

УДК 517.958:536.2

ОБ ОДНОЙ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧЕ СЖАТИЯ СЛОИСТОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

А. А. Шестаков

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ", г. Снежинск Челябинской области)

Предложена тестовая задача, моделирующая сжатие слоистой системы, состоящей из двух веществ. Приводятся результаты расчетов в пяти приближениях: кинетическом, диффузионном, квазидиффузионном, P_1 -приближении в однокрупных и многокрупных постановках, а также в приближении лучистой теплопроводности.

Ключевые слова: перенос излучения, сжатие слоистой системы.

Введение

Всякий раз при разработке новой численной методики или программы возникает проблема тестирования. Тестирование *двумерных* и *трехмерных* программ обычно начинают со счета одномерных задач в многомерной геометрии, на которых проверяют свойство сохранения симметрии решения на различных сетках, точность разностной схемы, т. е. зависимость решения от шагов по времени и пространству, точность передачи граничных условий при счете по областям и т. д. При тестировании программ в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. Хотя определенный прогресс в построении аналитических решений достигнут, они сильно ограничивают классы рассматриваемых задач. При отсутствии аналитических тестов и экспериментальных данных используют расчеты по другим программам или расчеты на сходимость по разностной сетке.

Основной целью данной работы является создание теста для газовой динамики с учетом излучения, т. е. для радиационной газовой динамики (РГД). Так как для решения уравнения переноса используются различные приближения, хотелось бы иметь единый тест для всех приближений, дающий близкие значения тепловых и газодинамических величин и при больших временах асимптотически выходящий на единое решение. При этом желательно, чтобы газодинамические величины изменялись в достаточно широком диапазоне, а пробеги излучения — в диапазоне от 0 до 10 см.

В работе [1] для тестирования программ решения многомерных задач РГД была предложена задача о разлете слоистой системы с учетом спектрального переноса излучения в различных приближениях. Эта задача объединяет шесть задач Флека [2], поэтому условно названа *седьмой задачей Флека*. Задачи Флека в работе [2] рассматривались только в простейшей плоской геометрии и без учета движения. При численном моделировании седьмой задачи Флека в многомерной постановке плоский слой заменен на сферический, дополнительно учитывается рассеяние излучения и движение вещества.

Отметим основные особенности задачи [1]:

- она подходит для описания переноса излучения в разных приближениях в одномерной, двумерной и трехмерной геометриях;
- семиобластная постановка описывает все варианты спектральных задач Флека;
- все области существенно различаются по плотности вещества, причем более плотные вещества разделены менее плотными;
- все области различаются по оптической толщине вещества, причем оптически толстые вещества разделены оптически тонкими;

- во всех областях учитывается поглощение и рассеяние фотонов;
- задача рассчитывается с учетом газодинамического движения вещества.

Хотя для методик, по которым решаются задачи спектрального переноса излучения, тест является довольно сложным из-за большого числа итераций при совместном решении уравнения переноса и уравнения энергии, учет газовой динамики не вызывает особых проблем из-за ее слабого влияния на процессы задачи. Система при прогреве излучением медленно расширяется во все стороны.

Обратная картина возникает при кумулятивном сжатии. Возникающие в таких задачах численные погрешности могут быстро развиваться и приводить к значительным деформациям разностной сетки. В подобных случаях приходится использовать программы, позволяющие поддерживать разностную сетку в приемлемом для счета состоянии. При численном моделировании задач газовой динамики с учетом переноса излучения в кинетическом приближении из-за лучевого эффекта могут возникать неоднородные течения даже в одномерной сферической постановке.

В данной работе предложена тестовая задача, моделирующая сжатие простейшей слоистой системы, состоящей из двух веществ. При этом тестовая задача не теряет основных особенностей теста из [1] и удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) единая постановка граничных и начальных условий для учета спектрального переноса излучения в различных приближениях в одномерной, двумерной и трехмерной геометриях;
- 2) простые аналитические формулы для спектральных пробегов, позволяющие проводить расчеты в одnogрупповой и многогрупповой постановках;
- 3) широкий диапазон изменения спектрального коэффициента поглощения;
- 4) простейшие уравнения состояния.

Геометрия задачи выбирается сферической, что позволяет контролировать симметрию решения при использовании программ перестройки сеток и пересчета величин, а также сравнивать результаты расчетов в многомерных постановках с расчетами, полученными по одномерным методикам.

Особенностью задачи является резкое возрастание плотности при сжатии вещества в центральной области. При этом пики плотности периодические, очень резкие, и для их описания требуется достаточно подробная сетка. Счет задачи в кинетическом приближении по лагранжевым методикам без перестройки сетки невозможен.

Более простые тесты на сжатие однородного вещества обычно дают один большой пик плотности, который очень быстро затухает. Рассмотрение двух разноплотных веществ позволяет исследовать прохождение ударной волны через контактный разрыв и моделировать простейшие лазерные мишени. Рассмотрение более двух веществ приводит к излишнему усложнению теста. Поэтому выбран вариант с двумя веществами.

Найти спектральные пробеги в открытой печати довольно сложно, поэтому они взяты из работы Флека [2]. В одnogрупповых постановках для спектральных пробегов аналитически получены согласованные усредненные пробеги, которые используются также в приближении лучистой теплопроводности.

Простейшие уравнения состояния выбраны для того, чтобы этот тест можно было легко использовать в учебных и методических программах, где нет возможности применять более сложные уравнения состояния.

В работе приводятся результаты расчетов в пяти приближениях: кинетическом, диффузионном, квазидиффузионном, P_1 -приближении в одnogрупповых и многогрупповых постановках, а также в приближении лучистой теплопроводности. В одnogрупповых постановках для спектральных пробегов аналитически получены согласованные усредненные пробеги.

1. Постановка тестовой задачи

Шар радиусом $0 \leq r \leq 0,6$ см состоит из двух физических областей. Внутренняя (первая) область ($0 \leq r \leq 0,5$ см) содержит газ с начальной плотностью $0,02$ г/см³, внешняя (вторая) область ($0,5$ см \leq

$\leq r \leq 0,6$ см) — более плотное вещество с начальной плотностью 1 г/см^3 . Начальная температура $T = 0,00001$ кэВ. На границе сферы задано давление $P = 10^{14}$ бар и входящий поток излучения, соответствующий температуре $T = 1$ кэВ.

Задача рассчитывалась в пяти приближениях переноса лучистой энергии: лучистой теплопроводности, кинетическом, P_1 -, квазидиффузионном и диффузионном приближениях без ограничения теплового потока. В кинетическом и квазидиффузионном приближениях граничное условие моделируется через задание интенсивности излучения $J_g = \frac{1}{2}B_g$ ($T = 1$) для $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$, в P_1 - и диффузионном приближениях — через задание одностороннего потока $\frac{1}{4}U_g - \frac{1}{2}S_g = \frac{1}{4}B_g$ ($T = 1$), в приближении лучистой теплопроводности — через задание температуры $T = 1$ кэВ. Здесь J_g — интенсивность излучения; S_g — поток излучения; U_g — плотность излучения, умноженная на скорость света; B_g — плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света; $\vec{\Omega}$ — направление полета фотонов; \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности рассматриваемой области.

Уравнения состояния вещества: $E = 0,81T$; $P = P_m + P_f$, где E — удельная внутренняя энергия вещества; $P_m = 0,54\rho T$ — давление вещества; $P_f = 0,4567T_f^4$ — давление излучения; T — температура вещества; T_f — температура излучения. В приближении лучистой теплопроводности уравнение для внутренней энергии принимает вид $E = 0,81T + 1,37T^4/\rho$.

Коэффициент рассеяния вычисляется по формуле $\alpha_s = \rho/A$, $A = 5$. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле $\alpha_\varepsilon = \frac{\kappa_i}{\varepsilon^3 T^\omega} (1 - e^{-\varepsilon/T})$ с разными параметрами в областях: $\alpha_\varepsilon = \frac{27}{\varepsilon^3 T^{3/2}} (1 - e^{-\varepsilon/T})$ для области 1; $\alpha_\varepsilon = \frac{1000}{\varepsilon^3} (1 - e^{-\varepsilon/T})$ для области 2.

Коэффициент поглощения в этой задаче обладает рядом особенностей. В первой области поглощение сильнее, пока вещество холодное. После прогрева выше температуры $T = 0,09$ кэВ вещество первой области поглощает меньше, чем вещество второй области.

В расчетах переноса излучения в приближении лучистой теплопроводности пробег вычисляется через росселандово усреднение полного коэффициента ослабления $\alpha = \alpha_\varepsilon + \alpha_s$. Росселандов пробег в приближении лучистой теплопроводности аппроксимируется формулой

$$l_R = \begin{cases} \frac{5}{\rho} \left(1 + \frac{0,779}{\rho^{2/3} T^3} \right)^{-3/2} & \text{в области 1;} \\ \frac{5}{\rho} \left(1 + \frac{8,65}{\rho^{2/3} T^2} \right)^{-3/2} & \text{в области 2.} \end{cases}$$

В первой области росселандов пробег меняется от значений порядка 10^{-22} при начальных температурах до $\sim 6,35$ при температуре $T = 1$ кэВ; во второй области — от значений порядка 10^{-15} при начальных температурах до $\sim 0,17$ при температуре $T = 1$ кэВ.

В одnogрупповых расчетах пробег вычисляется через росселандово усреднение коэффициента ослабления и имеет вид

$$\alpha_c = l_R^{-1} - \alpha_s = \begin{cases} \frac{\rho}{5} \left[\left(1 + \frac{0,779}{\rho^{2/3} T^3} \right)^{3/2} - 1 \right] > 0 & \text{в области 1;} \\ \frac{\rho}{5} \left[\left(1 + \frac{8,65}{\rho^{2/3} T^2} \right)^{3/2} - 1 \right] > 0 & \text{в области 2,} \end{cases}$$

а коэффициент рассеяния в обеих областях вычисляется по формуле $\alpha_s = \rho/5$.

Границы интервалов сетки по энергетической переменной: 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5,5; 7; 9; 11; 15 (число групп 15). В кинетической модели сетка в пространстве $\vec{\Omega}$ строится по квадратуре ES_{16} . Итерационный процесс на каждом временном шаге проводится до вычисления температуры вещества с точностью до $\varepsilon_{\text{сх}} = 0,00001$.

В связи с тем, что граничные условия постоянны, задача при $t \rightarrow \infty$ имеет точное решение, не зависящее от вида коэффициентов рассеяния и поглощения, одинаковое для всех приближений

переноса излучения. При $t \rightarrow \infty$ система стремится к стационарному состоянию $u = 0$; $P = 1$; $T = T_f = 1$; $\rho_1 = \rho_2$.

Из уравнения состояния вещества $P = 0,54\rho T + \frac{1,37T^4}{3}$ в стационарном состоянии при $P = T = 1$ получаем плотность $\rho_{st} = \left(1 - \frac{1,37}{3}\right) / 0,54 \approx 1,00617$.

Из закона сохранения массы $\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3) \rho_2 = \frac{4}{3}\pi R_{2st}^3 \rho_{st}$ получаем новый внешний радиус второй области $R_{2st} = \sqrt[3]{\frac{R_1^3 \rho_1 + (R_2^3 - R_1^3) \rho_2}{\rho_{st}}} = \sqrt[3]{\frac{15,147}{163}} \approx 0,452946$. При этом радиус первой области $R_{1st} = R_1 \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_{st}}} \approx 0,135443$ также получается из закона сохранения массы $\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 = \frac{4}{3}\pi R_{1st}^3 \rho_{st}$.

Таким образом, окончательно точное решение в стационарном состоянии имеет вид

$$u = 0; \quad P = 1; \quad T = T_f = 1; \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_{st} = \frac{163}{162} \approx 1,00617;$$

$$R_{1st} = R_1 \sqrt[3]{\frac{162}{163}} \rho_1 \approx 0,135443; \quad R_{2st} = \sqrt[3]{\frac{162}{163} [R_1^3 \rho_1 + (R_2^3 - R_1^3) \rho_2]} \approx 0,452946.$$

До выхода на стационарное состояние все величины являются осциллирующими функциями. Хотя амплитуды осцилляций могут зависеть от типа приближения, стационарное решение должно выполняться для всех приближений уравнения переноса.

2. Результаты расчетов тестовой задачи

Рассматриваемая в задаче система является пульсирующей. На рис. 1, 2 приведены зависимости от времени внешних радиусов областей 1 и 2. Видно, что радиусы представляют собой осциллирующие величины, колебания которых затухают и со временем выходят на стационарный режим. Внешний радиус первой области R_1 при максимальном сжатии быстро уменьшается в 10 раз и изменяется во времени очень резко. Внешний радиус второй области R_2 уменьшается примерно в 2 раза и изменяется во времени более плавно.

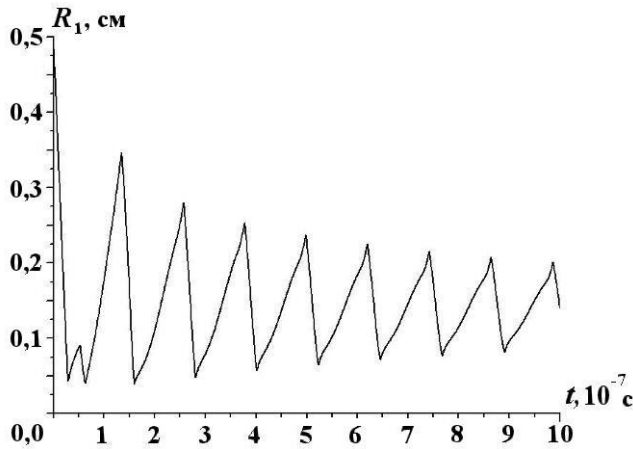


Рис. 1. Зависимость от времени внешнего радиуса области 1 в приближении лучистой теплопроводности

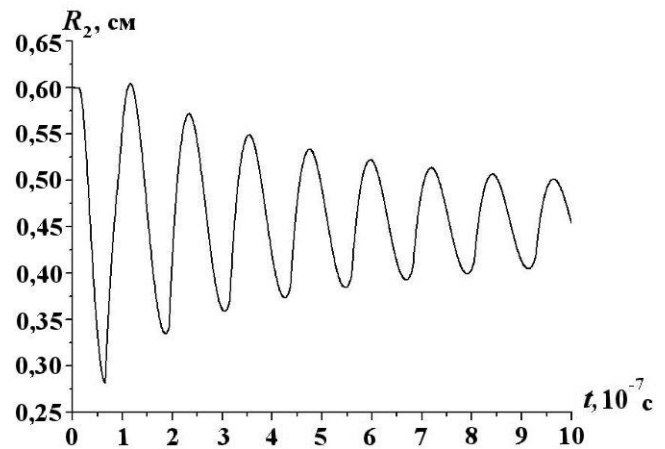


Рис. 2. Зависимость от времени внешнего радиуса области 2 в приближении лучистой теплопроводности

Система прогревается очень быстро, поэтому при $t > 10^{-9}$ с температура становится близкой к единице практически во всех точках системы. Оптическая плотность составляет:

$$\text{— для первой области} \quad \xi_1 = \frac{\Delta R}{l_R} = \frac{\rho \Delta R}{5} \left[1 + \frac{1}{33,802} \left(\frac{135}{\rho T^{9/2}} \right)^{2/3} \right]^{3/2};$$

$$\text{— для второй области} \quad \xi_2 = \frac{\rho \Delta R}{5} \left[1 + \frac{1}{33,802} \left(\frac{5000}{\rho T^3} \right)^{2/3} \right]^{3/2},$$

где ΔR — разность внешнего и внутреннего радиусов области.

В первой области при $T = 1$ кэВ и начальных параметрах $\Delta R = 0,5$ см, $\rho \approx 0,02$ г/см³ получаем $\xi_1 \approx 0,08$; при параметрах максимального сжатия $\Delta R \approx 0,05$ см, $\rho \approx 40$ г/см³ получаем $\xi_1 \approx 0,44 < 1$.

Во второй области при $T = 1$ кэВ и начальных параметрах $\Delta R = 0,1$ см, $\rho \approx 1$ г/см³ получаем $\xi_2 \approx 0,6 < 1$; при максимальном сжатии $\Delta R \approx 0,22$ см, $\rho \approx 10$ г/см³ получаем $\xi_2 \approx 0,44 < 1$.

Таким образом, при $t > 10^{-9}$ с система становится оптически прозрачной.

Для выбора разностной сетки были проведены расчеты на сгущающихся сетках по радиусу (число интервалов в области 1 равно 50, 100, 200, 400; число интервалов в области 2 равно 12, 25, 50, 100). Наиболее сильную зависимость от времени имеет плотность вещества в первой области. На рис. 3 (см. также цветную вкладку) приведены зависимости средней плотности от времени в этой области, полученные в расчетах на сгущающихся сетках в приближении лучистой теплопроводности. Разные цвета в обозначениях соответствуют разным схемам, по которым выполнялись расчеты.

Эти расчеты показали, что для корректного описания решения достаточно разбиения системы примерно на 400 интервалов в первой области и на 100 интервалов во второй со сгущением сетки к границе веществ. Максимальная средняя плотность в области 1 достигает значения 40 г/см³ на третьем пике, что в 2000 раз больше первоначального значения. Затем амплитуда пиков уменьшается. До времени $t = 10^{-7}$ с в области 1 получаются 2 осцилляции по средней плотности, до времени $t = 10^{-6}$ с — 9 осцилляций, до времени $t = 10^{-5}$ с — 82 осцилляции и т. д.

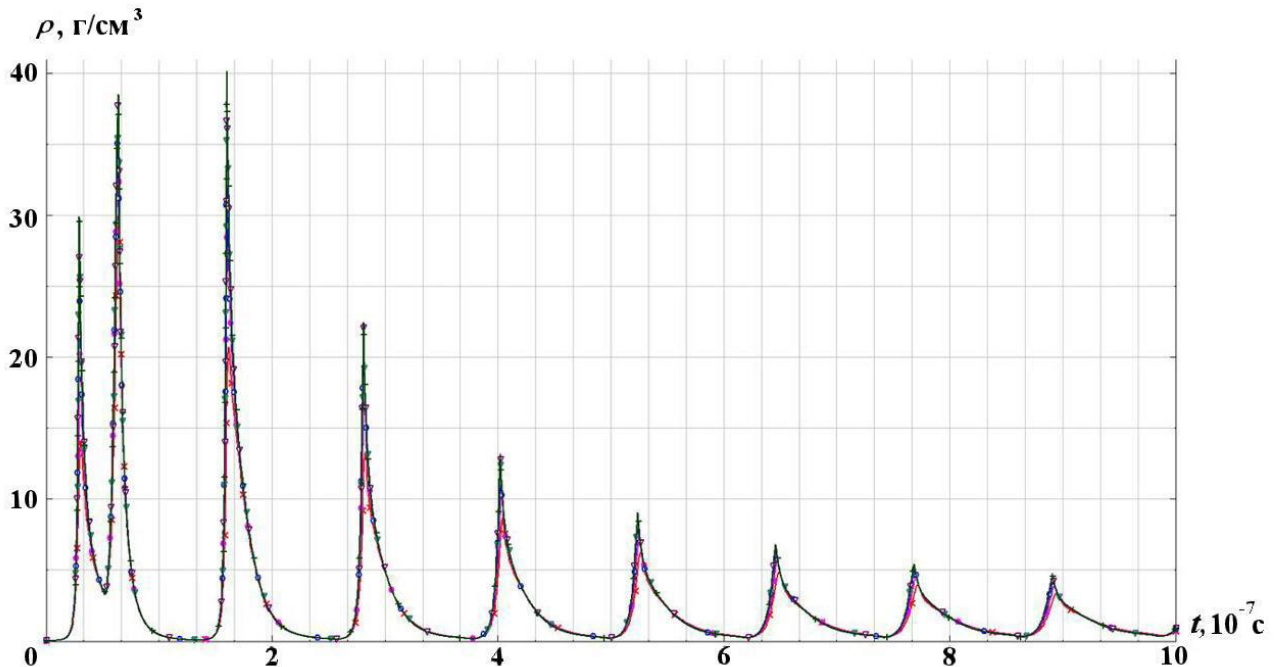


Рис. 3. Зависимости средней плотности от времени в области 1 в приближении лучистой теплопроводности на сгущающихся сетках: —×— — 50 интервалов; —▽— — 100 интервалов; —+— — 200 интервалов; —○— — 400 интервалов

Расчеты задачи в многогрупповом кинетическом и диффузионном приближениях требуют больших вычислительных ресурсов, поэтому их проведение ограничилось временем $t = 10^{-7}$ с. К этому моменту в первой области возникают два пика по плотности, и по точности их численного решения можно судить об эффективности программ. В одногрупповых кинетическом, P_1 - и диффузионном приближениях используется росселандово усреднение коэффициента поглощения.

На рис. 4, 5 приведены зависимости средней плотности от времени в области 1, полученные в одногрупповых кинетическом, P_1 - и диффузионном приближениях по двумерным методикам [3, 4]

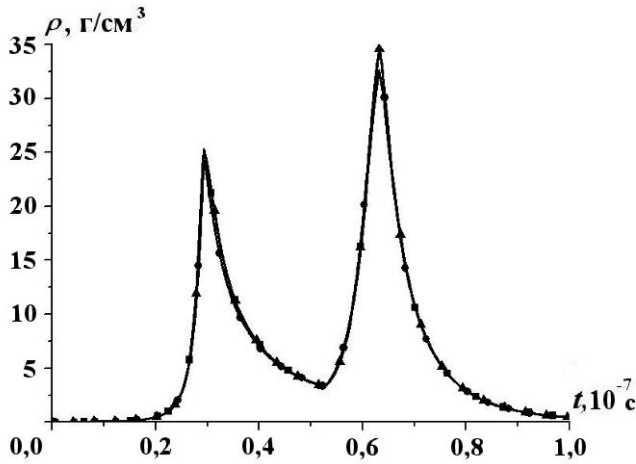


Рис. 4. Зависимости средней плотности от времени в области 1: \blacktriangle — в одномерном кинетическом приближении; \blacksquare — в двумерном кинетическом приближении; \bullet — в квазидиффузионном приближении

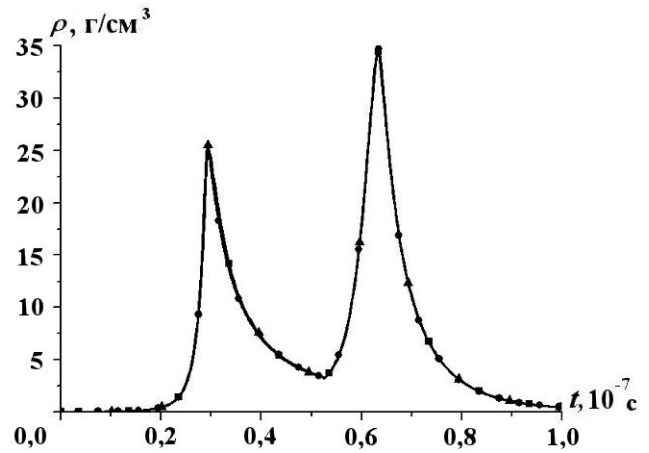


Рис. 5. Зависимости средней плотности от времени в области 1: \blacktriangle — в диффузионном приближении; \blacksquare — в P_1 -приближении по двумерной методике [3]; \bullet — в P_1 -приближении по одномерной методике [5]

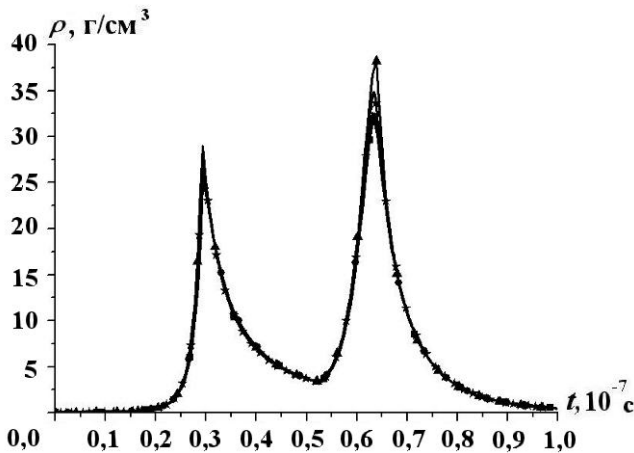


Рис. 6. Зависимости средней плотности от времени в области 1: \bullet — в одногрупповом кинетическом приближении; \blacksquare — в многогрупповом кинетическом приближении; \star — в многогрупповом P_1 -приближении; \blacktriangle — в приближении лучистой теплопроводности

и в одногрупповых кинетическом, P_1 - и квазидиффузионном приближениях по одномерной методике [5]. Расчеты проводились с разбиением системы на 100 интервалов по радиусу в области 1 и на 400 интервалов по радиусу в области 2 со сгущением сетки к границам областей.

На рис. 6 приведены зависимости средней плотности от времени в области 1, полученные при расчетах в одногрупповом и многогрупповом кинетическом приближениях, в сравнении с расчетами в приближении лучистой теплопроводности и в многогрупповом P_1 -приближении.

Из рисунка видно, что средняя плотность в области 1 достигает максимальных значений в приближении лучистой теплопроводности. Результаты, полученные в многогрупповом P_1 -приближении, ближе к результатам в многогрупповом кинетическом приближении, чем в приближении лучистой теплопроводности. Росселандово усреднение в одногрупповом кинетическом приближении дает близкие результаты с многогрупповым кинетическим приближением.

Заключение

В работе рассмотрена новая тестовая задача, моделирующая сильное сжатие слоистой системы, состоящей из двух веществ. Достоинством данного теста является то, что расчеты, проведенные в приближении лучистой теплопроводности, а также в одnogрупповом и многогрупповом кинетическом, P_1 - и диффузионном приближениях, дают близкие результаты. Это позволяет на одной задаче тестировать сразу несколько приближений уравнения переноса лучистой энергии и сравнивать их между собой.

Недостатком кинетического приближения является нарушение сферической симметрии из-за лучевого эффекта. Достоинством P_1 - и диффузионного приближений является то, что они сохраняют сферическую симметрию и позволяют контролировать результаты расчетов в кинетическом приближении, требующих перестроек даже в сферически-симметричных задачах. Показано, что расчеты в одnogрупповых P_1 - и диффузионном приближениях дают более близкие результаты с многогрупповыми приближениями, чем приближение лучистой теплопроводности.

Список литературы

1. Шестаков А. А. Седьмая задача Флека // Тез. докл. XI Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск, 2012. С. 333.
2. Fleck J. A., Cummings J. D. An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.
3. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
4. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А. DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 4. С. 33–46.
5. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 910–921.

Статья поступила в редакцию 21.02.17.

ON ONE BENCHMARK PROBLEM OF LAYERED STRUCTURE COMPRESSION WITH THE ACCOUNT FOR RADIATION TRANSFER IN DIFFERENT APPROXIMATIONS / A. A. Shestakov (FSUE "RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Cheliabinsk region).

A benchmark problem was offered that simulates compression of a layered system of two materials. The calculation results are given in five approximations: kinetic, diffusion, quasi-diffusion, P_1 -approximation in one-group and multi-group setups, as well as in the approximation of radiating thermal conductivity.

Keywords: radiation transfer, compression of a layered system.
