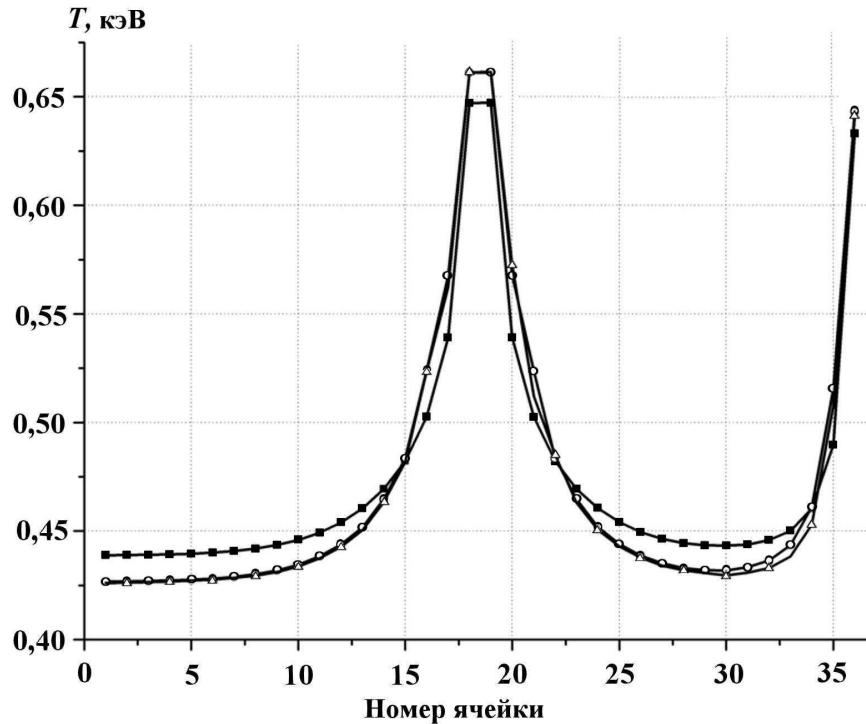


Рис. 9. Задача 2. Профили температуры вещества по угловому каналу: —■— кинетическое решение, TVD-схема; —○— квазиперенос, TVD-схема; —△— квазиперенос, St-схема

температурой 1 кэВ. На внутреннем радиусе задан односторонний входящий поток, определяемый по единичной температуре, на внешнем радиусе — условие свободной поверхности. На остальных границах заданы условия отражения.

Для численного моделирования по радиусу взята равномерная сетка из 200 ячеек, на которой достигнута сходимость по температуре и интегральному потоку. По углу взята равномерная сетка из 15 ячеек. Многогрупповой коэффициент поглощения берется из задачи Флека:  $\alpha_{cg} = \frac{10\,000}{\varepsilon_g^3} \times (1 - e^{-\varepsilon_g/T})$ . По энергии фотонов бралось 28 групп с границами по  $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0$ . Задача считалась с постоянным шагом  $10^{-5}$  до выхода на стационарный режим при  $ct = 300$  см с константой сходимости итераций  $10^{-6}$ .

Таблица 3

### Интегральные выходящие потоки

Модель	Поток
Точное решение	59,05
Д, схема РОМБ	59,75 (1,2 %)
K, St-схема	73,83 (25 %)
K, TVD-схема	61,42 (4 %)
КП, St-схема	59,38 (0,6 %)
КП, TVD-схема	59,51 (0,8 %)

Распределения температур, полученные в кинетическом, квазипереносном и диффузионном приближениях, в данной задаче практически совпадают. Интегральные выходящие потоки отличаются сильнее. При выходе на стационарный режим у свободной поверхности градиент температуры может быть сколь угодно большим. Это приводит к сильной зависимости выходящего потока от разностной сетки.

В табл. 3 приведены выходящие потоки (в безразмерных единицах) через внешнюю поверхность сферы, полученные в кинетическом, квазипереносном и диффузионном

приближениях при  $ct = 300$  см; в скобках указано отличие от точного решения на сходимость в кинетическом приближении. Видно, что использование St-схемы в кинетическом приближении дает наихудший результат. Однако использование St-схемы в приближении квазипереноса, наоборот, предпочтительнее, так как дешевле по времени счета и дает наилучший результат. Соотношения времен счета в данной задаче аналогичны первой задаче: наиболее "дешевыми" являются расчеты по диффузионному приближению, далее идут расчеты в квазипереносном приближении по St-схеме и по TVD-схеме. Наиболее дорогостоящими являются расчеты по кинетическому приближению.

## Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы:

1. Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении квазипереноса дает согласованные с кинетическим приближением результаты.
2. Решение, полученное в приближении квазипереноса, намного дешевле решения в кинетическом приближении.
3. Использование St-схемы на кинетическом этапе решения в приближении квазипереноса дает наилучший результат во всех рассмотренных задачах.
4. Квазипереносное приближение по построению и времени счета близко к квазидиффузионному, но в отличие от последнего приводит к параболической системе, которая позволяет использовать монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации. Решение уравнений переноса в квазипереносном приближении проще решения уравнений переноса в квазидиффузионном приближении.

## Список литературы

1. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
2. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
3. Gelbard E. M. Application of Spherical Harmonics Methods to Reactor Problems. Bettis Atomic Power Laboratory Report WAPD-BT-20, 1960.
4. Зельдович Я. Б., Райзнер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
5. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат и мат. физ. 1963. Т. 4. С. 1078–1087.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
7. Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3–9.
8. Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243–258.
9. Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А. Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 3. С. 3–15.
10. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газодинамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288–1303.
11. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.

12. Гаджисеев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат и мат. физ. Т. 22, № 2. 1982. С. 339–347.
13. Шестаков А. А. Исследование сходимости поправочного метода выделения диагонального элемента для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск, 2014. С. 336.
14. Fleck J. F., Cummings Jr. and J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.
15. Завьялов В. В., Шестаков А. А. Упрощенные решения задач Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 1. С. 45–52.

Статья поступила в редакцию 24.06.16.

SOLVING THE 2D THERMAL RADIATION TRANSPORT EQUATION IN THE MULTIGROUP QUASI-TRANSPORT APPROXIMATION / D. A. Koshutin, A. A. Shestakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Sнежинск, Chelyabinsk region)

The paper describes the model for the heat transport simulation in the multigroup quasi-transport approximation for a 2D geometry, which has been developed by introducing multiplying factors for path in the diffusion approximation. The model problem solution results are compared.

*Keywords:* radiation transport, quasi-transport approximation.

---