УДК 519.6

МЕТОД РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ НА НЕПОДВИЖНОЙ СЧЕТНОЙ СЕТКЕ

А. А. Краюхин, Ю. В. Янилкин, А. Л. Стадник, М. Ю. Егужова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Предложен метод BODY-3D расчета движения абсолютно твердого тела в упругопластической среде с учетом силы трения на неподвижной эйлеровой счетной сетке, описана его реализация в методике ЭГАК, приведены результаты тестовых расчетов. Для тестирования использовались две задачи. Для первой задачи — о свободном падении вращающегося твердого тела на преграду — получено аналитическое решение. В качестве второй тестовой задачи рассматривалась задача о движении малодеформируемого ударника в мягком грунте при наклонном внедрении.

Ключевые слова: проникание, твердое тело, упругопластическая среда, сила трения, неинерциальная система отсчета, эйлерова счетная сетка, методика ЭГАК.

Введение

Вопросам, связанным с изучением особенностей движения малодеформируемых тел в упругопластических средах, посвящено значительное количество работ (их обзор сделан в [1]). В настоящее время в этой области активно ведутся экспериментальные и теоретические исследования, а также применяются методы численного моделирования. При численном моделировании в эйлеровых переменных движения малодеформируемых тел (ударников) в упругопластических средах (преградах) возникает ряд проблем, связанных с точностью описания контактных границ между различными веществами [2, 3]. Во-первых, в расчетах внедрения ударников, описываемых в представлении сплошной деформируемой среды, в прочные преграды (например, металлические или бетонные) наблюдается счетный эффект "прилипания" материалов ударника и преграды при их контакте. Это вызывает ускорение торможения ударника, что в итоге приводит к снижению его запреградной скорости при пробивании преграды или уменьшению глубины проникания при внедрении в полубесконечную преграду. Во-вторых, в расчетах движения ударников в преградах, в том числе малопрочных, например в мягком грунте, существует проблема сохранения первоначальной формы ударника с течением времени даже при отсутствии его пластической деформации. Изменение формы (внешних обводов) ударника, связанное с недостаточной точностью моделирования движения контактных границ на неподвижной сетке, приводит к изменению картины его обтекания веществом преграды, что может оказать существенное влияние на его траекторию движения, форму каверны и т. д.

Одним из способов решения указанных проблем при численном моделировании данных задач на неподвижной счетной сетке является использование приближения абсолютно твердого (недеформируемого) тела для описания ударника. Далее будем использовать этот термин в сокращенном виде — *твердое тело*. Численная реализация такого подхода при решении задач в двумерной осесимметричной постановке не вызывает сложностей. При этом проще всего использовать обратную постановку, когда преграда налетает на неподвижный ударник. В этом случае задача сводится к вычислению продольной силы сопротивления, действующей со стороны преграды на твердое тело, на внешней границе которого задается граничное условие *жесткая стенка*, после чего осуществляется

корректировка скорости набегающего потока вещества преграды. Однако при рассмотрении трехмерного случая такой подход не применим, так как необходимо учитывать не только поступательное движение твердого тела, но и его вращение при несимметричном обтекании.

В настоящей работе предлагается метод BODY-3D расчета на неподвижной счетной сетке совместного, поступательного и вращательного, движения твердого тела при обтекании упругопластической средой с учетом силы трения. Описана его реализация в методике ЭГАК [4], а также приведены результаты тестовых расчетов.

Общие положения и численная реализация метода BODY-3D

Рассмотрим твердое тело (ударник), которое характеризуется массой m, радиусом-вектором центра масс $\vec{r}_C$ и тензором инерции в главных осях относительно центра масс J. В момент времени $t = 0$ твердое тело ударяется со скоростью $\vec{V}_0$ о преграду из упругопластического материала. Требуется рассчитать движение твердого тела в преграде. Уравнения движения твердого тела записываются в виде [5]

$$m\vec{a} = \vec{F}; \qquad J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}.$$

Здесь $\vec{F}$ и $\vec{M}$ — сила сопротивления внедрению и момент силы относительно центра масс твердого тела, действующие на твердое тело со стороны преграды; $\vec{a}$ — ускорение центра масс твердого тела; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела относительно центра масс. Силу сопротивления внедрению можно найти по формуле [6]

$$\vec{F} = \int\limits_S (\sigma_n\vec{n} + \sigma_\tau\vec{\tau})\, dS,$$

где σ_n и σ_τ — нормальное и касательное напряжения, действующие на площадке dS поверхности твердого тела; S — площадь поверхности твердого тела; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности твердого тела; $\vec{\tau}$ — единичный вектор тангенциальной компоненты массовой скорости среды на поверхности твердого тела. Последняя из указанных величин равна векторному произведению [6]

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{n}, \qquad \vec{m} = \frac{1}{\left|\vec{V}\right|}\left(\vec{n} \times \vec{V}\right). \tag{1}$$

Здесь $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ — вектор массовой скорости среды относительно неподвижного твердого тела на площадке dS. Касательное напряжение определяется из закона сухого трения Кулона с учетом ограничения прочностными характеристиками вещества преграды:

$$\sigma_\tau = \begin{cases} 0, & \sigma_n < 0; \\ \min\{\mu\sigma_n, Y\}, & \sigma_n \geq 0, \end{cases}$$

где $\mu = \text{const}$ — коэффициент трения; Y — предел текучести вещества окружающей среды. Полагается, что при сжатии среды $\sigma_n > 0$. Ограничение касательного напряжения σ_τ связано с невозможностью существования в веществе напряжений, превышающих его прочностные характеристики. Момент силы по определению равен

$$\vec{M} = \int\limits_S \vec{r} \times (\sigma_n\vec{n} + \sigma_\tau\vec{\tau})dS, \tag{2}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор элемента поверхности твердого тела dS, на который действует сила $d\vec{F} = (\sigma_n\vec{n} + \sigma_\tau\vec{\tau})\, dS$ относительно центра масс.

На практике часто встречается ситуация, когда требуется рассчитать внедрение ударника в преграду при подходе под углом θ к ее поверхности с углом атаки α. Угол скольжения при этом задается нулевым: $\beta = 0$. Предположим, что твердое тело является телом вращения или по крайней мере имеет плоскость симметрии, перпендикулярную поверхности преграды. Рассмотрим движение такого тела в системе координат (x, y, z), связанной с неподвижной преградой.

Пусть в начальный момент времени вектор скорости $\vec{V}_0$ лежит в плоскости xOy декартовой системы координат, которая является плоскостью симметрии ударника и преграды. В этом случае сила сопротивления внедрению имеет вид $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$, момент силы $\vec{M} = (0, 0, M_z)$, а угловая скорость вращения $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Тогда количество уравнений, описывающих движение твердого тела, сокращается с шести до трех:

$$ma_x = F_x; \qquad ma_y = F_y; \qquad J_C \frac{d\omega}{dt} = M_z. \tag{3}$$

Здесь J_C — момент инерции вокруг оси z относительно центра масс; угловую скорость вращения твердого тела вокруг оси z относительно центра масс ω можно рассчитать по формуле

$$\omega = \frac{1}{J_C} \int M_z dt. \tag{4}$$

Рассмотрим движение среды в системе отсчета (x', y', z'), в которой твердое тело покоится. Пусть ее начало координат находится в центре масс твердого тела. Из-за того что твердое тело при проникании может иметь вращательную составляющую движения наряду с поступательной, система отсчета (x', y', z') по отношению к системе отсчета (x, y, z) является неинерциальной. Следуя [5], будем называть движение среды относительно неподвижной инерциальной системы отсчета (x, y, z) абсолютным, движение среды во вращающейся неинерциальной системе отсчета (x', y', z') — относительным, а движение подвижной системы отсчета (x', y', z') относительно неподвижной (x, y, z) — переносным. Пусть система отсчета (x', y', z') вращается с угловой скоростью ω относительно неподвижной системы отсчета (x, y, z). Выражение для связи скоростей в системах отсчета (x, y, z) и (x', y', z') имеет вид [5]

$$\vec{V}^{\text{абс}} = \vec{V}^{\text{отн}} + \vec{V}^{\text{пер}}. \tag{5}$$

Изменение относительной скорости записывается в виде

$$d\vec{V}^{\text{отн}} = \left(\vec{a}^{\,\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{V}^{\text{отн}}\right) dt. \tag{6}$$

Переносная скорость равна

$$\vec{V}^{\text{пер}} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{7}$$

Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор элемента среды относительно начала координат системы отсчета (x', y', z'). Приращение координат элемента среды в системе отсчета (x, y, z) определяется выражением

$$d\vec{r} = \vec{V}^{\text{абс}} dt. \tag{8}$$

Методом BODY-3D будем называть способ расчета трехмерного движения твердого тела в упругопластической среде на неподвижной счетной сетке, который заключается в численном моделировании течения среды, окружающей твердое тело, в неинерциальной системе отсчета (x', y', z'), связанной с неподвижным твердым телом.

При численной реализации метода BODY-3D в методике ЭГАК использовался следующий подход. Для описания вещества твердого тела вводится специальный компонент (так называемый *несжим*) [7]. Грани ячеек с этим компонентом являются жесткими стенками, на которых равны нулю нормальные компоненты скорости и разрешается свободное тангенциальное скольжение вещества. Этот компонент занимает ячейку полностью. Содержание других компонентов в такой ячейке не допускается, т. е. такая ячейка не может быть смешанной. В процессе счета потоки вещества из такой ячейки или в такую ячейку отсутствуют, и, таким образом, твердое тело неподвижно

относительно счетной сетки. В методике ЭГАК счетная сетка, как правило, образована прямыми, параллельными осям декартовой системы координат. Поскольку вещество *несжим* должно занимать ячейку полностью, его границы проходят по линиям сетки. Точность такого описания реальных границ твердого тела, не совпадающих с линиями счетной сетки, составляет до половины линейного размера ячейки. Это связано с тем, что после расчета начальных данных смешанные ячейки, содержащие вещество *несжим*, или освобождаются от него, или, наоборот, заполняются им полностью в зависимости от его объемной концентрации. На рис. 1 (см. также цветную вкладку) изображены поля веществ в области твердого тела до и после корректировки начальных данных. Сплошной линией нанесен реальный контур твердого тела.

При реализации метода BODY-3D в описанный выше алгоритм был добавлен расчет дополнительных величин, связанных с движением твердого тела. Как уже отмечалось, в методике ЭГАК грани счетных ячеек перпендикулярны осям декартовой системы координат. Поэтому на каждой грани имеется только одна ненулевая компонента вектора нормали $\vec{n}$, равная 1 или -1. В первом случае вектор нормали имеет направление координатной оси, во втором случае он направлен в противоположенную сторону. С использованием формулы (1) вычислим единичный вектор тангенциальной компоненты массовой скорости среды на поверхности твердого тела:

$$\vec{\tau} = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|\vec{V}\right|}\left(\vec{j}n_x^2 V_y + \vec{k}n_x^2 V_z\right) & \text{при} \quad \vec{n} = (n_x, 0, 0)\,; \\ \dfrac{1}{\left|\vec{V}\right|}\left(\vec{i}n_y^2 V_x + \vec{k}n_y^2 V_z\right) & \text{при} \quad \vec{n} = (0, n_y, 0)\,; \\ \dfrac{1}{\left|\vec{V}\right|}\left(\vec{i}n_z^2 V_x + \vec{j}n_z^2 V_y\right) & \text{при} \quad \vec{n} = (0, 0, n_z)\,. \end{cases}$$

Нормальное напряжение, действующее на грань счетной ячейки с ненулевой компонентой вектора нормали n_m (m означает x, y или z), запишем в виде

$$\sigma_{mm} = \max\left\{0, P - S_{mm}\right\},$$

где P — давление; S_{mm} — компонента девиатора тензора напряжений. Компоненты силы сопротивления внедрению, действующей на твердой тело со стороны преграды, вычисляются с помощью формул

$$F_x = \sum_i f_x^i = \sum_i s_i \left[-\sigma_{xx}^i n_{xi} + \frac{V_x^i}{\left|\vec{V}_i\right|}\left(\min\left\{\mu\sigma_{yy}^i, Y_i\right\} n_{yi}^2 + \min\left\{\mu\sigma_{zz}^i, Y_i\right\} n_{zi}^2\right)\right]; \tag{9}$$

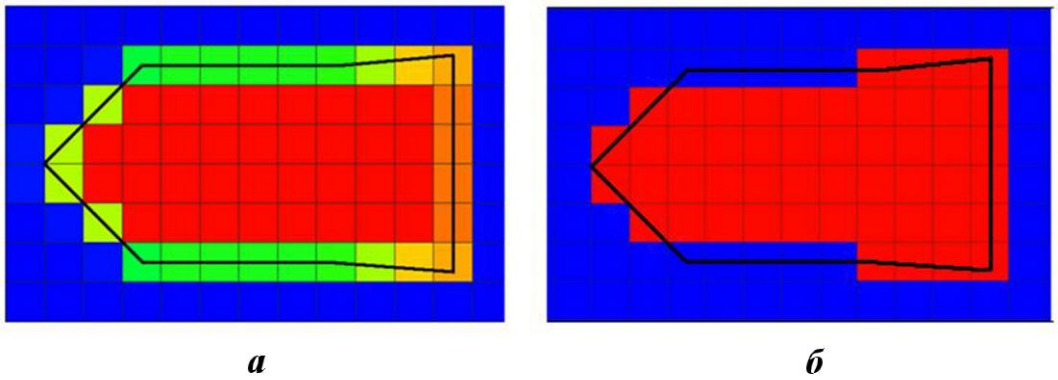


Рис. 1. Поле веществ на момент начала расчета в области твердого тела: *а* — до корректировки начальных данных; *б* — после корректировки начальных данных

$$F_y = \sum_i f_y^i = \sum_i s_i \left[-\sigma_{yy}^i n_{yi} + \frac{V_y^i}{\left|\vec{V}_i\right|} \left(\min\left\{\mu\sigma_{xx}^i, Y_i\right\} n_{xi}^2 + \min\left\{\mu\sigma_{zz}^i, Y_i\right\} n_{zi}^2 \right) \right]. \tag{10}$$

Суммирование здесь выполняется по всем граням счетных ячеек, находящихся на поверхности твердого тела; s_i — площадь i-й грани; n_{xi}, n_{yi} и n_{zi} — компоненты вектора нормали к i-й грани; Y_i — предел текучести вещества преграды. Момент силы относительно центра масс твердого тела вокруг оси z, действующий на него со стороны преграды, определяется с использованием формулы (2) и записывается в виде

$$M_z = \sum_i \left[f_y^i \left(x_i - x_C\right) - f_x^i \left(y_i - y_C\right) \right], \tag{11}$$

где x_i, y_i — координаты центров граней счетных ячеек; x_C, y_C — координаты центра масс твердого тела. Как и в (9), (10), суммирование производится по всем граням счетных ячеек, находящихся на поверхности твердого тела.

Процедура вычисления величин F_x, F_y и M_z по формулам (9)—(11) выполняется на каждом временном шаге. Для вычисления на n-м шаге по времени угловой скорости вращения твердого тела относительно его центра масс вокруг оси z выражение (4) записывается в конечных разностях (Δt — временной шаг), откуда получается

$$\omega^n = \omega^{n-1} + \frac{M_z^n}{J_C} \Delta t.$$

Теперь рассмотрим изменение аппроксимации уравнения движения среды при реализации метода BODY-3D по сравнению со стандартным подходом, используемым в методике ЭГАК [4, 7]. Как было отмечено, при использовании метода BODY-3D численное моделирование проводится в неинерциальной системе отсчета (x', y', z'), связанной с неподвижным твердым телом. В этом случае массовая скорость среды в расчете является относительной скоростью в неинерциальной системе отсчета (x', y', z'). Для ее расчета используется уравнение (6).

Первый член в правой части (6) $\vec{a}^{\text{отн}}$ является суммой трех слагаемых:

$$\vec{a}^{\text{отн}} = \vec{a}^{gd} + \vec{a}^{up} + \vec{a}^{F}.$$

Здесь, согласно [4, 7], первые два слагаемых $\vec{a}^{gd}$ и $\vec{a}^{up}$ — это стандартные компоненты ускорения в узлах счетных ячеек за счет действия шаровой части и девиатора тензора напряжений. Третье слагаемое $\vec{a}^{F}$ является компонентом ускорения в узлах счетных ячеек, возникающим из-за наличия силы сопротивления внедрению, действующей на центр масс твердого тела со стороны преграды. При переходе в систему отсчета, в которой твердое тело покоится, величина $\vec{a}^{F}$ с учетом (3) записывается в виде

$$\vec{a}^{F} = -\vec{i}\,\frac{F_x}{m} - \vec{j}\,\frac{F_y}{m}.$$

Второй член в правой части (6) с точностью до множителя 2 совпадает с кориолисовым ускорением [5]. Обозначим его как

$$\vec{a}^{C} = -\vec{\omega} \times \vec{V}^{\text{отн}} = -\vec{i}\,(-\omega)\,V_y^{\text{отн}} + \vec{j}\,(-\omega)\,V_x^{\text{отн}}. \tag{12}$$

Знак "$-$" перед ω здесь добавляется по причине вращения среды, окружающей неподвижное твердое тело, в системе отсчета (x', y', z') в направлении, обратном направлению вращения самого твердого тела в системе отсчета (x, y, z). Массовая скорость вещества на n-м шаге по времени записывается в виде

$$\vec{V}_n^{\text{отн}} = \vec{V}_{n-1}^{\text{отн}} + \left(\vec{a}^{gd} + \vec{a}^{up} + \vec{a}^{F} + \vec{a}^{C} \right) \Delta t. \tag{13}$$

Для расчета новых координат узлов ячеек требуется рассчитать переносную скорость движения на n-м шаге по времени по формуле (7):

$$\vec{V}_n^{\text{пер}} = -\vec{\omega}^{\,n} \times \vec{r}^{\,n-1} = -\vec{i}\,(-\omega^n)\left(y^{n-1} - y_C\right) + \vec{j}\,(-\omega^n)\left(x^{n-1} - x_C\right). \tag{14}$$

Знак "−" перед ω здесь объясняется той же причиной, что и в (12).

Далее с использованием (5) и (8) вычисляются новые координаты узлов счетных ячеек по формулам

$$x^n = x^{n-1} + \left(V_{x,n}^{\text{отн}} + V_{x,n}^{\text{пер}}\right)\Delta t; \qquad y^n = y^{n-1} + \left(V_{y,n}^{\text{отн}} + V_{y,n}^{\text{пер}}\right)\Delta t. \tag{15}$$

Расчет компоненты массовой скорости относительно оси z и координат узлов вдоль этой оси производится стандартным образом [4, 7].

При использовании метода BODY-3D в расчете в качестве параметров дополнительно задаются коэффициент трения между твердым телом и веществом преграды μ, а также характеристики твердого тела: m — масса; J_C — момент инерции вокруг оси z относительно центра масс твердого тела; x_C, y_C — координаты центра масс твердого тела ($z_C = 0$ по умолчанию). Из-за того что плоскость xOy является плоскостью симметрии ударника и преграды, в расчете моделируется половина реальной геометрии (на плоскости xOy ставится граничное условие *жесткая стенка*). В связи с этим величины m и J_C рассчитываются для половины реального твердого тела.

Тестовые расчеты

Задача 1. Свободное падение вращающегося твердого тела на преграду. Рассмотрим компактное твердое тело произвольной формы, расположенное в вакууме на расстоянии L от преграды из упругопластического материала, которая имеет плоскую лицевую поверхность. L является минимальной длиной отрезка, соединяющего точку A на поверхности твердого тела с точкой B на лицевой поверхности преграды и расположенного по нормали к лицевой поверхности преграды. Положим, что ось x параллельна этому отрезку. Пусть преграда расположена в полупространстве $x < 0$, а ударник в полупространстве $x \geq 0$. Твердое тело характеризуется массой m, координатами центра масс (x_C, y_C, z_C) и моментом инерции J_C вокруг оси z относительно этого центра. В момент времени $t = 0$ твердое тело начинает двигаться к преграде по нормали с постоянной поступательной скоростью $V_x = V_0$, также на него начинает действовать постоянный момент силы M_z вокруг оси z относительно центра масс. На рис. 2 схематично изображена геометрия задачи.

В задаче требуется определить:

- значение M_z, при котором твердое тело совершит один полный оборот вокруг оси z к моменту его удара о преграду (касания точкой A точки B);
- траекторию движения точки B в системе координат, в которой твердое тело покоится.

Момент времени удара твердого тела о преграду определяется по формуле

$$T_1 = \frac{L}{V_0}. \tag{16}$$

Так как величины J_C и M_z не зависят от времени, частоту вращения твердого тела относительно центра масс вокруг оси z можно записать в виде

$$\omega = \frac{M_z}{J_C} t.$$

Рассчитаем, каким должен быть момент силы M_z для того, чтобы ударник совершил один оборот вокруг оси к моменту его удара о преграду, с помощью выражения

$$\int_0^{T_1} \omega dt = 2\pi. \tag{17}$$

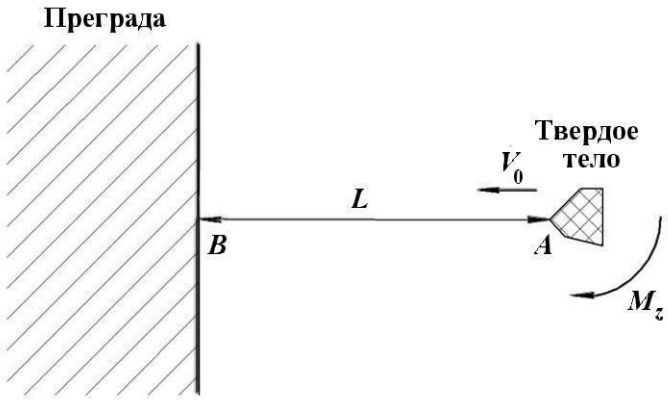


Рис. 2. Геометрия задачи 1

Вычислим интеграл (17) и с учетом формулы (16) запишем выражение для M_z:

$$M_z = \frac{4\pi J_C V_0^2}{L^2}.$$

Зная M_z, можно найти момент времени поворота ударника на промежуточный угол γ ($0 \le \gamma \le 2\pi$):

$$t_\gamma = \sqrt{\frac{2\alpha J_C}{M_z}}. \tag{18}$$

При $J_C = 1$, $V_0 = -0{,}1$, $L = 10$ получаем значение $M_z = 0{,}001256637$. Для углов поворота твердого тела $\gamma = \pi/4$; $\pi/2$; π; $3\pi/2$ значения соответствующих моментов времени составляют $t_\gamma = 35{,}4$; 50; 70,7; 86,6.

Теперь перейдем в систему отсчета, в которой твердое тело покоится, а преграда движется. Траекторию точки B можно рассчитать с помощью решения системы уравнений (4)—(8). Для этого необходимо перейти к конечным разностям аналогично (12)—(16) при условии $\vec{a}^{\text{отн}} = 0$, так как твердое тело движется в вакууме. Начальные условия для точки B при $t = 0$ в системе координат, в которой твердое тело покоится, записываются в виде $V_{x,0}^{\text{отн}} = -V_0$; $V_{y,0}^{\text{отн}} = 0$; $x^0 = -L$; $y^0 = 0$. Точка A расположена в начале координат.

Был проведен ряд расчетов с различными значениями скорости движения твердого тела V_0 и различными положениями центра масс твердого тела. На рис. 3 изображены траектории движения преграды для разных начальных условий, полученные аналитически.

Численное моделирование задачи проводилось с использованием метода BODY-3D. Для сокращения времени счета рассматривалась трехмерная задача в плоской постановке (относительно оси z).

Преграда и твердое тело располагались в вакууме. При численном моделировании использовалась неподвижная кубическая счетная сетка с размером ячейки $h = 0{,}05$ см. Преграда в плоскости $z = \text{const}$ представляла собой квадрат со стороной 2 см. Ось x проходила через центр квадрата параллельно его двум противоположенным сторонам. Точка B на момент времени $t = 0$ имела координаты $(-10, 0)$. Твердое тело в плоскости $z = \text{const}$ представляло собой квадрат со стороной 0,7 см. Ось x проходила через центр квадрата и пересекала два противоположенных угла. Точка A на момент времени $t = 0$ имела координаты $(0, 0)$. К твердому телу прикладывался постоянный момент силы $M_z = 0{,}001256637$ г $\times$ см^2/(10 мкс)^2 относительно оси z. Момент инерции твердого тела брался равным $J_C = 1$ г $\times$ см^2, масса — $m = 1$ г. Коэффициент трения полагался нулевым: $\mu = 0$. При численном моделировании варьировались начальная скорость движения преграды, а также координаты центра масс твердого тела (табл. 1).

Отметим, что в данной задаче размеры и формы преграды и твердого тела могут быть достаточно произвольными. В связи с этим для расчетов 3 и 1 (см. табл. 1) использовалась та же геометрия, что и для расчета 2, хотя центры масс твердого тела в расчетах 3 и 1 находились за пределами или на поверхности тела. Это делалось для сокращения времени подготовки расчетов. В качестве материала преграды задавался мягкий грунт. Для его описания использовалось уравнения состояния в форме Ми—Грюнайзена с параметрами из табл. 2.

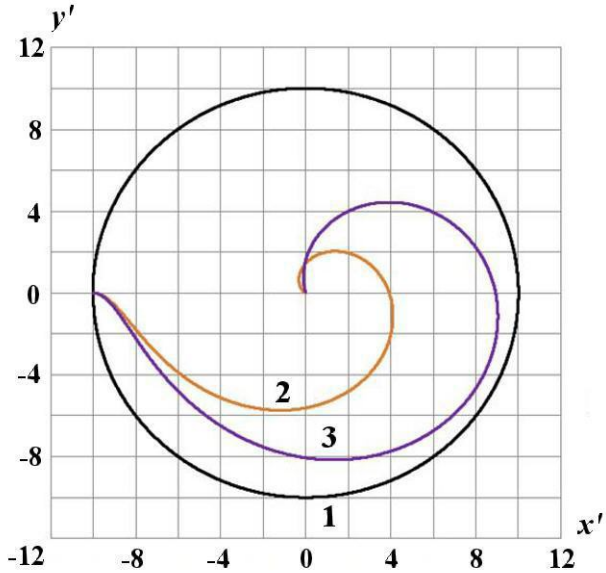


Рис. 3. Задача 1. Траектории движения точки B, полученные аналитически при разных начальных условиях: 1 — $x_C = 0$, $y_C = 0$, $V_0 = 0$; 2 — $x_C = 0{,}5$, $y_C = 0$, $V_0 = -0{,}1$; 3 — $x_C = 3$, $y_C = 0$, $V_0 = -0{,}1$

Отметим, что в данной задаче тип материала преграды и адекватность его описания не играют роли, так как преграда свободно движется в вакууме без возмущений. На рис. 4—6 приведены результаты расчетов (поля плотности), на которые нанесены траектории движения точки B, полученные аналитически (см. рис. 3). Буквами отмечены положения преграды на моменты времени: *а* — $t = 0$ ($\gamma = 0$); *б* — $t = 35{,}4$ ($\gamma = \pi/4$); *в* — $t = 50$ ($\gamma = \pi/2$); *г* — $t = 70{,}7$ ($\gamma = \pi$); *д* — $t = 86{,}6$ ($\gamma = 3\pi/2$); *е* — $t = 100^*$ ($\gamma = 2\pi$). Эти моменты времени определены по формуле (18) для заданных углов поворота γ твердого тела вокруг центра масс относительно его начального положения. На рисунках центр масс твердого тела отмечен точкой. Из представленных данных видно, что для всех случаев получено практическое совпадение результатов численного моделирования с аналитическим решением как по траекто-

Таблица 1

Начальные условия для расчетов задачи 1

Номер расчета	V_0, км/с	x_C, см	y_C, см
1	0	0	0
2	0,1	0,5	0
3	0,1	3	0

Таблица 2

Параметры для описания вещества преграды в задаче 1

ρ_0, г/см^3	c_0, км/с	n	Γ	$P_{\text{отк}}$, ГПа	Y, ГПа	ν
1,72	0,5	9	0	0	0,005	0,03

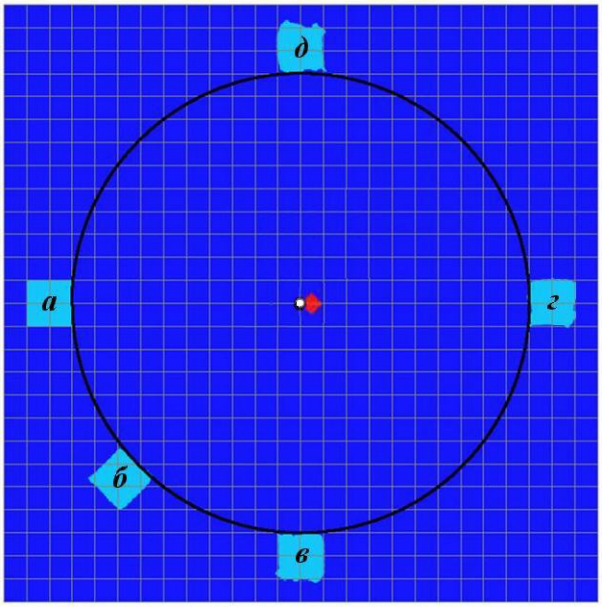


Рис. 4. Задача 1. Результаты расчета 1 ($V_0 = 0$; $x_C = 0$; $y_C = 0$)

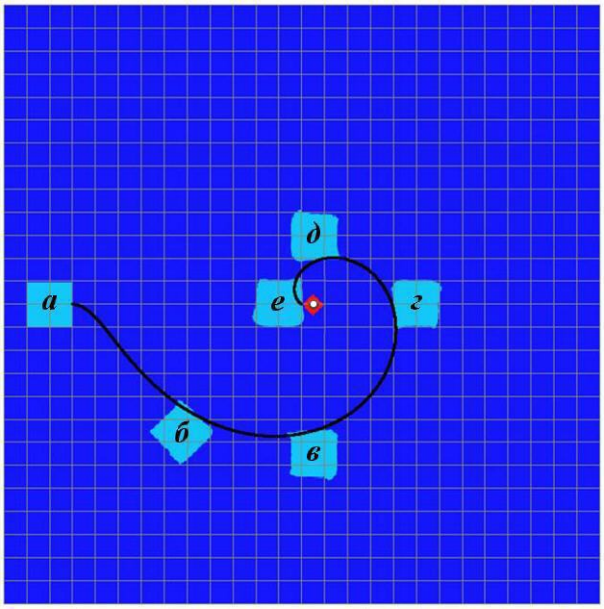


Рис. 5. Задача 1. Результаты расчета 2 ($V_0 = 0{,}1$ км/с; $x_C = 0{,}5$ см; $y_C = 0$)

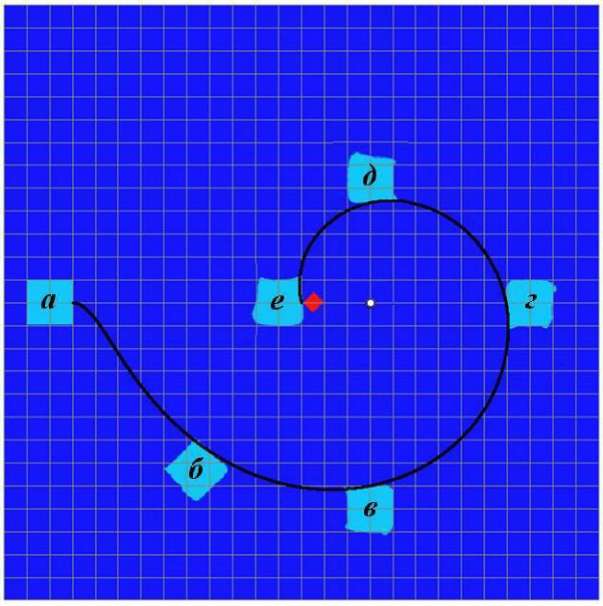


Рис. 6. Задача 1. Результаты расчета 1 ($V_0 = 0{,}1$ км/с; $x_C = 3$ см; $y_C = 0$)

*Всюду здесь и на рис. 9—12 время t указано в 10 мкс.

рии движения преграды, так и по повороту преграды γ на заданный момент времени. На основании этого можно сделать вывод, что программный модуль расчета движения среды в неинерциальной системе отсчета реализован правильно.

Задача 2. Движение твердого тела в грунте при наклонном внедрении. В качестве второй тестовой задачи рассматривалась задача о движении малодеформируемого ударника в грунтовой среде при наклонном внедрении. Начальная геометрия задачи представлена на рис. 7.

При численном моделировании использовались два подхода. Один расчет был проведен в стандартной постановке, при которой и ударник, и преграда описывались в приближении сплошной деформируемой среды. В качестве материала ударника в этом случае использовалась прочная сталь. В двух других расчетах для описания ударника применялось приближение твердого тела (использовался метод BODY-3D). Далее результаты соответствующих расчетов сравнивались между собой.

Ударник представлял собой однородное поликоническое тело с кавитатором в виде конуса, цилиндрической средней частью и конусообразной стабилизирующей "юбкой". Геометрия ударника (сечение вдоль плоскости симметрии xOy) с номерами угловых точек (их координаты приведены в табл. 3) изображена на рис. 8. Ударник и преграда располагались в вакууме.

Численное моделирование при стандартном подходе проводилось в обратной постановке: на момент времени $t = 0$ ударник покоился, а преграда налетала на него со скоростью $V_0 = V_x = 2$ км/с. Счетная область в этом случае двигалась со средней продольной скоростью ударника. Ось x являлась осью стрельбы. Угол подхода к поверхности преграды составлял $\theta = 35\,^\circ$, угол атаки полагался нулевым: $\alpha = 0$.

Расчеты проводились на кубической неподвижной сетке с размером счетной ячейки $h = 1$ см. В табл. 4 приведены их характеристики. При численном моделировании рассчитывалась половина реальной геометрии задачи: плоскость $z = 0$ являлась плоскостью симметрии. Значение коэффициента трения $\mu = 0{,}3$ между материалом ударника (сталью) и мягким грунтом в расчете 3 взято из [8]. Для описания мягкого грунта и стали во всех расчетах использовались уравнение состояния в форме Ми—Грюнайзена и приближение идеального упругопластического тела с параметрами из табл. 5.

В расчете 1 в стандартной постановке в процессе счета накапливались зависимости продольной и поперечной компонент импульса ударника от времени: $P_x(t)$ и $P_y(t)$. С помощью дифференцирования этих зависимостей по времени определялись значения компонент продольного и поперечного ускорений торможения центра масс ударника по формулам

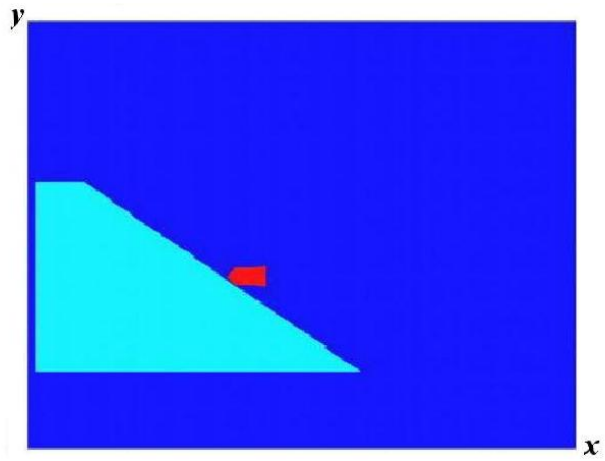


Рис. 7. Начальная геометрия задачи 2

Таблица 3

Координаты угловых точек ударника в задаче 2

Номер точки	x, см	y, см
1	5	0
2	15	10
3	35	10
4	49	12
5	49	−12
6	35	−10
7	15	−10

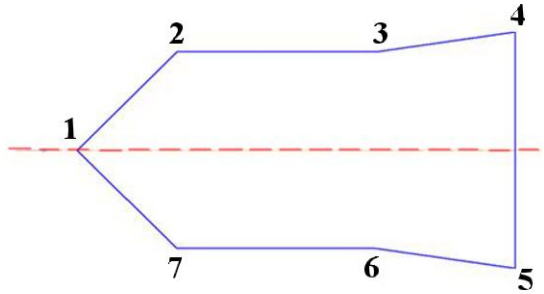


Рис. 8. Геометрия ударника в задаче 2.

Таблица 4

Характеристики расчетов задачи 2

Номер расчета	Приближение для описания ударника	J_C, г · см^2/(10 мкс)^2	m, г	x_C, см	y_C, см	μ
1	Сплошная среда	—	—	—	—	—
2	Твердое тело	7 663 810	50 667	31,3	0	0
3	Твердое тело	7 663 810	50 667	31,3	0	0,3

Таблица 5

Параметры для описания грунта и стали в задаче 2

Материал	ρ_0, г/см^3	c_0, км/с	n	Γ	$P_{\text{отк}}$, ГПа	Y, ГПа	ν
Грунт	1,72	0,5	9	0	0	0,005	0,3
Сталь	8	4,4	4,65	2	−2,1	2	0,29

$$a_x = \frac{1}{m}\frac{\Delta P_x}{\Delta t}; \qquad a_y = \frac{1}{m}\frac{\Delta P_y}{\Delta t},$$

где m — масса ударника. В этом расчете с помощью визуальной обработки полей плотности определялся угол между осью симметрии ударника и осью стрельбы в зависимости от времени: $\gamma(t)$.

В расчетах 2 и 3 с твердым телом зависимость $\gamma(t)$ определялась по формуле

$$\gamma = \int \omega dt,$$

где ω — частота вращения твердого тела относительно центра масс — рассчитывалась по формуле (4) в процессе счета. Компоненты продольного и поперечного ускорений торможения центра масс твердого тела $a'_x(t)$ и $a'_y(t)$ в системе отсчета (x', y', z'), в которой ударник неподвижен, определялись в процессе счета по формулам (3). Для сравнения с результатами расчета в стандартной постановке эти величины пересчитывались в систему отсчета (x, y, z), в которой ударник движется, по формулам

$$a_x = a'_x \cos\gamma + a'_y \sin\gamma; \qquad a_y = a'_y \cos\gamma - a'_x \sin\gamma.$$

На рис. 9 приведены результаты численного моделирования внедрения малодеформируемого ударника в грунтовую среду в стандартной постановке (расчет 1) и с твердым телом (расчет 2). Из результатов расчета 1, показанных на рис. 9 слева, видно, что из-за асимметричного обтекания грунтом на ранней стадии внедрения ударник при движении в грунтовой преграде развернулся относительно оси стрельбы по часовой стрелке. Это свидетельствует о его неустойчивости при выбранных условиях внедрения. Из результатов расчета 2 (твердое тело, $\mu = 0$), представленных на рис. 9 справа, видно, что в процессе расчета преграда вращалась против часовой стрелки относительно неподвижного ударника. Это аналогично результату расчета 1, в котором ударник вращался по часовой стрелке относительно преграды.

Для большей наглядности результаты расчетов на момент времени $t = 130$ изображены в более крупном масштабе на рис. 10, причем рис. 10, *б* получен с помощью поворота первоначальной расчетной картины (см. рис. 9, *в* справа) на угол $\gamma = 24^\circ$ по часовой стрелке. Видно, что результаты обоих расчетов визуально хорошо согласуются друг с другом. При численном моделировании получены каверны с близкими обводами, формы ударных волн в преграде согласуются друг с другом, в обоих случаях ударник развернулся по часовой стрелке относительно оси стрельбы.

На рис. 11, 12 (см. также цветную вкладку) в еще более крупном масштабе приведены результаты расчетов на моменты времени начала проникания ударника в преграду и перед ее пробитием.

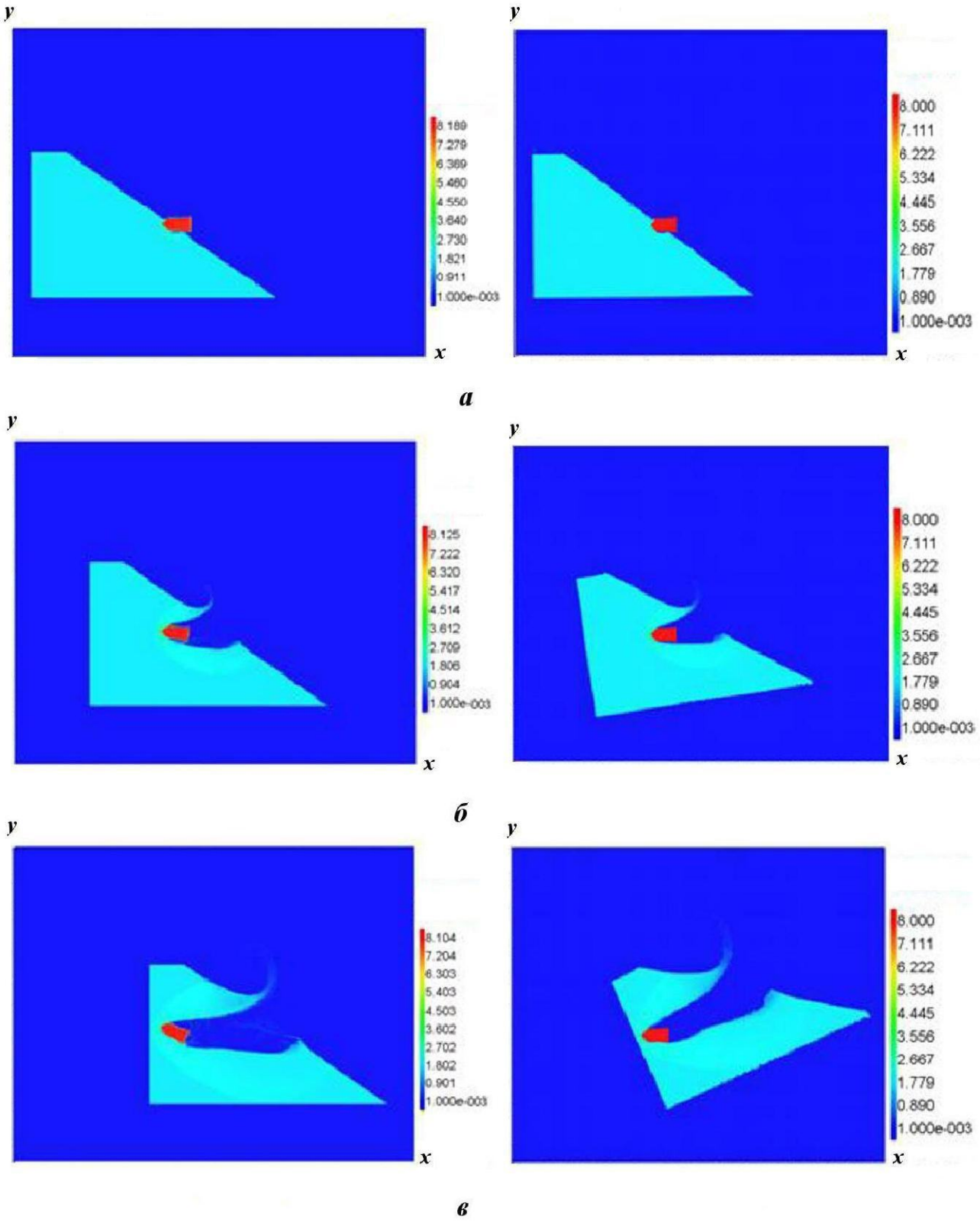
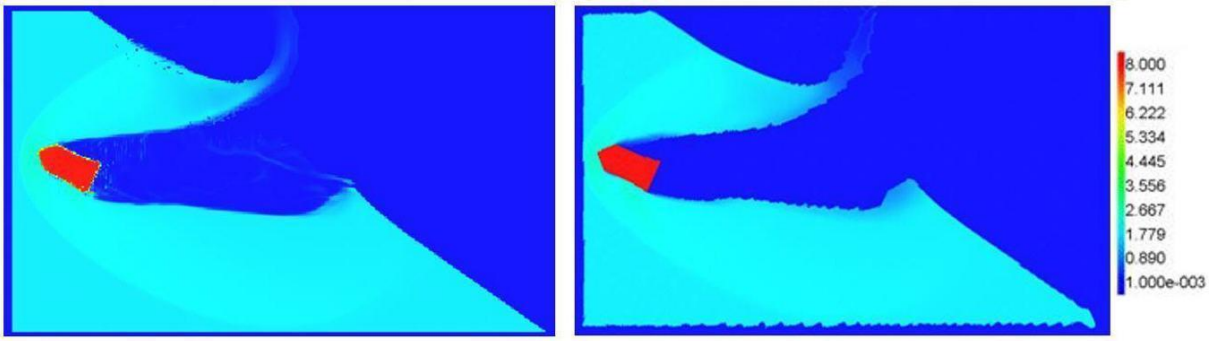
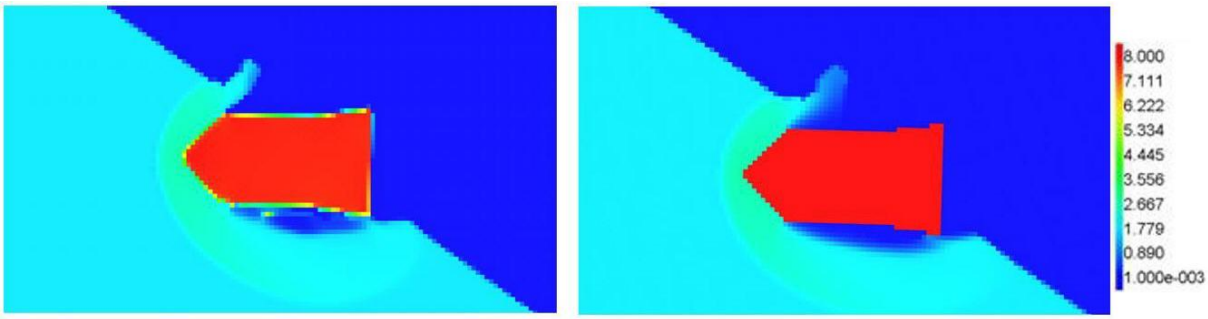


Рис. 9. Задача 2. Поля плотности, полученные в расчете 1 (слева) и в расчете 2 (справа): *а* — $t = 10$; *б* — $t = 60$; *в* — $t = 130$



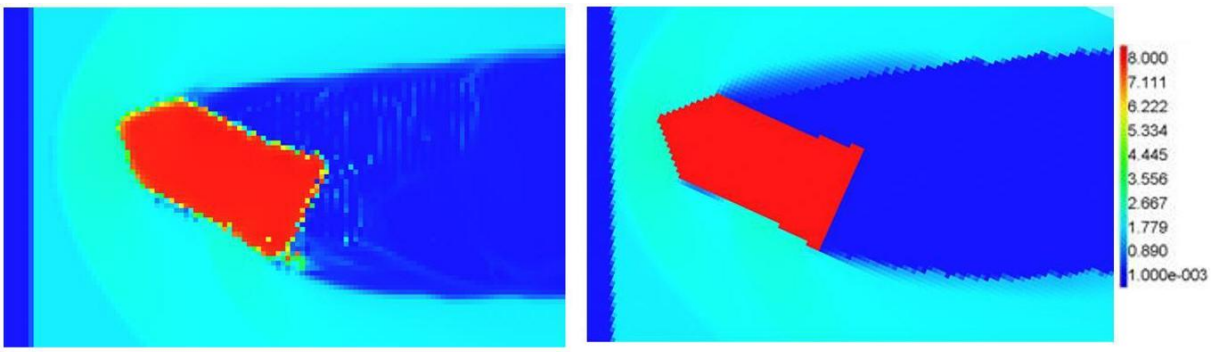
а *б*

Рис. 10. Задача 2. Сравнение полей плотности на момент времени $t = 130$: *а* — расчет 1; *б* — расчет 2, $\gamma = 24^\circ$



а *б*

Рис. 11. Задача 2. Поля плотности в начале проникания ударника в преграду ($t = 20$): *а* — расчет 1; *б* — расчет 2, $\gamma = 1{,}7^\circ$



а *б*

Рис. 12. Задача 2. Поля плотности перед пробитием преграды ($t = 130$): *а* — расчет 1; *б* — расчет 2, $\gamma = 24^\circ$

Изображения из расчета 2 (твердое тело, $\mu = 0$) повернуты по часовой стрелке на соответствующие углы γ. Из рисунков видно, что в расчете 1 (стандарт) с течением времени изначально резкая внешняя граница ударника стала "размываться". Это "размытие" выражалось в диффузии вещества преграды и вакуума в вещество ударника, что приводило к счетной погрешности. В расчете 2 (твердое тело, $\mu = 0$) форма ударника не изменилась по очевидной причине.

На рис. 13, 14 приведены полученные в расчетах зависимости от времени продольного и поперечного ускорений центра масс ударника, а также угла между осью симметрии ударника и осью стрельбы.

Сначала рассмотрим результаты расчетов без учета силы трения ($\mu = 0$). Продольное ускорение торможения центра масс ударника в расчете 1 на 5—10 % превышает ускорение, полученное в расчете 2, практически на всем протяжении внедрения (см. рис. 13, *а*). Основное отличие между временными зависимостями поперечного ускорения торможения центра масс ударника (см. рис. 13, *б*) заключается в более раннем наступлении в расчете 2 второго максимума, связанного с касанием стабилизирующей "юбки" ударника стенки каверны. Из рис. 14 видно, что до момента времени $t = 100$ углы поворота ударников, полученные в расчетах в стандартной постановке и с твердым телом, близки друг к другу. При $t > 100$ угол поворота ударника в расчете 1 начал несколько превышать угол, полученный в расчете 2. На момент окончания расчетов при $t = 160$ он составил $\gamma = 32^\circ$ при использовании стандартной постановки и $\gamma = 26^\circ$ при использовании приближения твердого тела. Возможно, это связано с размытием внешней границы ударника в расчете 1, как было показано на рис. 11, 12.

Проведем сравнение результатов расчетов с твердым телом с учетом и без учета силы трения (расчеты 2 и 3). Из представленных данных видно, что учет силы трения главным образом привел к росту продольной компоненты ускорения торможения центра масс ударника приблизительно на 10—15 %. Этот рост является естественным результатом, так как при численном моделировании

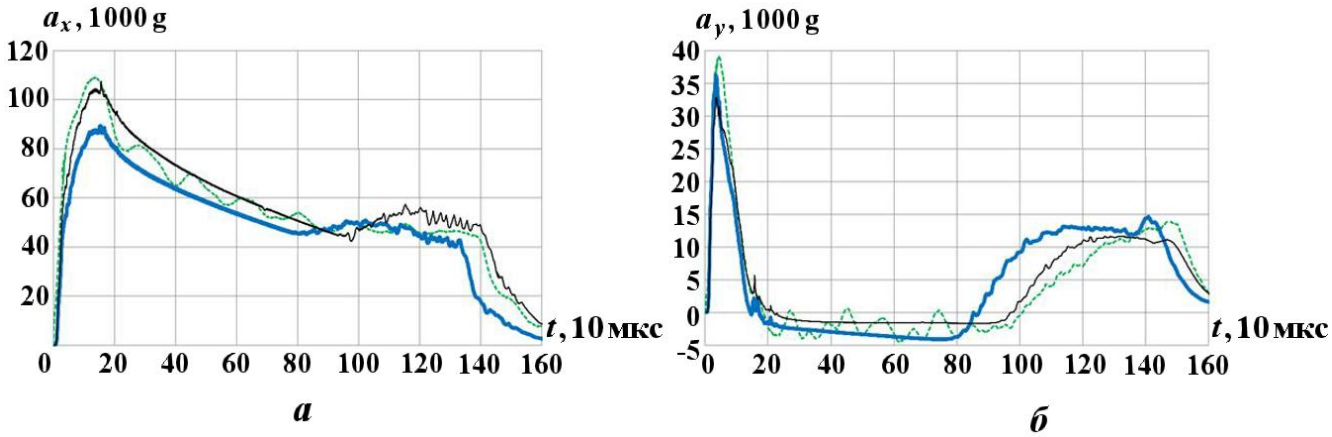


Рис. 13. Задача 2. Зависимости от времени продольного (*а*) и поперечного (*б*) ускорений торможения центра масс ударника: ···· — расчет 1; ——— — расчет 2; —— — расчет 3

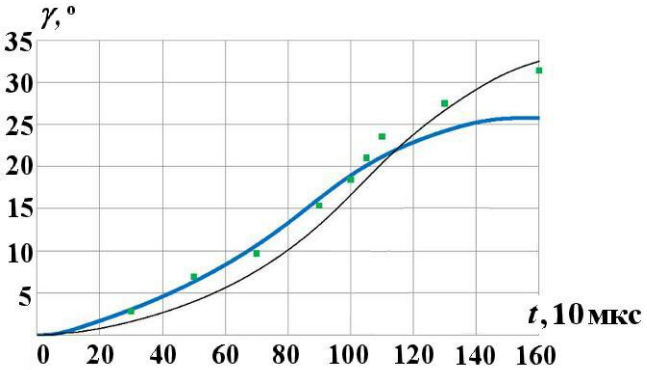


Рис. 14. Задача 2. Зависимости от времени угла между осью симметрии ударника и осью стрельбы: ▪ — расчет 1; ——— — расчет 2; —— — расчет 3

учитывается дополнительная сила, тормозящая ударник, а показатель роста согласуется с аналитическими оценками [9]. Влияние силы трения на угол поворота ударника неоднозначно. До момента времени $t \approx 110$ угол поворота в расчете 3 ($\mu = 0{,}3$) оказался меньше полученного в расчете 2 ($\mu = 0$). При $t > 110$ результат изменился на противоположный. Аналогично результатам, полученным в [10], наблюдалось влияние коэффициента трения на траекторию движения ударника в грунте. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Выводы

В методике ЭГАК реализован метод BODY-3D расчета движения твердого тела (ударника) в упругопластической среде (преграде) с учетом силы трения на неподвижной счетной сетке. Данный метод позволяет рассчитывать внедрение в преграду малодеформируемых ударников, используя для их описания приближение абсолютно твердого тела, при подходе под углом θ к поверхности преграды с углом атаки α и нулевым углом скольжения ($\beta = 0$). При этом полагается, что ударник имеет плоскость симметрии, перпендикулярную поверхности преграды. Численное моделирование проводится в неинерциальной системе отсчета, связанной с неподвижным ударником.

Для тестирования метода BODY-3D рассмотрены две задачи. Для первой задачи о свободном падении вращающегося твердого тела на преграду получено аналитическое решение. Получено практическое совпадение результатов численного моделирования с аналитическим решением как по траектории движения преграды, так и по повороту преграды γ на заданный момент времени. В качестве второй тестовой задачи рассматривалась задача о движении твердого тела в мягком грунте при наклонном внедрении. При численном моделировании использовались два подхода. В одном случае применялся стандартный подход, при котором ударник описывался в рамках механики деформируемой сплошной среды, в другом — метод BODY-3D. Сравнение результатов расчетов показало:

1. Результаты обеих серий расчетов хорошо согласуются друг с другом по форме каверны в грунте, углу поворота ударника относительно оси стрельбы и ускорению торможения его центра масс.
2. В отличие от стандартного подхода при использовании метода BODY-3D ударник сохраняет свою форму на протяжении всего расчета. В расчетах со стандартным подходом с течением времени изначально резкая внешняя граница ударника размылась за счет диффузии в его вещество вещества преграды и вакуума.
3. Учет силы трения при численном моделировании привел главным образом к росту продольного ускорения торможения ударника на 10—15 %.

Метод BODY-3D можно применять при проведении сопряженных расчетов, когда нагрузка на внешние обводы ударника при его внедрении определяется в расчете на неподвижной сетке и накапливается в системе датчиков, расположенных равномерно на его поверхности, а поведение элементов конструкции, расположенных внутри ударника, моделируется в последующем расчете на лагранжевой сетке. Во втором расчете в качестве граничных условий используются данные, накопленные в датчиках в первом расчете. При использовании стандартного подхода за счет погрешности определения на неподвижной счетной сетке контактных границ координаты датчиков могут сдвигаться относительно внешних обводов ударника. Это может приводить к значительным погрешностям при определении внешней нагрузки для второго расчета на лагранжевой сетке. При использовании метода BODY-3D положение границ твердого тела и соответствующих датчиков относительно счетной сетки фиксировано, что позволяет снять с датчиков значения напряжения с большей точностью и тем самым повысить общую точность моделирования.

В дальнейшем планируется снять ограничение, накладываемое на конфигурацию ударника и преграды (наличие у ударника плоскости симметрии, перпендикулярной поверхности преграды, а также нулевой угол скольжения), и обобщить метод BODY-3D на произвольное движение твердого тела с учетом его вращения вокруг всех осей. Такая работа в настоящее время проводится.

Авторы выражают благодарность С. С. Соколову и В. Ф. Спиридонову за полезные обсуждения, а также И. А. Еричевой за помощь в проведении расчетов.

Список литературы

1. *Бивин Ю. К., Симонов И. В.* Механика динамического проникания в грунтовую среду // Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 157—191.
2. *Silling S. A.* CTH Reference Manual: Boundary Layer Algorithm for Sliding Interfaces in Two Dimensions. Report No SAND92-2487. Albuquerque, 1994.
3. *Scheffler D. R.* Modeling non-eroding perforation of an oblique aluminum target using the Eulerian CTH code // Int. J. Impact Eng. 2005. Vol. 32, No 1—4. P. 461—472.
4. *Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Городничев А. В., Волгин А. В., Воронов Е. Г., Гужова А. Р., Дегтяренко Л. И., Жарова Г. В., Кучерова П. А., Стадник А. Л., Ховрин Н. А.* Комплекс программ ЭГАК++ для моделирования на адаптивно-встраивающейся дробной счетной сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 1. С. 20—28.
5. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Том 1. Механика. М.: Наука, 1979.
6. *Li Q. M., Flores-Johnson E. A.* Hard projectile penetration and trajectory stability // Int. J. Impact Eng. 2011. Vol. 38. P. 815—823.
7. Код ЭГИДА-2D для моделирования двумерных задач. Уч. пособие в 2-х томах / Под ред. Ю. В. Янилкина. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2008.
8. *Гердюков Н. Н., Иоилев А. Г., Новиков С. А.* Определение динамического коэффициента трения песчаного грунта о жесткую стенку // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 185—187.
9. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: МГУ, 1974.
10. *Sun Q., Sun Y., Liu Y., Li R., Zhao Y.* Numerical analysis of the trajectory stability and penetration ability of different lateral-abnormal projectiles for non-normal penetration into soil based on Modified Integrated Force Law method // Int. J. Impact Eng. 2017. Vol. 103. P. 159—168.

Статья поступила в редакцию 04.07.17.

A METHOD FOR THE SIMULATION OF A PERFECTLY RIGID BODY MOVING IN ELASTIC MEDIUM USING A FIXED COMPUTATIONAL GRID / A. A. Krayukhin, Yu. V. Yanilkin, A. L. Stadnik, M. Yu. Eguzhova (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper suggests the BODY-3D method to simulate the motion of a perfectly rigid body in an elastoplastic medium with regard to friction using an Eulerian computational grid, its implementation in the EGAK code is described and results of test simulations are presented. Two problems were used to test the method. An exact solution was obtained for the first one, the problem of a freely falling rotating rigid body impacting a barrier. The second was the problem of a moving rigid body penetrating into a soft ground at an angle.

Keywords: penetration, rigid body, friction, elastoplastic medium, noninertial frame of reference, Eulerian computational grid, the EGAK code.