

УДК 519.6

## ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ СЕТКИ НА ОСНОВЕ ДИАГРАММЫ ВОРОНОГО В НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

А. А. Воропинов, С. С. Соколов, А. К. Шмелёва  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описан подход к построению трехмерной неструктурированной сетки на основе диаграммы Вороного со специальной расстановкой центров вблизи исходной поверхностной сетки с последующим удалением внешнего слоя ячеек. Данная расстановка центров позволяет строить сетки в невыпуклых областях. Алгоритмы реализованы в рамках методики ТИМ.

*Ключевые слова:* методика ТИМ, неструктурированная сетка, трехмерная диаграмма Вороного, сетка на основе диаграммы Вороного, расчет начальных данных, поверхностная сетка.

### Введение

Методика ТИМ [1, 2] предназначена для решения задач механики сплошной среды на неструктурированных многоугольных и многогранных лагранжевых сетках произвольного вида методом конечных разностей. Ячейками разностной сетки могут являться произвольные несамопересекающиеся многоугольники (в двумерном случае) или многогранники (в трехмерном случае); в узлах сетки может сходиться произвольное количество ребер и граней.

С усложнением решаемых задач в трехмерной постановке традиционные методы построения сеток [3, 4] стали недостаточными. Например, листовой подход [5] позволяет построить качественную сетку у границ расчетной области, но ограничен в описании характерных особенностей трехмерной геометрической модели. У сетки, полученной методом отсечений [4], снижается качество вблизи границы отсечения за счет появления ячеек малого объема, неортогональности сетки у границ и других дефектов. Поэтому потребовался новый способ построения сетки для существенно трехмерных невыпуклых геометрий, в качестве которого был выбран подход построения сетки на основе диаграммы Вороного [6].

Классический алгоритм диаграммы Вороного предназначен для выпуклых областей. Получа-

емая сетка содержит только выпуклые ячейки с плоскими гранями. При этом для придания сетке специальных свойств используется особая расстановка центров ячеек [7, 8]. Задача построения диаграммы Вороного в невыпуклых областях является нетривиальной. Существует ряд алгоритмов для невыпуклых двумерных областей [9]. В трехмерном случае разработаны алгоритмы построения сеток для ряда аналитически задаваемых невыпуклых областей [10].

В данной статье рассмотрен алгоритм, предназначенный для построения трехмерной сетки на основе диаграммы Вороного в произвольных невыпуклых областях исходя из замкнутой поверхностной сетки.

### Особенности построения диаграммы Вороного

Пусть задано множество  $C$  из  $n$  точек  $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$  в пространстве  $R^3$ . Диаграммой Вороного  $V(C)$  называется разбиение пространства на  $n$  ячеек Вороного  $V(i)$ :

$$V(\vec{p}_i) = V(i) = \{ \vec{r} : \vec{r} \in R^3, d(\vec{r}, \vec{p}_i) \leq d(\vec{r}, \vec{p}_j), j \neq i \}.$$

Здесь ячейка  $V(i)$  — выпуклый многогранник, являющийся пересечением полупространств

$H(\vec{p}_i, \vec{p}_j)$ , которые определяются плоскостью, делящей отрезок  $[\vec{p}_i, \vec{p}_j]$  пополам и перпендикулярной этому отрезку:  $d(\vec{r}, \vec{p})$  — расстояние между точками  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ .

Существует ряд алгоритмов построения диаграммы Вороного [11]. В методике ТИМ для построения сетки использован инкрементный алгоритм [12], основанный на последовательном добавлении ячеек в уже имеющуюся сетку. Данный алгоритм с применением быстрого поиска геометрической близости точек [13] имеет вычислительную сложность  $O(n \log n)$  [14].

Одним из важных свойств таких сеток является то, что, распределяя центры ячеек внутри одной и той же выпуклой области различными способами, можно получить разные сетки. Исследование различных способов распределения центров проводилось в работах [15, 16]. Наиболее часто в методике ТИМ используются равномерные распределения центров диаграммы Вороного для получения сеток из тел Вороного\* (рис. 1, *а*), шестигранников (рис. 1, *б*), шестиугольных призм (рис. 1, *в*).

Также можно построить сетку, в которой задано несколько распределений центров ячеек в рамках одной области. Положительным свойством такой сетки является то, что при ее построении не требуется выполнять процедуру сшивания [17]. На рис. 2, *а* в одной половине области построена сетка из тел Вороного, а в другой — из шестигранных ячеек. На рис. 2, *б* в области задано несколько распределений шести-

гранных ячеек с разными расстояниями между центрами вдоль оси  $OX$ .

При построении диаграммы Вороного могут появляться малые ребра и грани, так как в любом узле диаграммы Вороного сходится только  $N + 1$  ребро, где  $N$  — размерность пространства. Поэтому в трехмерном случае одним из требований к распределениям центров ячеек является то, чтобы никакие пять или более центров не лежали на поверхности одной сферы. Это требование ограничивает применимость алгоритмов диаграммы Вороного для построения, например, шестигранной сетки (рис. 3, *а*). С помощью диаграммы Вороного можно построить только сетки, близкие к шестигранным (рис. 3, *б*).

Данная проблема актуальна при построении диаграммы Вороного не только для равномерных распределений центров. Перечисленные недостатки ограничивают область применения классической диаграммы Вороного для расчета задач, снижая качество расчетной сетки из-за наличия элементов (ребер, граней) существенно разного размера.

Для решения указанной проблемы в данной работе при построении ячеек Вороного не допускается возникновения малых граней и ребер. Малые грани и ребра могут возникать при добавлении очередной ячейки и расщеплении срединно-перпендикулярной плоскостью ячеек, построенных ранее. В случае, если площадь грани мала, расщепление выполняется соответственно через ближайшее ребро или узел. В связи с этим полу-

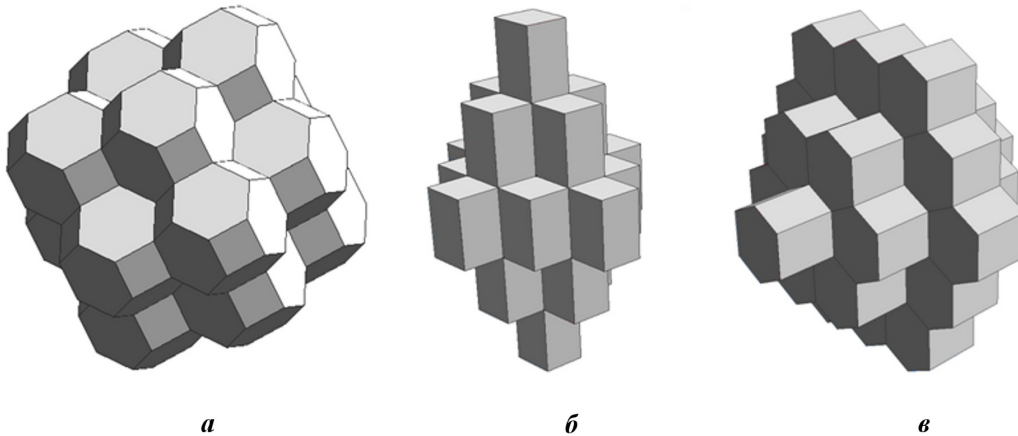


Рис. 1. Различные виды ячеек сетки: *а* — тела Вороного; *б* — шестигранники; *в* — шестиугольные призмы

\*Тело Вороного — четырнадцатигранник из 8 шестиугольных и 6 четырехугольных граней.

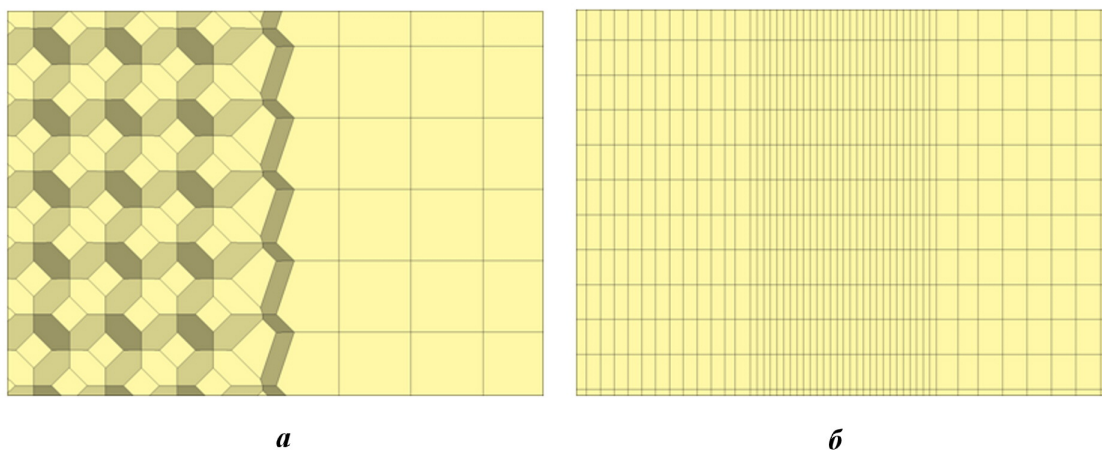


Рис. 2. Виды сеток с несколькими распределениями центров в одной области вблизи границы между распределениями: *a* — тела Вороного и шестигранные ячейки; *б* — шестигранные ячейки с разными расстояниями между центрами

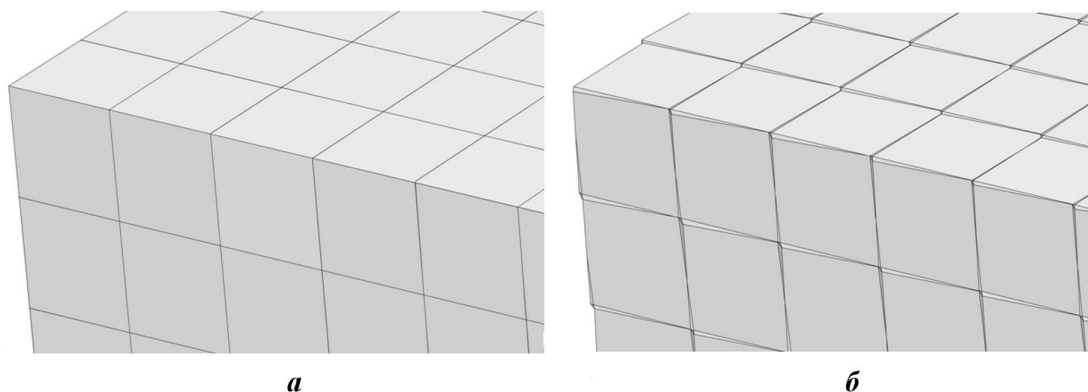


Рис. 3. Фрагменты сеток: *a* — на основе диаграммы Вороного с равномерной расстановкой центров ячеек; *б* — диаграммы Вороного с расстановкой центров ячеек, близкой к равномерной

чаемая сетка не является в строгом смысле диаграммой Вороного, поэтому в дальнейшем будем ее называть сеткой *на основе* диаграммы Вороного.

### Особенности метода

Предлагается метод построения сетки на основе диаграммы Вороного в произвольной невыпуклой области с использованием исходной поверхностной сетки. По отношению к строящейся объемной сетке ячейки поверхностной сетки являются *гранями*. Так и будем называть их в дальнейшем для отличия от ячеек объемной сетки.

Учет невыпуклости области достигается с помощью специальной расстановки центров ячеек вдоль поверхностной сетки (центры расстав-

ляются попарно, на одинаковом расстоянии с внешней и внутренней сторон от поверхностной сетки), что приводит к отсутствию невыпуклых ячеек вблизи границы сетки. Исходная поверхностная сетка может иметь произвольную структуру, но должна быть замкнутой, не содержать вырожденных граней и ребер, не иметь самопересечений. Для описания структуры поверхностной сетки используется реберно-ячеечный формат [18]. Направление обхода грани должно быть против часовой стрелки, если смотреть снаружи.

Для построения сетки на основе диаграммы Вороного, кроме исходной поверхностной сетки, в качестве начальных данных задаются:

- отступ  $\Delta$  от поверхности для определения положения центров ячеек;
- число слоев центров ячеек вдоль поверхно-

сти внутри геометрии (для построения сетки приграничного слоя) [19];

- количество центров внутренних ячеек и тип их распределения.

Основными этапами построения объемной сетки на основе диаграммы Вороного в невыпуклой области являются:

1. Анализ и измельчение граней исходной поверхностной сетки.
2. Расстановка центров ячеек с учетом поверхностной сетки.
3. Построение сетки на основе диаграммы Вороного в выпуклой области.
4. Удаление внешнего слоя ячеек.
5. Преобразования полученной сетки на границе.

### Анализ и измельчение граней поверхностной сетки

При построении сетки на основе диаграммы Вороного для вычисления центров ячеек у ее границы используются данные об исходной поверхностной сетке, поэтому от качества последней напрямую зависит качество результирующей объемной сетки. Наилучшим образом зарекомендовали себя поверхностные сетки, грани которых близки к правильным фигурам и имеют примерно одинаковые размеры (площади). Но поскольку предполагается, что поверхностная сетка совершенно произвольна по форме и размеру граней, то необходимо ее преобразовать так, чтобы привести грани к более единообразному виду. Так как ухудшение описания поверхности не допускается (за счет объединения поверхностных граней), то возможно только дробление некоторых граней на более мелкие. Рассмотрим несколько типов такого дробления.

**Дробление больших граней.** Для граней большой площади осуществляется дробление на четырехугольники путем соединения центра грани и центров ребер.

Считается, что грань  $i$  имеет большую площадь, если ее площадь  $S_i$  удовлетворяет условию  $S_i > 4 \sum_{j=1}^{k_i} S_j / k_i$ , ( $k_i$  — число смежных по узлам и ребрам граней для грани  $i$ ).

Дробление на четырехугольники также выполняется для относительно крупных граней,

для которых  $S_i > 1,5 \sum_{j=1}^k S_j / k$ , ( $k$  — общее число граней поверхностной сетки) и которые относятся к *тонким* участкам геометрии, заданной поверхностной сеткой.

Рассмотрим критерии определения тонких участков на примере двух граней  $F_m$  ( $m = 1, 2$ ), содержащих  $k_m$  узлов с радиусами-векторами  $\vec{V}_{mi}$ ,  $i = 1, \dots, k_m$  (рис. 4).

Для этих граней определяются радиусы-векторы их центров:  $\vec{C}_m = \sum_{i=1}^{k_m} \vec{V}_{mi} / k_m$ .

Далее определяются нормали к граням

$$\vec{n}_m = \frac{\sum_{i=1}^{k_m} \vec{n}_{mi} S_{mi}}{\sum_{j=1}^{k_m} S_{mj}}, \quad m = 1, 2.$$

Здесь  $\vec{n}_{mi} = \vec{R}_{m1} \times \vec{R}_{m2}$  — вектор нормали для узла  $\vec{V}_{mi}$ , где  $\vec{R}_{m1} = \vec{V}_{mi+1} - \vec{V}_{mi-1}$ ;  $\vec{R}_{m2} = \vec{C}_m - \vec{V}_{mi}$ ;  $S_{mi} = |\vec{n}_{mi}|$  — площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{R}_{m1}$  и  $\vec{R}_{m2}$ .

Нормированные векторы нормалей к граням

$$\vec{N}_m = \frac{\vec{n}_m}{|\vec{n}_m|}, \quad m = 1, 2.$$

Положение точек  $\vec{P}_{1\pm}$ ,  $\vec{P}_{2\pm}$  определяется по формуле

$$\vec{P}_{m\pm} = \vec{C}_m \pm \Delta \vec{N}_m, \quad m = 1, 2.$$

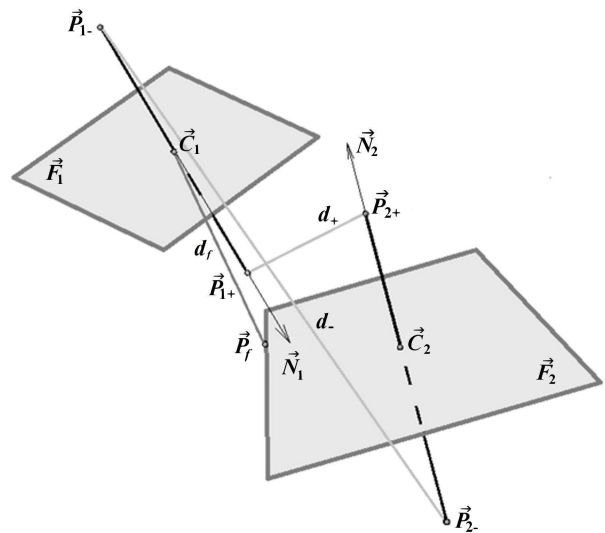


Рис. 4. Определение тонких участков геометрии, заданной поверхностной сеткой

Если центр грани  $\vec{C}_1$  — внутренний для грани  $F_2$  (лежит в том же полупространстве, ограниченном гранью  $F_2$ , что и точка  $\vec{P}_{2+}$ ), то находим ближайшую к  $\vec{C}_1$  точку  $\vec{P}_f$ , принадлежащую грани  $F_2$ . Вычисляем значения функции  $d(\vec{x}, \vec{y})$ , определяющей расстояние между двумя точками:

$$d_f = d(\vec{C}_1, \vec{P}_f);$$

$$d_+ = d(\vec{P}_{1+}, \vec{P}_{2+}); \quad d_- = d(\vec{P}_{1-}, \vec{P}_{2-}).$$

При  $d_f > \min(d_+, d_-)$  обе грани  $F_1$  и  $F_2$  подлежат дроблению.

Следует отметить, что для всей поверхностной сетки данные оценки осуществляются с использованием алгоритма быстрого поиска геометрической близости точек [13].

**Дробление вытянутых граней.** Дробление вытянутых граней осуществляется поперек максимальной диагонали и приводит к более равномерному распределению центров при построении сетки и более качественному описанию изломов. Для оценки степени вытянутости грани вычисляется значение величины  $l = \frac{S}{Ad_{\max}}$ , где  $A$  — периметр,  $S$  — площадь,  $d_{\max}$  — длина максимальной диагонали рассматриваемой грани. Практика показала, что для получения лучшего качества сетки достаточно проводить дробление граней при значении  $l < 0,05$ .

**Триангуляция неплоских граней.** Грани поверхностной сетки могут быть неплоскими. Для построения на их основе ячеек, корректно описывающих границу будущей сетки, необходимо привести такие грани к плоскому виду, чтобы однозначно определить положение центров ячеек, получаемых от этих граней.

Так как триангуляция всей поверхностной сетки может существенно увеличить число граней поверхности, проводится оценка кривизны грани. Для этого попарно рассматриваются треугольники, построенные по ребру и центру грани. Если хотя бы один угол между нормальными к плоскостям таких треугольников превышает заданный угол ( $\alpha = 5^\circ$ ), грань триангулируется. Триангуляция грани проводится путем соединения центра грани и ее вершин (рис. 5).

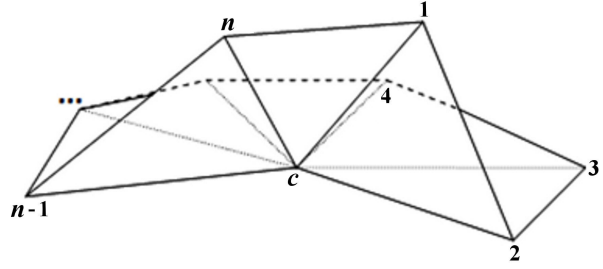


Рис. 5. Триангуляция неплоской грани: 1, 2, ..., n — вершины; c — центр грани

### Расстановка центров ячеек с учетом поверхностной сетки

Назовем центры ячеек, полученные с помощью информации об исходной поверхностной сетке, *основными центрами*. Чтобы добиться качественного описания границы области, эти центры расставляются парами на одинаковом расстоянии от центров граней поверхностной сетки вдоль направлений внешней и внутренней нормалей. Грань, с помощью которой получены координаты каждой из пар центров, назовем *материнской гранью* для этих центров.

Для некоторых задач необходимо, чтобы в приграничной области сетка была равномерной. Этого можно добиться построением нескольких внутренних слоев у границы. Центры приграничных слоев также определяются, исходя из положения исходной поверхностной сетки, т. е. являются основными.

На рис. 6 схематично показано расположение центров ячеек для двумерного случая с построением сетки в невыпуклой области. Серым цветом обозначена внешняя относительно исходной поверхностной сетки часть пространства, белым — внутренняя. Основные центры на рисунке обозначены крестиками. В данном примере имеется два приграничных слоя. Направления нормалей обозначены стрелками, проходящими через основные центры и центры граней поверхностной сетки.

Основные центры, расположенные снаружи от материнских граней, назовем *внешними*, центры, расположенные внутри, — *внутренними*.

*Дополнительные центры* — центры, получае-

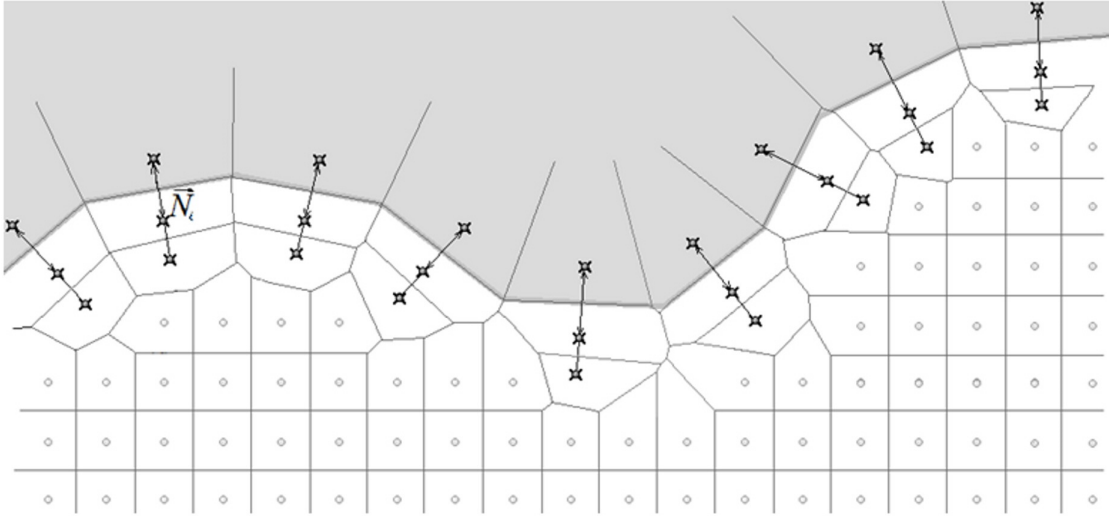


Рис. 6. Расположения центров ячеек и построенная сетка на основе диаграммы Вороного

мые с помощью различных распределений, расположенные с внутренней стороны от поверхностной сетки и не влияющие на построение границы сетки (на рис. 6 обозначены серыми точками).

Ячейки сетки на основе диаграммы Вороного, полученные от внутренних основных или дополнительных центров, назовем *внутренними*, ячейки, полученные от внешних основных центров, — *внешними*.

**Вычисление координат основных центров.** Одним из входных параметров для построения объемной сетки является значение отступа  $\Delta$  от поверхностной сетки, задаваемое пользователем. Его геометрический смысл — толщина граничных ячеек объемной сетки. Заданное значение отступа не всегда является приемлемым для построения сетки: при больших значениях  $\Delta$  ячейки объемной сетки у границы могут получаться слишком вытянутыми. Чтобы избежать подобной ситуации, вводится ограничитель сверху  $\beta$  для вычисления расстояния от основных центров до поверхностной сетки.

Пусть исходная поверхностная сетка состоит из  $k$  граней и  $m$  ребер. В качестве верхнего ограничителя  $\beta$  выбирается половина средней длины ребра поверхностной сетки:

$$\beta = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m d(\vec{V}_{ai}, \vec{V}_{bi}),$$

где  $\vec{V}_{ai}$  и  $\vec{V}_{bi}$  — радиусы-векторы узлов ребра  $i$ . Тогда откорректированное значение отступа от

поверхности сетки определяется выражением

$$\delta = \min(\Delta, \beta). \quad (1)$$

Для локальной оценки положения основных центров друг относительно друга рассмотрим пару центров, полученную от грани  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Координаты основных центров  $\vec{P}_{i\pm}$  определяются по формуле

$$\vec{P}_{i\pm} = \vec{C}_i \pm \delta \vec{N}_i. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{C}_i$  — радиус-вектор центра грани; индекс со знаком "+" означает внутренний центр, со знаком "—" — внешний.

Для центров  $\vec{P}_{i\pm}$  рассматриваются центры смежных по узлам и ребрам граней  $j = 1, \dots, k_i$  (рис. 7). Определяются значения

$$\alpha_{ij} = \min\left(d\left(\vec{P}_{i+}, \vec{P}_{j+}\right), d\left(\vec{P}_{i-}, \vec{P}_{j-}\right)\right).$$

Согласно определению основных центров и формулам (1), (2)

$$2\delta = d\left(\vec{P}_{i+}, \vec{P}_{i-}\right) = d\left(\vec{P}_{j+}, \vec{P}_{j-}\right).$$

Для корректного построения сетки у границы необходимо выполнение условия

$$2\delta < \alpha_{ij}, \quad j = 1, \dots, k_i. \quad (3)$$

Чтобы условие (3) выполнялось для каждой грани  $i$ , вводятся следующие значения:

$$\lambda_i = \min\left(1; \frac{0,45\alpha_{ij}}{\delta}\right),$$

$$i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k_i.$$



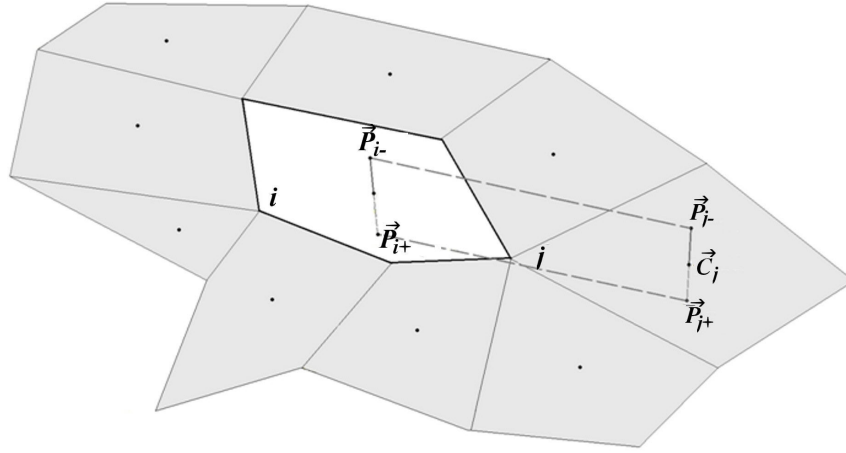


Рис. 7. Оценка расстояний между центрами

Из формулы (2) и на основе полученного локального значения  $\delta_i = \lambda_i \delta$  вычисляются координаты основных центров:

$$\vec{P}'_{i\pm} = \vec{C}_i \pm \delta_i \vec{N}_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Обобщение данной формулы для  $L$  приграничных слоев выглядит следующим образом:

$$\vec{P}'_{im} = \vec{C}_i + m\delta_i \vec{N}_i, \\ i = 1, \dots, k, \quad m = 1, \dots, L.$$

**Дополнительные центры.** Формирование списка дополнительных центров проходит в три этапа:

1. Генерируется набор заданного числа центров согласно их типу распределения в *габаритном параллелепипеде*, содержащем все основные центры. Грани габаритного параллелепипеда параллельны координатным плоскостям, а угловые точки определяются как

$$\vec{S}_{\max} = \max_i \vec{C}_i + 1,5\delta; \quad \vec{S}_{\min} = \min_i \vec{C}_i - 1,5\delta; \\ i = 1, \dots, k.$$

2. Чтобы центры, лежащие вблизи поверхностной сетки не оказывали влияния на границу будущей объемной сетки, они удаляются. С этой целью для каждого дополнительного центра вычисляются расстояния до близлежащих граней поверхностной сетки. Если минимальное из этих расстояний  $d_f \leq \delta(1+L)$ , то считается, что рассматриваемый дополнительный центр лежит слишком близко к поверхностной сетке, поэтому он исключается.

3. Выполняется фильтрация дополнительных центров, которая заключается в следующем. По известному номеру ближайшей поверхностной грани  $F$  с узлами  $\vec{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, k_i$ , для рассматриваемого дополнительного центра вычисляется значение

$$r_1 = \frac{1}{3} \left( d(\vec{V}_i, \vec{V}_{i-1}) + d(\vec{V}_i, \vec{V}_{i+1}) + d(\vec{V}_{i-1}, \vec{V}_{i+1}) \right).$$

Затем определяется  $r = \max(r_1, \delta(1+L))$ .

Рассматриваются три точки:

$$\vec{P}_1 = \vec{V}_i + r\vec{n}_i; \\ \vec{P}_2 = \vec{V}_{i+1} + r\vec{n}_{i+1}; \quad \vec{P}_3 = \vec{V}_{i-1} + r\vec{n}_{i-1}, \quad (4)$$

где  $\vec{n}_i$  — вектор нормали для  $\vec{V}_i$ , направленный внутрь от поверхностной сетки.

Дополнительный центр исключается из дальнейшего рассмотрения, если он находится с текущим узлом  $\vec{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, k_i$ , в одном полупространстве относительно плоскости, проходящей через три точки, определенные по формуле (4).

**Обработка щелей.** В исходной поверхностной сетке в окрестности излома возможно также наличие узких пустот — *щелей*. Под щелью подразумевается совокупность граней поверхностной сетки, основные внешние центры для которых расположены внутри области построения.

В двумерном случае щель схематично представлена на рис. 8, а. При построении сетки на основе диаграммы Вороного граница области около щели может быть описана некачественно (рис. 8, б; белым цветом показаны внутренние ячейки, серым — внешние). Как видно из

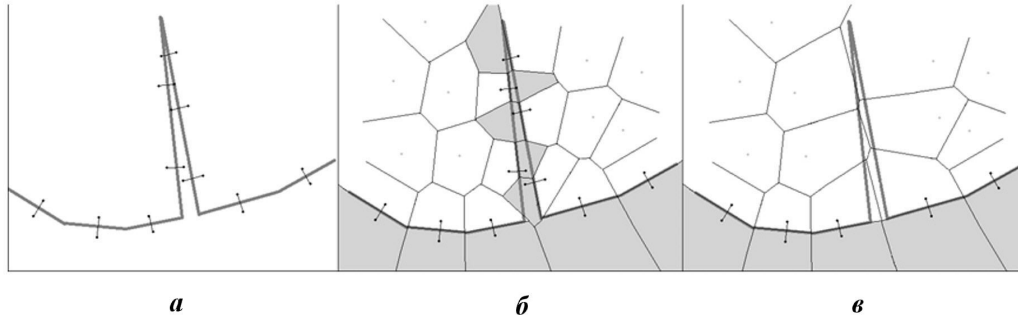


Рис. 8. Обработка щели в двумерном случае: *a* — щель и центры диаграммы Вороного; *б* — сетка на основе диаграммы Вороного, построенная для указанного набора центров; *в* — сетка с удаленными в окрестности щели центрами

рис. 8, *б*, ячейки с внешними центрами занимают существенный объем внутри области построения. Поскольку при построении сетки на основе диаграммы Вороного в невыпуклой области такие ячейки отбрасываются, это приводит к увеличению размера щели в построенной сетке. Так как щель имеет малый объем, то такую особенность можно считать дефектом исходной поверхностной сетки и игнорировать при построении объемной сетки. Для этого удаляются основные центры для граней вблизи щели. В результате качество сетки улучшается (рис. 8, *в*).

Чтобы определить, какие центры нужно удалить, рассматриваются точки

$$\vec{P}_i = \vec{P}_{i-} - 10\delta_i \vec{N}_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Если точка  $\vec{P}_i$  лежит внутри тела, ограниченного поверхностной сеткой, то набор центров  $\vec{P}_{i\pm}, P_{im}$  не учитывается при построении сетки, а материнская для этих центров грань  $i$  считается гранью щели и не принимается во внимание при корректировке объемной сетки на последующих шагах алгоритма.

### Построение сетки на основе диаграммы Вороного в выпуклой области

По полученному набору основных и дополнительных центров строится сетка на основе диаграммы Вороного в габаритном параллелепипеде.

При этом снимается ограничение на фиксированное количество связей в узлах классической диаграммы Вороного (что возможно благодаря

формату хранения данных *по граням* [20] методики ТИМ) и допускается удаление граней малой площади и коротких ребер в процессе построения сетки. Это улучшает качество сетки.

В трехмерном случае проводится оценка площади грани относительно всех граней двух объемных ячеек, которые она разделяет. Грань преобразуется в узел или ребро (рис. 9, 10), если ее площадь  $S_F$  удовлетворяет условию

$$S_F < \frac{10^{-8}}{K_i} \sum_{j=1}^{k_m} S_{F_j}, \quad m = 1, 2,$$

где  $k_m$  — число граней  $m$ -й ячейки.

Процедура удаления малых граней может привести к тому, что грани вблизи удаляемых элементов станут неплоскими.

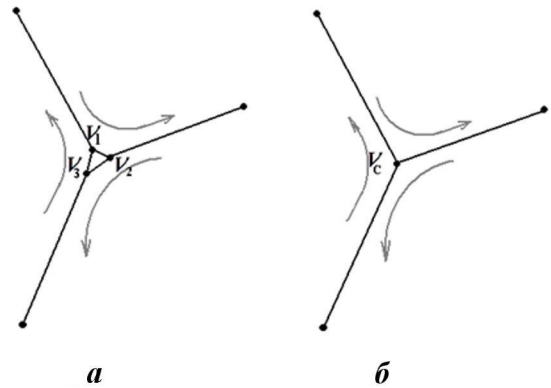


Рис. 9. Фрагмент сетки в процессе преобразования малой грани в узел: *a* — до удаления малой грани; *б* — после удаления малой грани



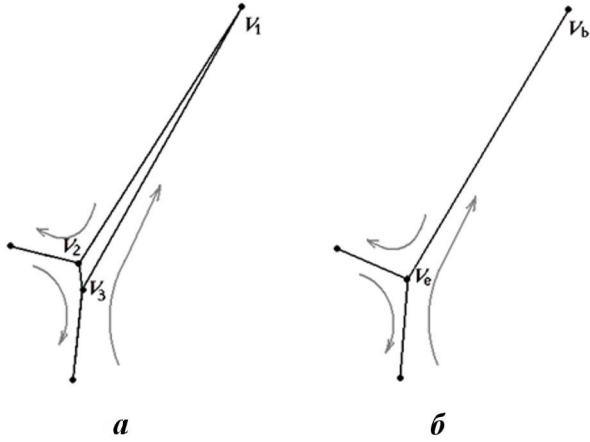


Рис. 10. Фрагмент сетки в процессе преобразования малой грани в ребро: *a* — до удаления вытянутой малой грани; *б* — после удаления вытянутой малой грани

**Преобразования сетки у изломах.** Для более качественного описания границы объемной сетки определяются линии излома. *Линия излома* — непрерывная линия из ребер поверхностной сетки, разделяющих грани, двугранный угол между которыми менее  $150^\circ$ . На рис. 11, *a* показан фрагмент объемной сетки, состоящей из внутренних ячеек и построенной на изломах поверхностной сетки (линии излома выделены черным цветом).

На этапе анализа поверхностной сетки запоминаются ее грани, образующие линии излома. После построения объемной сетки в выпуклой области выполняются отсечения ячеек, как внутренних, так и внешних, материнские грани которых примыкают к линиям излома. Отсечения проводятся гранями исходной поверхностной сетки,

имеющими с рассматриваемой материнской гранью общее ребро или узел на линии излома. Каждое последующее отсечение затрагивает все уже полученные ячейки-фрагменты, относящиеся к рассматриваемой материнской грани. После выполнения всех отсечений внутренняя ячейка формируется заново как объединение всех внутренних ячеек-фрагментов, полученных для одной материнской грани (рис. 11, *б*).

**Обработка ячеек вблизи щелей.** К некоторым линиям излома могут примыкать щели. Способ обработки ячеек вблизи линии излома, находящихся близко к щели, меняется. Близкими к щели считаются ячейки, построенные для граней исходной поверхностной сетки, расположенные в двух уровнях соседства от граней щели. Для этих ячеек выполняются поиск ближайших граней, не относящихся к щели, и отсечения найденными гранями.

Рассмотрим пример построения трехмерной сетки вблизи щели. На рис. 12, *a* показан фрагмент поверхности сетки, полученной без обработки щели. На рис. 13, *a* — серия сечений полученной сетки. Видно, что у границы сетка описывается некачественно (граница сетки выделена черным контуром). На рис. 12, *б* сетка построена с обработкой щели. На рис. 13, *б* показана серия сечений для этой сетки.

Для оценки качества каждой из сеток вычисляется дисбаланс объема

$$\varepsilon_W = \frac{W_s - W_k}{W_s} \cdot 100\%, \quad (5)$$

где  $W_s$  — объем тела, ограниченного поверхностной сеткой;  $W_k$  — объем, занимаемый построенной сеткой. Например, для сетки, представленной на рис. 12, *a* и 13, *a*, построенной без обработ-

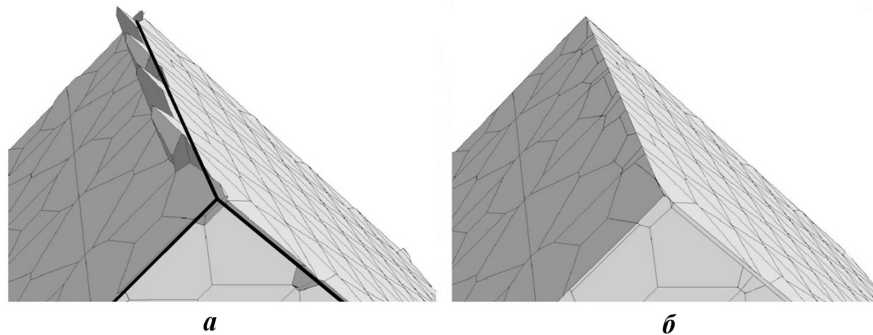


Рис. 11. Фрагменты построенной объемной сетки: *a* — без отсечений на линиях излома; *б* — после отсечений на линиях излома

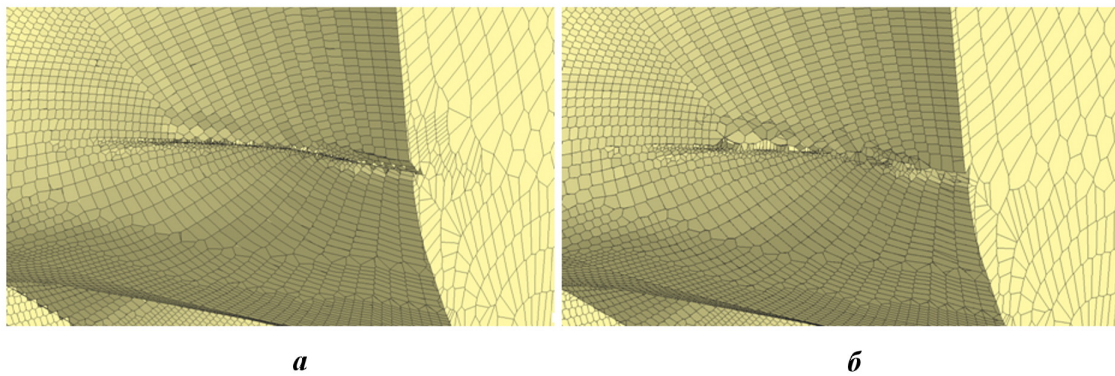


Рис. 12. Фрагменты поверхностей построенных сеток: *a* — без обработки щели; *б* — с обработкой щели

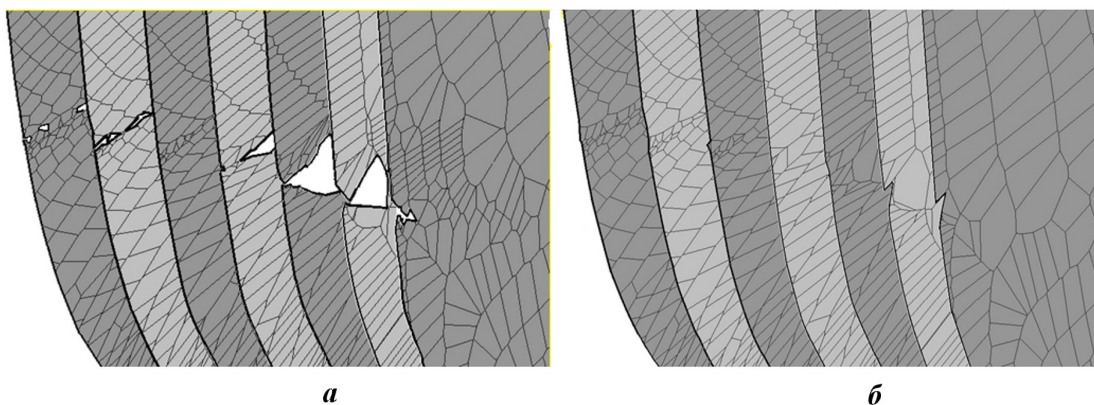


Рис. 13. Серия сечений для фрагментов построенных сеток: *a* — без обработки щели; *б* — с обработкой щели

ки щели,  $\varepsilon_{W_1} = 0,0526\%$ ; для сетки на рис. 12, *б* и 13, *б*, построенной с обработкой щели,  $\varepsilon_{W_2} = 0,0052\%$ .

### Удаление внешнего слоя ячеек

После построения сетки на основе диаграммы Вороного внешние ячейки из сетки удаляются, также удаляются грани и узлы, которые образованы только внешними ячейками.

Полученная в результате удаления внешнего слоя ячеек сетка уже хорошо описывает геометрию, однако может обладать негладкой границей.

### Корректировка границы объемной сетки

В полученной сетке может возникать *ступенчатость границы* — дефект сетки, заключающийся в чередовании относительно крупных и мелких граней на поверхности с углом между векторами нормалей к граням, близким к  $90^\circ$ .

Для устранения этого дефекта граница полученной сетки корректируется путем трансформации малых граней в узел, ребро или совокупность ребер в зависимости от формы грани. На рис. 14 показан фрагмент границы объемной сетки до и после удаления мелких граней. Трансформируемые грани выделены темным цветом.

### Пример изменения формы граничных ячеек

В процессе построения и преобразования объемной сетки происходит неоднократное ее изменение: сначала выполняется построение сетки в выпуклой области, затем проводятся отсечения ячеек у линий излома, отбрасывается внешний слой ячеек и выполняется корректировка границы сетки. В результате таких преобразований форма ячеек на границе также может сильно изменяться.

Пример изменения формы ячейки на границе сетки продемонстрирован на рис. 15. Фраг-

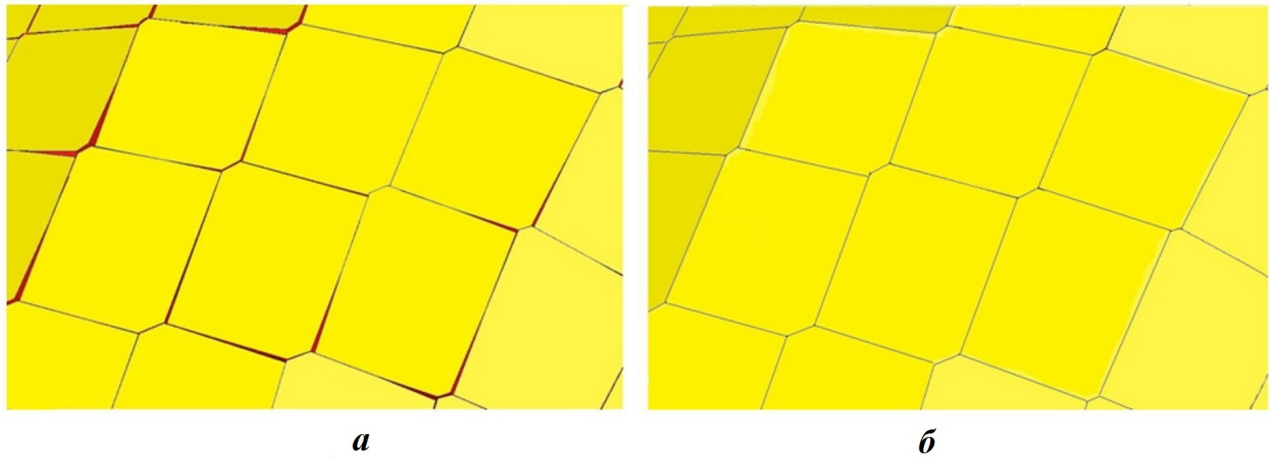


Рис. 14. Фрагмент сетки в процессе корректировки границ: *a* — до удаления мелких граней; *б* — после удаления мелких граней

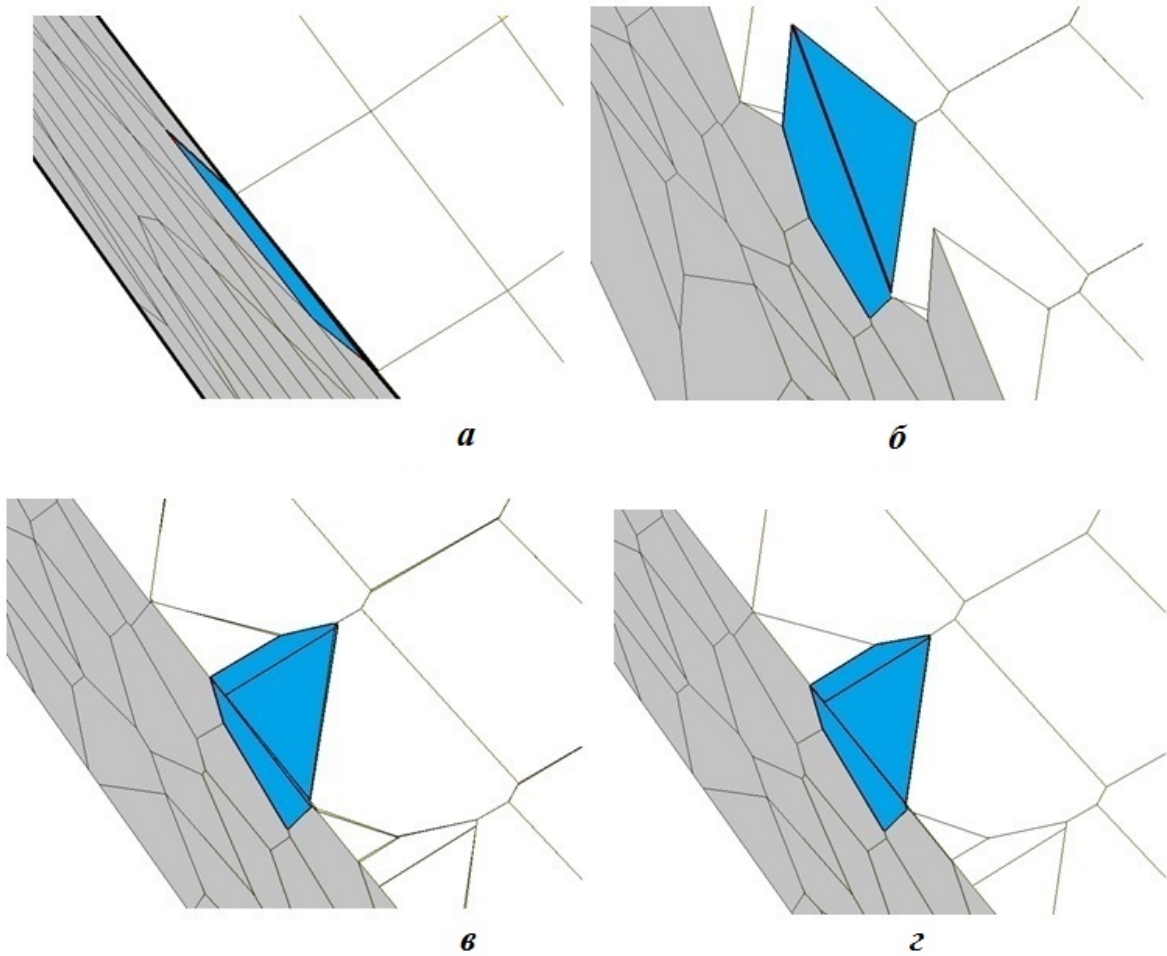


Рис. 15. Процесс преобразования фрагмента сетки у границы: *a* — исходная поверхностная сетка; *б* — объемная сетка без преобразований; *в* — объемная сетка после отсечений на изломах; *г* — объемная сетка после корректировки границы

мент исходной поверхностной сетки показан на рис. 15, *а*. Рассмотрим ячейку, построенную для выделенной на рис. 15, *а* материнской грани. На рис. 15, *б* показаны ячейки, построенные от основных центров. Для рассматриваемой грани построена выделенная на рис. 15, *б* ячейка из 8 граней. Вид этого же фрагмента сетки после отсечений ячеек у линии излома и удаления слоя внешних ячеек показан на рис. 15, *в*. Рассматриваемая ячейка теперь состоит из 11 граней. Окончательный вид фрагмента сетки после удаления мелких граней и ребер — на рис. 15, *г*. После последнего этапа рассматриваемая ячейка состоит из 9 граней.

### Примеры построения трехмерных сеток на основе диаграммы Вороного для невыпуклых областей

**Построение сетки для поршня.** Габаритные размеры поршня  $254 \times 255 \times 254$  (рис. 16, *а*). Исходная поверхностная сетка состоит из 2 200 треугольных и четырехугольных граней. Сетка имеет большое число изломов.

Изначально было задано  $\Delta = 2,00$ . Исходя из этого значения, был определен параметр  $\delta = 1,41$ . Для построения трехмерной сетки использовалось распределение внутренних центров тел Вороного  $25 \times 25 \times 50$ .

Общее число ячеек построенной сетки 7 407 (рис. 16, *б*). Время построения сетки составило 10,5 с. Дисбаланс объема, вычисленный по формуле (5), составил  $\varepsilon_W = 3,19 \cdot 10^{-4} \%$ .

**Построение сетки для составной конструкции.** Габаритные размеры конструкции  $0,78 \times 0,50 \times 0,50$  (рис. 17, *а*). Исходная поверхностная сетка состоит из 34 440 четырехугольных граней.

Заданное начальное значение  $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$  удовлетворяло условиям построения сетки, поэтому  $\delta = \Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ . Для построения сетки использовалось распределение внутренних центров тел Вороного  $100 \times 70 \times 140$ .

Построенная объемная сетка (рис. 17, *б*) состоит из 327 976 ячеек. Ее фрагмент показан на рис. 17, *в*. Общее время построения составило 413 с. Дисбаланс объема  $\varepsilon_W = 2,94 \cdot 10^{-3} \%$ .

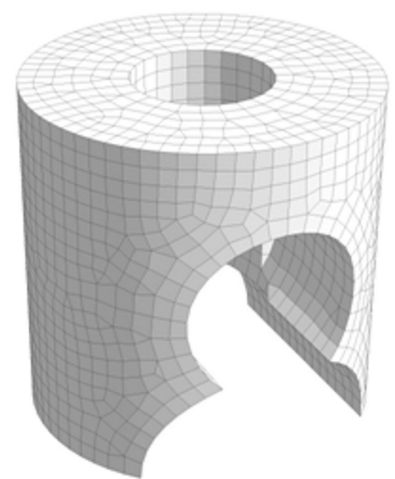
**Построение сетки в деформированной области.** Габаритные размеры деформированной области  $19,77 \times 19,98 \times 10,6$ . Поверхностная

сетка для области (рис. 18, *а*) состоит из 27 412 четырехугольных граней.

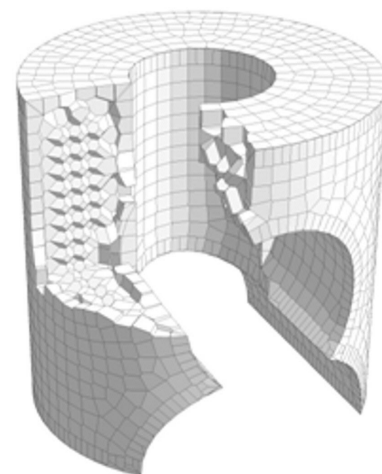
Сначала было выполнено преобразование поверхностной сетки: дробление вытянутых граней (127 граней) и триангуляция неплоских граней (240 граней). Преобразованная поверхностная сетка состояла из 28 259 граней.

Исходя из заданного начального значения  $\Delta = 5,0 \cdot 10^{-2}$  был определен параметр  $\delta = 9,657 \cdot 10^{-3}$ . Для построения сетки использовалось распределение внутренних центров тел Вороного  $100 \times 100 \times 110$ .

Общее число ячеек построенной сетки составило 227 521. Пример фрагмента построенной



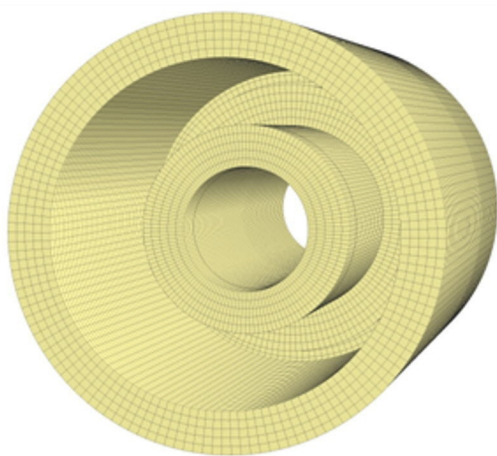
*а*



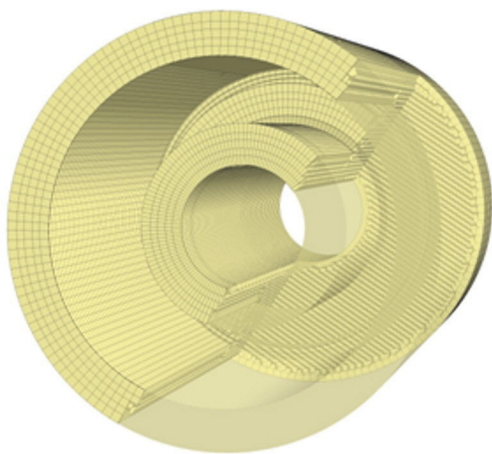
*б*

Рис. 16. Построение объемной сетки для поршня: *а* — исходная поверхностная сетка; *б* — фрагмент полученной сетки на основе диаграммы Вороного

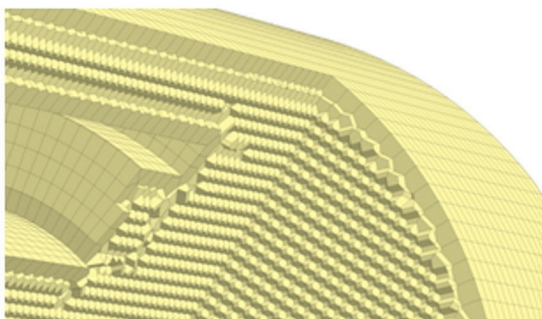




*a*



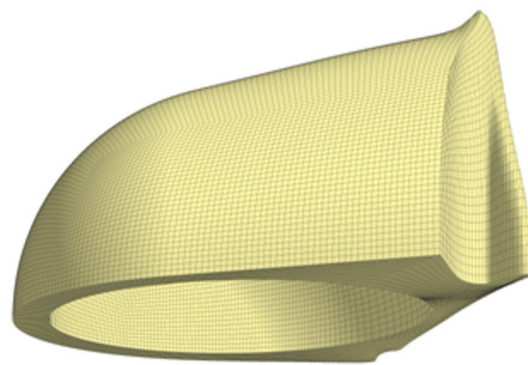
*б*



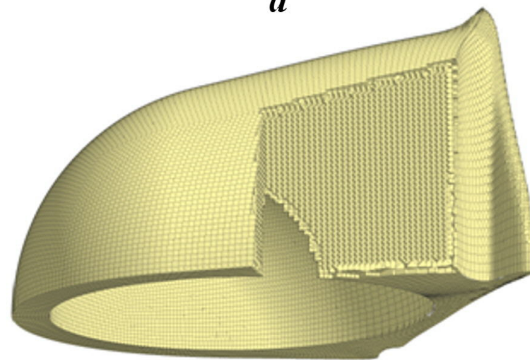
*в*

Рис. 17. Построение объемной сетки для составной конструкции: *a* — исходная поверхностная сетка; *б* — фрагмент полученной сетки на основе диаграммы Вороного; *в* — увеличенный фрагмент объемной сетки вблизи границы

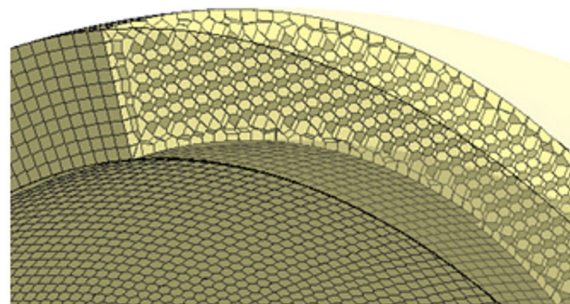
сетки показан на рис. 18, *б*, на рис. 18, *в* — увеличенный фрагмент этой сетки вблизи границы.



*a*



*б*



*в*

Рис. 18. Построение объемной сетки для деформированной области: *a* — исходная поверхностная сетка; *б* — фрагмент полученной сетки на основе диаграммы Вороного; *в* — увеличенный фрагмент объемной сетки вблизи границы

Общее время построения сетки составило 351 с. Дисбаланс объема  $\varepsilon_W = 7,93 \cdot 10^{-4} \%$ .

### Заключение

Описан метод построения трехмерных неструктурированных сеток на основе диаграммы Вороного в области, задаваемой произвольной замкнутой поверхностной сеткой,

который позволяет получать сетки для широкого набора сложных трехмерных геометрий. Особенностью метода является учет невыпуклости начальной геометрии за счет специальной расстановки центров ячеек диаграммы Вороного вблизи исходной поверхности, учета линий излома и дефектов поверхностной сетки в виде щелей. Метод успешно применяется при построении многогранных сеток в методике ТИМ.

### Список литературы

1. Соколов С. С., Панов А. И., Воронинов А. А., Новиков И. Г., Соболев И. В., Ялозо А. В. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
2. Соколов С. С., Воронинов А. А., Новиков И. Г., Панов А. И., Соболев И. В., Пушкарёв А. А. Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах // Там же. 2006. Вып. 4. С. 29–43.
3. Воронинов А. А., Соколов С. С. Алгоритмы построения нерегулярной многогранной сетки для методики ТИМ // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2010. Вып. 15. С. 98–113.
4. Фархутдинов В. Ф., Тарасов В. И., Соловьёв А. Н., Борисенко О. Н., Лазарев В. В., Логинов Д. В., Аверина Н. С., Марунин А. В., Гриднев А. И., Федякина М. Г., Кузнецов М. Г., Черенкова М. В., Фролова Е. А., Лукичев А. Н., Смолкина Д. Н., Купалова А. Г., Кузьменко М. В., Ховрин Н. А., Сергеева А. С., Попова Н. В., Баканова Т. Ю. Обзор возможностей по обработке геометрических и построению сеточных моделей в ЛОГОС.Препост // Тр. XIV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2013. С. 585–592.
5. Воронинов А. А., Соколов С. С., Панов А. И. Методика построения многогранной листовой сетки на основе многоугольной нерегулярной сетки // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 4. С. 46–52.
6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
7. Jie Y., Fu X., Lin Y. Mesh generation for FEM based on centroidal Voronoi tessellation // Mathematics and Computers in Simulation. 2014. Vol. 97. P. 68–79.
8. Kobayashi M., Maekawa H., Kondou Y. Automatic discretization of a three-dimensional domain into Voronoi polyhedron elements // JSME Int. J. 1992. Vol. 35, No 3. P. 337–345.
9. Okape A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. Spatial Tessellation: Concept and Applications of Voronoi Diagrams. Chichester, West Sussex, England: John Wiley & Sons, 1999.
10. Recroft C. Voro++: A Three-Dimensional Voronoi Cell Library in C++. <http://www.math.lbl.gov/voro++>.
11. Гордеев Э. Н. Диаграмма Вороного: обзор // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 41–67.
12. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.
13. Шмелёва А. К., Воронинов А. А., Шурьгин А. В., Новиков И. Г. Алгоритм ускорения поиска геометрической близости точек для построения неструктурированных сеток // Вестник Саровского физтеха. 2011. № 17. С. 37–43.
14. Воронинов А. А. Методы решения задач газодинамики на неструктурированных сетках. Курс лекций в 3 частях. Ч. 1. Алгоритмы построения начальных сеток. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2012.
15. Du Q., Gunzburger M. Grid generation and optimization based on centroidal Voronoi tessellations // Appl. Math. and Comp. 2002. Vol. 133. P. 591–607.
16. Ohya T., Iri M., Murota K. Improvements of the incremental methods for the Voronoi diagram with computational comparison of various algorithms // Journal of Operations Research Society of Japan. 1984. Vol. 27. P. 306–336.



17. *Соболев И. В., Шурыгин А. В.* Сшивание многогранных неструктурированных сеток в методике ТИМ-3D // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2015. Вып. 3. С. 35–45.
  18. *Воропинов А. А.* Некоторые форматы данных для представления двумерных неструктурированных сеток произвольного вида // Там же. 2010. Вып. 4. С. 52–63.
  19. *Шмелёва А. К., Воропинов А. А.* Алгоритмы построения трехмерных неструктурированных сеток на основе поверхностной сетки для методики ТИМ // Тез. XVI Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2016. С. 133–134.
  20. *Воропинов А. А., Соколов С. С., Панов А. И., Новиков И. Г.* Формат для описания нерегулярной многогранной сетки произвольной структуры в методике ТИМ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 3–4. С. 55–63.
- Статья поступила в редакцию 04.08.17.

BUILDING A 3D GRID BASED ON THE VORONOI DIAGRAM IN NONCONVEX REGIONS / A. A. Voropinov, S. S. Sokolov, A. K. Shmelyova (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper describes an approach to building a 3D unstructured grid based on the Voronoi diagram with a special arrangement of the grid cell centers near the original surface grid followed by removal of the outer layer of cells. Such approach to the arrangement of centers allows constructing grids in nonconvex regions. Algorithms are implemented in the TIM code.

*Keywords:* TIM code, an unstructured grid, 3D Voronoi diagram, a grid based on the 3D Voronoi diagram, initial data calculation, a surface grid.

---