

УДК 517.958:536.2

ЧИСЛЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Шестаков

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

При численном моделировании задач переноса теплового излучения возникают эффекты, не связанные с физикой описываемых процессов и мешающие их правильному пониманию. В первую очередь это сеточные эффекты, связанные с дискретизацией рассматриваемого пространства разностной сеткой, которые при использовании устойчивых и сходящихся разностных схем исчезают при уменьшении размеров ячеек дискретной сетки. Однако к погрешностям решений могут приводить и другие численные особенности моделирования, которые слабо или совсем не зависят от разностной сетки и чаще всего не исчезают при уменьшении размеров ячеек. В работе приводится описание некоторых численных эффектов для задач переноса теплового излучения.

Ключевые слова: перенос излучения, численное моделирование.

Введение

При численном моделировании задач переноса теплового излучения возникают эффекты, не связанные с физикой описываемых процессов и мешающие их правильному пониманию. Самыми распространенными являются сеточные эффекты, связанные с дискретизацией рассматриваемого пространства разностной сеткой. В работе [1] приведено 10 сеточных эффектов, возникающих в задачах радиационной газовой динамики (РГД). Сеточные эффекты при использовании устойчивых и сходящихся разностных схем исчезают при уменьшении размеров ячеек дискретной сетки.

К погрешностям решений могут приводить не только сеточные эффекты, но и другие численные особенности моделирования, которые слабо или совсем не зависят от разностной сетки и чаще всего не исчезают при уменьшении размеров ячеек. К ним можно отнести:

- 1) эффект гибридных схем, который возникает из-за переключения с одной схемы на другую;
- 2) эффект нефизического отрыва температур, возникающий из-за расщепления системы РГД;
- 3) итерационный эффект из-за несходимости итераций;
- 4) эффект обменных граничных условий, возникающий из-за неустойчивости граничных условий при раздельном счете по областям.

При численном моделировании сеточные и несеточные эффекты могут проявляться одновременно или в разных сочетаниях друг с другом. Их анализ важен для поиска способов их устранения.

Эффект гибридных схем

Эффект гибридных схем возникает из-за переключения с одной схемы на другую. В частности, DS_n -метод решения уравнения переноса использует переключение с DD-схемы на St-схему. Шаговая St-схема имеет первый порядок аппроксимации, монотонна и положительна. Алмазная DD-схема имеет второй порядок аппроксимации, но немонотонна и неположительна. Если при отрицательном

решении в DD-схеме переходить на St-схему, то получим DD/St-схему. Тем не менее осцилляции в положительной области решения DD/St-схемы остаются, точность решения при переключении падает до первого порядка. Переключения также вызывают возникновение немонотонности потоков в центрах разностных ячеек [2].

Для улучшения монотонных свойств схемы DD в работе [3] была предложена схема DDAD, которая позволяет, оставаясь в рамках двухточечного и простого для реализации DS_n -метода, снять антидиссипацию путем ее вычитания из остаточного члена.

В схеме DDAD при получении отрицательного решения или в ячейках с двумя неосвещенными противоположными гранями приходится также осуществлять переход на St-схему первого порядка. Эта гибридная схема названа DDAD/St. Для повышения точности в схеме DDAD/St для ячеек с двумя неосвещенными противоположными гранями было предложено использовать TVD-реконструкцию, которая проще и экономичнее схемы с расширенным шаблоном. Новая схема получила название DDAD-TVD. TVD-реконструкция в схеме DDAD-TVD также используется для интерполяции источника из центров на грани ячеек. В новой схеме при появлении отрицательных интенсивностей излучения переход на положительную схему происходит более гладко, чем в схеме DDAD/St, так как вместо схемы первого порядка используется схема повышенного порядка аппроксимации. Это также приводит к более плавному переходу решения на итерациях и делает схему DDAD-TVD предпочтительнее еще и по числу итераций.

В данном разделе приводятся результаты расчетов тестовой задачи для осесимметричной области $0 < r < 1$ см, $0 < z < 3$ см в кинетическом приближении. На левой границе области ($z = 0$) задана интенсивность, определяемая по Планку с единичной температурой; на верхней ($r = 1$ см) и правой ($z = 3$ см) границах — условие *свободной поверхности*. На оси симметрии заданы условия отражения. Уравнение состояния — $E = 0,81T$. Пробег вычислен по формуле $l = 0,2T^3$. В пространстве направлений взята квадратура ES_8 . Задача считалась до выхода на стационарный режим.

На рис. 1, 2 на разностную сетку нанесены распределения и изолинии температуры вещества, полученные по схемам DDAD/St и DDAD-TVD на конечный момент времени. Слева направо приведено 8 изолиний с шагом 0,1 кэВ по температуре: $T = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2$ кэВ. Из рисунков видно, что обе схемы дают близкие друг другу равномерные распределения температур в пространстве, хотя около правого верхнего угла проявляется некоторая негладкость изолиний.

Несмотря на то, что схема DDAD/St дает монотонное распределение изолиний температур по пространству на каждом шаге, она может давать немонотонную зависимость температуры от времени в отдельных точках.

На рис. 3 приведены графики зависимости температуры вещества от времени в одной из точек у правой границы системы, полученные по схемам DDAD/St и DDAD-TVD. Видно, что схема DDAD/St, в отличие от схемы DDAD-TVD, дает немонотонную зависимость температуры вещества от времени. Эта немонотонность приводит к занижению температуры и потока в отдельных

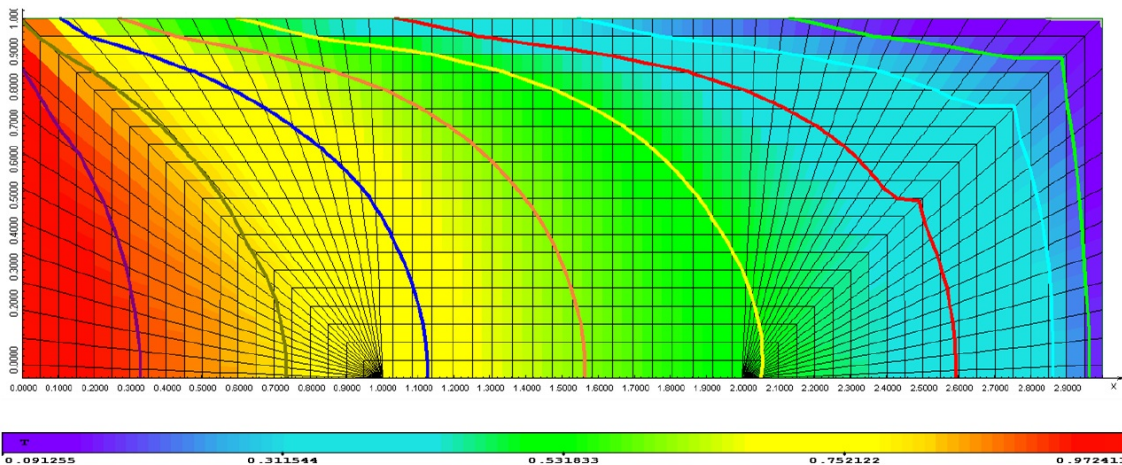


Рис. 1. Распределение температуры вещества по схеме DDAD-TVD

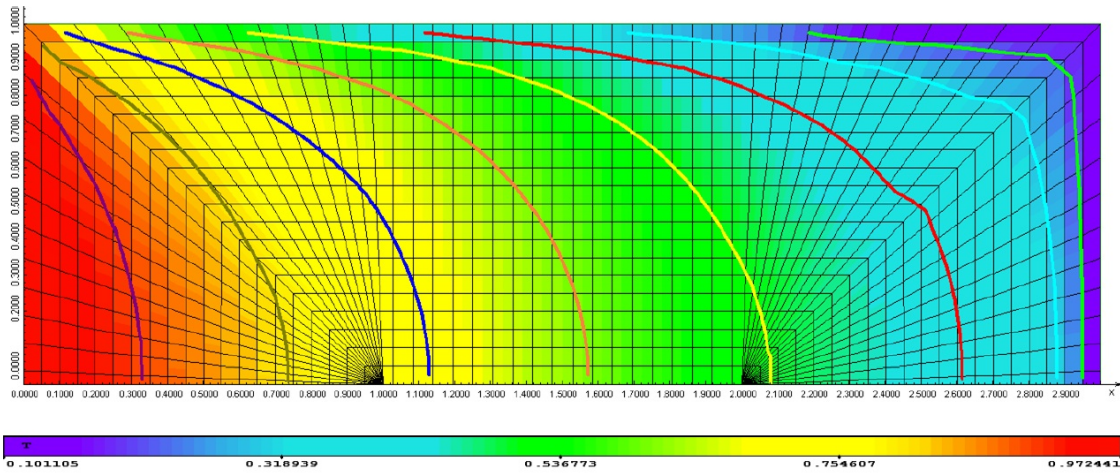


Рис. 2. Распределение температуры вещества по схеме DDAD/St

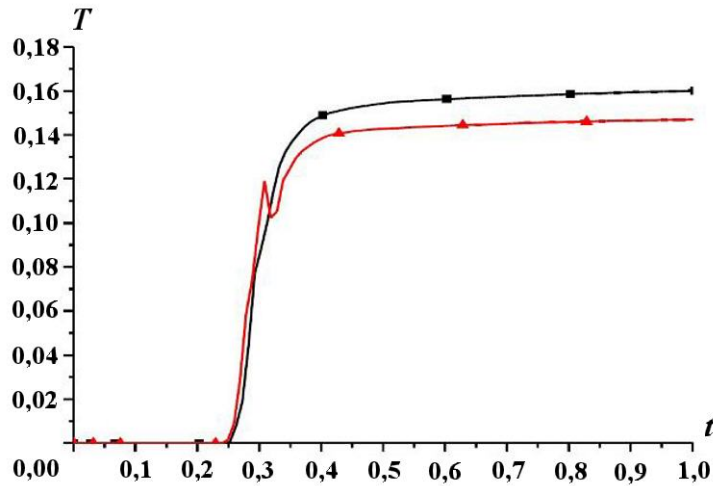


Рис. 3. Зависимости температуры от времени в точке $r = 0,5$ см, $z = 2,97$ см: —■— — схема DDAD-TVD; —▲— — схема DDAD/St

точках до 10% при выходе на стационарный режим. Немонотонность связана в первую очередь с переходами в схеме DDAD/St на схему первого порядка в областях отрицательного решения и на неосвещенных гранях для ячеек с двумя неосвещенными противоположными гранями. Монотонность схемы DDAD-TVD усиливается за счет TVD-реконструкции источника на гранях ячейки.

Эффект нефизического отрыва температур

Эффект отрыва температур как физическое явление возникает в прозрачных средах, когда температура вещества начинает отличаться от температуры излучения. Но бывают задачи, когда отрыв усиливается по причине математического характера из-за расщепления системы РГД, и это может приводить к нефизическому росту температуры вещества по сравнению с температурой фотонов.

Рассмотрим уравнения РГД в лагранжевой системе координат, например, из работ [4, 5]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0; \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla;$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla(p + p_{\text{изл}}) &= 0; & p_{\text{изл}} &= \frac{U}{3c} = \frac{\sigma T_f^4}{3}; \\ \rho \frac{dE}{dt} + (p + p_{\text{изл}}) \operatorname{div}(\vec{u}) &= Q + Q_I; & Q_I &= \int_0^\infty \int_\Omega \alpha_{c\nu} \left(I_\nu - \frac{1}{4\pi} B_\nu \right) d\nu d\Omega; \\ \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{I_\nu}{\rho} \right) + \operatorname{div}(\vec{\Omega} I_\nu) + \alpha_\nu I_\nu &= \frac{1}{4\pi} \alpha_{c\nu} B_\nu + \frac{1}{4\pi} \alpha_s U_\nu.\end{aligned}$$

Здесь t — время; c — скорость света; ρ — плотность вещества; ν — частота; \vec{u} — скорость; $p_{\text{изл}}$, p — давление излучения и вещества; $\vec{\Omega}$ — направление полета фотонов; I_ν — интенсивность излучения; $U_\nu = \int I_\nu d\vec{\Omega}$ — плотность излучения, умноженная на скорость света c ; B_ν — функция Планка; $U = \int_0^\infty \int_\Omega I_\nu d\nu d\vec{\Omega}$; $T_f = \sqrt[4]{\frac{U}{c\sigma}}$ — температура фотонов, где σ — константа; $\alpha_{c\nu}$ — коэффициент поглощения; α_s — коэффициент рассеяния; $\alpha_\nu = \alpha_{c\nu} + \alpha_s$ — коэффициент ослабления; $E(T)$ — удельная внутренняя энергия вещества, где T — температура вещества; Q — внешний источник энергии.

Уравнение для полной энергии имеет вид

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div} \left((p + p_{\text{изл}}) \vec{u} + \vec{S} \right) = Q,$$

где

$$\varepsilon = E + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + \frac{U}{c\rho}; \quad \vec{S} = \int_0^\infty \int_\Omega \vec{\Omega} I_\nu d\nu d\vec{\Omega}.$$

При численном решении задач РГД для упрощения вычислений применяют расщепление по физическим процессам. Для системы РГД учет работы сил давления излучения в уравнении энергии можно проводить как на этапе газовой динамики, так и на этапе переноса. Уравнение сохранения полной энергии в обоих случаях выполняется.

В первом случае на этапе газовой динамики уравнение для внутренней энергии имеет вид

$$\rho \frac{dE}{dt} + (p + p_{\text{изл}}) \operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

а на этапе переноса решается уравнение вида (рассмотрено *серое приближение*)

$$\frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{\rho} \right) + \operatorname{div}(\vec{\Omega} I) + \alpha I = \frac{1}{4\pi} \alpha_c B + \frac{1}{4\pi} \alpha_s U.$$

В этой модели работа сил давления излучения описывается на этапе газовой динамики членом $p_{\text{изл}} \operatorname{div}(\vec{u})$.

В оптически прозрачных средах взаимодействие излучения с веществом незначительно и могут возникать ситуации, при которых температура и давление фотонов существенно больше, чем температура и давление вещества. В этом случае определяющую роль в уравнении энергии на этапе газовой динамики играет давление излучения, которое может приводить к нефизическому росту энергии и температуры вещества. Такого эффекта можно избежать, если учет давления излучения проводить на этапе переноса. При этом на этапе газовой динамики уравнение для внутренней энергии имеет вид

$$\rho \frac{dE}{dt} + p \operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

а на этапе переноса решается уравнение вида

$$\frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{\rho} \right) + \operatorname{div}(\vec{\Omega} I) + \alpha I = \frac{1}{4\pi} \alpha_c B + \frac{1}{4\pi} \alpha_s U - \frac{p_{\text{изл}}}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{u}).$$

Во второй модели работа сил давления излучения описывается на этапе переноса членом $\frac{p_{\text{изл}}}{4\pi} \text{div}(\vec{u})$. Недостатком этой модели является то, что при больших дивергенциях скоростей $\text{div}(\vec{u}) \gg 1$ в правой части уравнения переноса возникает отрицательный источник. Это может привести к отрицательности всей правой части в уравнении переноса при вычислении интенсивности. Правда, такая ситуация может иметь место в отдельных точках разностной сетки и при этом не влиять на общую картину распространения излучения. Но если это происходит в достаточно большой области, то могут возникать осцилляции по плотности и температуре излучения.

В качестве примера приведем отрыв температур, возникающий при выходе излучения из плотной среды в воздух, по обеим моделям расщепления. На рис. 4, 5 показаны профили температуры и плотности вещества при прохождении тепловой волны через контактную границу.

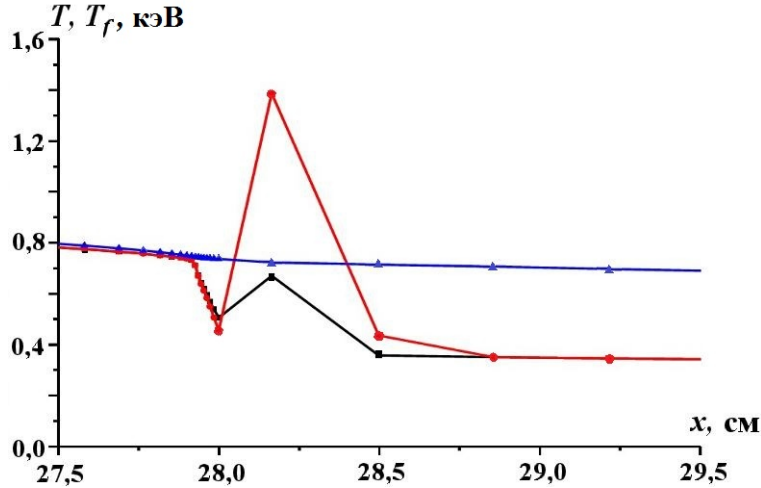


Рис. 4. Температуры фотонов T_f и вещества T : —▲— — T_f по моделям 1 и 2; —●— — T по модели 1; —■— — T по модели 2

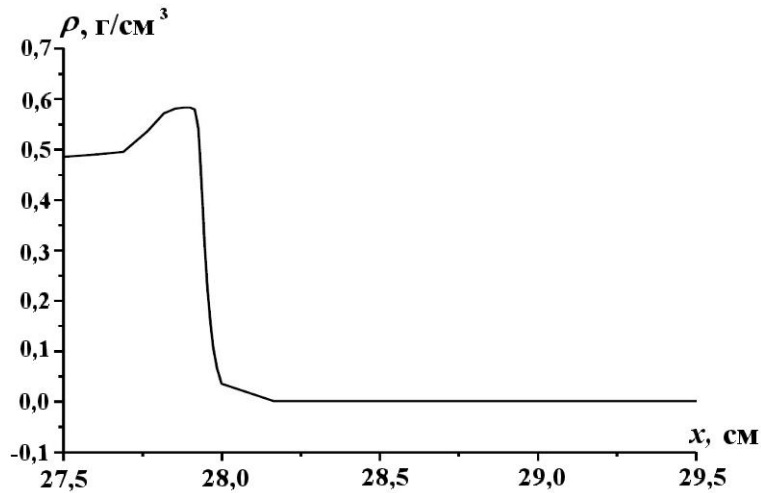


Рис. 5. Плотность вещества (при $x < 28$ см $\rho \sim 0,5$ г/см³; при $x > 28$ см $\rho \sim 0,0013$ г/см³)

Итерационный эффект

Итерационный эффект возникает из-за несходимости итераций при решении уравнений переноса излучения и может приводить к появлению осцилляций.

В задачах переноса излучения применяют одновременно несколько итерационных методов:

- 1) по нелинейности коэффициентов поглощения и теплопроводности. Чаще всего применяют простую итерацию или метод Ньютона;
- 2) по нелинейности внутренней энергии вещества и функции Планка. Обычно применяют метод Ньютона;
- 3) для решения совместной системы линейных уравнений переноса излучения и уравнения энергии. Применяют множество различных методов, например метод [6], методы ВДЭ [7, 8], КМ [9], ВДМ [10], ВДЭПФ [11], RDSA [12], P_1SA [13, 14] и др.;
- 4) при расщеплении двумерной или трехмерной системы линейных уравнений переноса излучения в P_1 -, $P_{1/3}$ -, диффузионном приближениях и приближении лучистой теплопроводности на регулярных сетках.

Метод простой итерации является простейшим итерационным методом, однако в оптически плотных средах он сходится очень медленно [15].

Достоинством метода Ньютона является квадратичная скорость сходимости итераций, но он предъявляет наиболее жесткие требования к виду исследуемых функций. Метод Ньютона зависит от начального приближения и в общем случае может расходиться. Современная интерпретация этого метода в иностранной литературе называется методом Ньютона—Рафсона. Иногда методом Ньютона—Рафсона называют улучшенный метод Ньютона, который не зависит от начального приближения за счет выбора оптимального шага итерации. Одним из обобщений метода Ньютона, слабо зависящим от начального приближения, является метод вариационно-взвешенных квадратических мажорант [16], который применяется для минимизации слабо выпуклых функций.

В российской литературе классический метод Ньютона иногда называют методом Ньютона—Канторовича. Из теоремы Л. В. Канторовича, доказавшего квадратичную сходимость метода Ньютона, следует, что метод сходится при четырех условиях:

- 1) функция должна быть ограничена;
- 2) функция должна быть гладкой, дважды дифференцируемой;
- 3) первая производная функции равномерно удалена от нуля, т. е. либо везде положительна, либо везде отрицательна;
- 4) вторая производная функции должна быть равномерно ограничена.

Если эти условия проверять на каждой итерации в каждой ячейке разностной сетки, то пропадает выигрыш по времени от квадратичной скорости сходимости итераций. Поэтому условия применимости метода Ньютона—Канторовича не проверяются, а их нарушения видны только опосредованно, через искажение численного решения задачи.

Сходимость итерационных методов решения совместной системы линейных уравнений переноса излучения и уравнения энергии доказывается чаще всего в линейном случае для упрощенного вида внутренней энергии [7, 17, 18]. В общем случае сходимость этих методов не доказана.

Сходимость методов расщепления рассмотрена в работах [19—21]. В многомерных задачах сходимость методов расщепления может происходить из-за отрицательности правых частей расщепленных уравнений. Эффект исчезает при уменьшении шага по времени или переходе на более устойчивые методы расщепления.

Эффект обменных граничных условий

Эффект обменных граничных условий возникает из-за неустойчивости или нарушения условий непрерывности потока и температуры при передаче граничных условий в раздельном счете по областям.

При численном решении задач с большим объемом информации, который превышает возможности оперативной памяти ЭВМ, приходится разбивать расчетную область на подобласти или блоки. В связи с этим возникает задача конструирования обменных граничных условий для стыковки численных решений на границах блоков. Различные способы построения обменных граничных условий

могут накладывать дополнительные ограничения на условие устойчивости. Так, известные обменные граничные условия Загускина, Кондрашова [22] устойчивы при передаче из первого блока во второй температуры, а из второго в первый — потока только при $\frac{\chi_1}{h_1} > \frac{\chi_2}{h_2}$, $\chi_1 \geq \chi_2$, где χ_1, χ_2 — коэффициенты теплопроводности соответственно первого и второго блоков, h_1, h_2 — шаги пространственной сетки у границы соответствующих блоков. В газовой динамике от более "тяжелого" блока при $\rho_1 \geq \rho_2$ передается скорость, от более "легкого" — давление.

Безусловно устойчивыми обменными граничными условиями считаются граничные условия, записанные в виде комбинации потока и температуры $\alpha T + \beta S = \gamma$, где α, β, γ — параметры граничных условий, выбираемые из определенных критериев [23—25]. Недостатком граничных условий в виде комбинации является нарушение условий непрерывности потока и температуры на границе. Для непрерывности потоков и консервативности разностной аппроксимации можно при последовательном счете передавать в одну сторону поток, в другую — комбинацию [26], но при параллельном счете достоинство этого способа пропадает, так как поток берется с предыдущего шага. Как показывает практика расчетов, передача комбинаций также может приводить к неустойчивости, поэтому абсолютно устойчивых и консервативных обменных граничных условий до сих пор не найдено.

Более сложная ситуация возникает, когда в соседних блоках используются различные приближения уравнения переноса излучения. В этом случае строятся условия *сшивки* приближений, так как нет однозначных формул обменных граничных условий в общем случае.

В зависимости от типа приближения можно рассмотреть три вида блоков: Т, Р, К. В блоках Т используется приближение лучистой теплопроводности, в блоках К — кинетическое (К) [27], квазидиффузионное (КД) [28] или квазикинетическое (КП) [29, 30] приближение, в блоках Р — P_1 -, $P_{1/3}$ - или диффузионное приближение [31, 32]. Полные постановки задач в разных приближениях приведены в указанных работах.

В зависимости от типа приближения соседнего блока при передаче граничных условий возможны следующие варианты:

- из блока Т в блок Т передается поток, температура либо их комбинация;
- из блока К в блок Т передается односторонний поток;
- из блока Т в блок К передаются полный поток и температура;
- из блока К в блок К передается интенсивность;
- из блока Р в блок Р передается либо поток, либо комбинация потока и плотности;
- из блока Т в блок Р передаются полный поток и температура;
- из блока Р в блок Т передается односторонний поток;
- из блока К в блок Р передается односторонний поток;
- из блока Р в блок К передается плотность или комбинация потока и плотности.

Рассмотрим некоторые условия сшивки приближений более подробно.

Обменные граничные условия на границе блоков Т и К. Из К-блока с индексом II в Т-блок с индексом I передаем односторонний выходящий поток. Для этого полный поток через внутреннюю границу между блоками представим в виде суммы входящего и выходящего потоков:

$$\vec{S}\vec{n} = S^- + S^+,$$

где \vec{n} — внешняя нормаль; $S^- = \int_0^\infty d\nu \int_{\vec{\Omega}\vec{n}<0} \vec{\Omega}\vec{n}I_\nu d\vec{\Omega} \leq 0$ — входящий поток; $S^+ = \int_0^\infty d\nu \int_{\vec{\Omega}\vec{n}>0} \vec{\Omega}\vec{n}I_\nu d\vec{\Omega} \geq 0$ — выходящий поток.

Зависимость интенсивности излучения от известной температуры T на границе можно расписать по Планку: $I_\nu = B_\nu(T)/4\pi$. Тогда входящий поток равен $S^- = -\frac{c\sigma}{4}T^4$, $\int_0^\infty B_\nu d\nu = c\sigma T^4$, а полный поток на границе блока II равен $(\vec{S}\vec{n})_{II} = -\frac{c\sigma}{4}T_I^4 + S_{II}^+$.

Из условия равенства потоков на границе блоков с учетом разнонаправленности внешних нормалей $\vec{n}_I = -\vec{n}_{II}$ получаем $(\vec{S}\vec{n})_I = -(\vec{S}\vec{n})_{II} = \frac{c\sigma}{4}T_I^4 - S_{II}^+$. Отсюда следует граничное условие для блока Т: $\frac{c\sigma}{4}T_I^4 - (\vec{S}\vec{n})_I = S_{II}^+$.

Заметим, что если интенсивность излучения на границе представить в виде P_1 -разложения $I_\nu = \frac{1}{4\pi}U_\nu + \frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\vec{S}_\nu$ при $U_\nu = B_\nu(T)$, то входящий поток равен $S^- = -\frac{c\sigma}{4}T^4 + \frac{1}{2}\vec{S}\vec{n}$ и граничные условия для блока Т принимают вид $\frac{c\sigma}{4}T_1^4 - \frac{1}{2}(\vec{S}\vec{n})_I = S_{II}^+$.

В связи с тем, что граничные условия для блока Т надо брать в виде $\alpha T_1 - \beta(\vec{S}\vec{n})_I = \varphi$, где α, β, φ — неотрицательные граничные параметры, приходится линеаризовать T^4 и применять итерации на границе:

$$(T^4)^{k+1} = (T^4)^k + 4(T^3)^k(T^{k+1} - T^k),$$

где k — индекс итераций. В этом случае получаем граничные параметры вида $\alpha = c\sigma(T_1^k)^3$; $\varphi = S_{II}^+ + 0,75c\sigma(T_1^k)^4$; $\beta = 1$.

При сходимости итераций такой способ передачи граничных условий является устойчивым, но применение линеаризации при нарушении условий сходимости итераций может сказываться на точности и устойчивости решения.

Обратно из Т-блока в К-блок передача граничных условий может выполняться двумя способами:

- 1) по заданной температуре T ;
- 2) по заданному потоку Q .

В первом способе по граничной температуре T формируем интенсивность, расписанную по Планку: $I_\nu = B_\nu(T)/4\pi$. При дискретизации в граничных условиях можно использовать нормировку по углу с коэффициентом $\tilde{\pi} = \frac{\pi}{\sum_{\vec{\Omega}} \vec{\Omega}\vec{n}\Delta\Omega}$ и спектру с коэффициентом $b(T) = \frac{c\sigma T^4}{\sum_{\nu} B_\nu\Delta\nu}$:

$$I_\nu = \frac{B_\nu(T)}{4\pi}\tilde{\pi}b(T) \quad \text{для} \quad \vec{\Omega}\vec{n} < 0.$$

Нормировка гарантирует на границе выполнение условия

$$\sum_{\nu} \left(\sum_{\vec{\Omega}} I_\nu \Delta\Omega \right) \Delta\nu = \int_0^\infty d\nu \int_{\vec{\Omega}} I_\nu d\vec{\Omega} = c\sigma T^4.$$

Достоинством этого способа является простота и безытерационность по граничным условиям, недостатком — невыполнение условия непрерывности потока.

Во втором способе интенсивность излучения задается через функцию Планка от эффективной температуры $T_{\text{эф}}$:

$$I_\nu^k = \frac{B_\nu(T_{\text{эф}}^k)}{4\pi}\tilde{\pi}b(T_{\text{эф}}^k) \quad \text{для} \quad \vec{\Omega}\vec{n} < 0,$$

где k — итерационный индекс по граничным условиям; $T_{\text{эф}}^k = \sqrt[4]{\frac{4}{c\sigma} \left((S^+)^k - Q \right)}$ — эффективная температура на границе блоков; S^+ — выходящий поток из К-блока.

Для такого граничного условия при сходимости итераций выполняется непрерывность потока $Q = (S^+)^k + (S^-)^k = (S^+)^k - \frac{c\sigma}{4} \left(T_{\text{эф}}^k \right)^4$, но введение итераций увеличивает время счета.

Обменные граничные условия на границе блоков Р. Из Р-блока II в Р-блок I передается либо полный поток $(\vec{S}_\nu\vec{n})_I = -(\vec{S}_\nu\vec{n})_{II}$, либо односторонний поток $(S_\nu^-)_I = -(S_\nu^+)_{II}$, т. е. входящий в блок I односторонний поток вдоль внешней нормали \vec{n}_I равен выходящему из блока II одностороннему потоку вдоль внешней нормали $\vec{n}_{II} = -\vec{n}_I$.

Односторонний выходящий поток из блока II равен

$$S_{II}^+ = \int_{\vec{\Omega}\vec{n}>0} (\vec{\Omega}\vec{n}I)_{II} d\vec{\Omega} = \int_{\vec{\Omega}\vec{n}>0} \vec{\Omega}\vec{n}_{II} \left(\frac{1}{4\pi}U + \frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\vec{S} \right)_{II} d\vec{\Omega} = \left(\frac{1}{4}U + \frac{1}{2}\vec{S}\vec{n} \right)_{II} \geq 0.$$

Односторонний входящий поток в блоке I равен

$$S_I^- = \int_{\vec{\Omega}\vec{n}<0} \left(\vec{\Omega}\vec{n}I \right)_I d\vec{\Omega} = \int_{\vec{\Omega}\vec{n}<0} \vec{\Omega}\vec{n}_I \left(\frac{1}{4\pi}U + \frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\vec{S} \right)_I d\vec{\Omega} = \left(-\frac{1}{4}U + \frac{1}{2}\vec{S}\vec{n} \right)_I \leq 0.$$

Тогда граничное условие $(S_\nu^-)_I = -(S_\nu^+)_{II}$ можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{4}U_\nu - \frac{1}{2}\vec{S}_\nu\vec{n} \right)_I = \left(\frac{1}{4}U_\nu + \frac{1}{2}\vec{S}_\nu\vec{n} \right)_{II} \geq 0.$$

Обменные граничные условия на границе блоков T и P. Из P-блока с индексом II в T-блок с индексом I передаем односторонний выходящий поток в виде комбинации

$$\frac{c\sigma}{4}T_I^4 - \frac{1}{2}(\vec{S}\vec{n})_I = \left(\frac{1}{4} \sum_\nu U_\nu \Delta\nu + \frac{1}{2} \sum_\nu (\vec{S}_\nu\vec{n}) \Delta\nu \right)_{II} \geq 0.$$

Если при разностной аппроксимации в P_{1-} , $P_{1/3-}$ или диффузионном приближении не выполняется условие $\sum_\nu U_\nu \Delta\nu \geq 2 \sum_\nu \left| \vec{S}_\nu\vec{n} \right| \Delta\nu$, то возможна неустойчивость граничных условий. При этом в T-блоке для получения граничных условий вида $\alpha T_I - \beta(\vec{S}\vec{n})_I = \varphi$ приходится применять итерации из-за линеаризации T^4 .

Обратно из T-блока в P-блок передача граничных условий может выполняться двумя способами:

- 1) по температуре T и потоку Q ;
- 2) по потоку Q при отсутствии T .

В первом способе формируется поток со спектральным распределением по Росселанду от граничной температуры T :

$$\vec{S}_\nu\vec{n} = \frac{1}{\alpha_\nu(T)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \left(\sum_\nu \frac{1}{\alpha_\nu(T)} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \Delta\nu \right)^{-1} Q.$$

Во втором способе формируется поток со спектральным распределением по Росселанду от эффективной температуры $T_{\text{эф}}$:

$$\vec{S}_\nu\vec{n} = \frac{1}{\alpha_\nu(T_{\text{эф}}^k)} \frac{\partial B_\nu(T_{\text{эф}}^k)}{\partial T} \left(\sum_\nu \frac{1}{\alpha_\nu(T_{\text{эф}}^k)} \frac{\partial B_\nu(T_{\text{эф}}^k)}{\partial T} \Delta\nu \right)^{-1} Q,$$

где k — итерационный индекс; $T_{\text{эф}}^k = \sqrt[4]{\frac{4}{c\sigma} \left((S^+)^k - Q \right)}$; $(S^+)^k = \frac{1}{4} \sum_\nu U_\nu^k \Delta\nu + \frac{1}{2} \sum_\nu (\vec{S}_\nu^k\vec{n}) \Delta\nu$.

В обоих способах выполняется условие непрерывности потока.

Обменные граничные условия на границе блоков K и P. Из K-блока II в P-блок I передается либо поток $(\vec{S}_\nu\vec{n})_I = -(\vec{S}_\nu\vec{n})_{II}$, либо односторонний поток $\left(\frac{1}{4}U_\nu - \frac{1}{2}\vec{S}_\nu\vec{n} \right)_I = (S_\nu^+)_{II} = \int_{\vec{\Omega}\vec{n}>0} \left(\vec{\Omega}\vec{n}I_\nu \right)_{II} d\vec{\Omega}$. Можно передавать также плотность излучения, но это граничное условие является менее эффективным.

Обратно из P-блока I в K-блок II передается полный поток, по которому формируется интенсивность от эффективной температуры $T_{\text{эф}}$: $(I_\nu)_{II} = \frac{1}{4\pi} B_\nu(T_{\text{эф}}^k)_I$ для $\vec{\Omega}\vec{n}_{II} < 0$, $T_{\text{эф}}^k =$

$$= \sqrt[4]{\frac{4}{c\sigma} \left[(S^+)_\Pi^k + (\vec{S}\vec{n})_I \right]}, \quad S^+ = \int_0^\infty d\nu \int_{\vec{\Omega}\vec{n}>0} \vec{\Omega}\vec{n} I_\nu d\vec{\Omega}.$$

При таком граничном условии полный поток равен $(\vec{S}\vec{n})_\Pi = S^- + S^+ = -(\vec{S}\vec{n})_I$, где $S^- = \int_0^\infty d\nu \int_{\vec{\Omega}\vec{n}<0} \vec{\Omega}\vec{n} I_\nu d\vec{\Omega} = -\frac{c\sigma T_{\text{эф}}^4}{4}$.

Интенсивность в К-блоке можно формировать безытерационно по плотности излучения $(I_\nu)_\Pi = \frac{1}{4\pi} (U_\nu)_I$ или по плотности и потоку $(I_\nu)_\Pi = \frac{1}{4\pi} (U_\nu)_I + \frac{3\vec{\Omega}}{4\pi} (\vec{S}_\nu)_I$, но эти граничные условия нарушают условие непрерывности полного потока.

Обменные граничные условия на границе блоков К. Из К-блока II в К-блок I передается интенсивность излучения для входящих направлений:

$$(I_\nu)_I = (I_\nu)_\Pi, \quad \vec{\Omega}\vec{n}_I < 0.$$

Хотя обменные граничные условия на границе КП- и КД-блоков формируются на основе граничных интенсивностей, при их формировании могут возникать особенности. Для примера рассмотрим обменные граничные условия на границе КД-блоков.

При стыковке КД-блоков граничные условия формируются на основе кинетических обменных условий, т. е. через интенсивности, но в КД-приближении можно рассматривать разные типы граничных условий.

Условия первого типа имеют вид

$$C^n U^{n+1} - (\vec{S}\vec{n})^{n+1} = C^n (U^+)^n, \quad C = \frac{S^+}{U^+}, \quad U^+ = \int_{\vec{\Omega}\vec{n}>0} I d\vec{\Omega}.$$

Достоинством этого способа является ограниченность коэффициента $0 \leq C \leq 1$. Недостаток — невыполнение P_1 -предела, т. е. в P_1 -приближении нет эквивалентности с граничными условиями Маршака—Владимирова, которые являются наилучшими для данного приближения.

Условия второго типа имеют вид

$$\frac{C^n}{4} U^{n+1} - \left(1 - \frac{C^n}{2}\right) (\vec{S}\vec{n})^{n+1} = -(S^-)^n, \quad C = \frac{S^+}{\frac{1}{4}U + \frac{1}{2}(\vec{S}\vec{n})}.$$

Достоинством этого способа является выполнение P_1 -предела, т. е. выполнение граничных условий $\frac{1}{4}U^{n+1} - \frac{1}{2}(\vec{S}\vec{n})^{n+1} = -(S^-)^n$ при $I = \frac{1}{4\pi}U + \frac{3}{4\pi}\vec{S}\vec{\Omega}$. Недостаток — ограниченность коэффициента C только при выполнении в кинетическом уравнении условия $S^+ \leq \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}(\vec{S}\vec{n})$ или $S^+ - S^- \leq \frac{1}{2}U$, что необходимо предусматривать при построении разностной аппроксимации. В работе [33] показано, что второй способ дает наилучшие по точности результаты.

Условия третьего типа имеют вид

$$C^n U^{n+1} - (\vec{S}\vec{n})^{n+1} = -(S^-)^n, \quad C = \frac{S^+}{U}.$$

Достоинством этого способа является безусловная ограниченность коэффициента: $0 \leq C \leq 1$.

Заключение

В данной работе описаны некоторые численные эффекты, возникающие при моделировании задач переноса теплового излучения. В результате показано:

1. При использовании схем с переключением необходимо учитывать эффект гибридных схем, который может приводить к возникновению немонотонности численного решения.

2. При расщеплении системы РГД сравниваются две модели, из которых рекомендуется применять вторую модель.
3. При использовании итерационных методов следует обращать внимание на эффект, возникающий из-за несходимости итераций и устраняющийся уменьшением временного шага.
4. При раздельном счете по областям необходимо применять только устойчивые граничные условия, иногда даже в ущерб консервативности.

Список литературы

1. Шестаков А. А. Сеточные эффекты при численном моделировании переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 4. С. 29–45.
2. Завьялов В. В., Шестаков А. А. О поведении потока для некоторых разностных схем решения задач теплового излучения в кинетическом приближении // Там же. 2008. Вып. 2. С. 21–30.
3. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Селезнёв В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А. DDAD-схема для численного решения уравнения переноса // Тез. докл. VII Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2003. С. 209.
4. Шестаков А. А. Точные решения системы уравнений радиационной газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 1–2. С. 38–47.
5. Шестаков А. А. Точные решения радиационной газовой динамики // Там же. 2003. Вып. 1. С. 36–50.
6. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 910–921.
7. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Там же. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842–1849.
8. Гусев В. Ю., Завьялов В. В., Козманов М. Ю. Об ускорении сходимости итераций для системы переноса теплового излучения в кинетическом приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2. С. 21–27.
9. Федотова Л. П., Шагалиев Р. М. Конечно-разностный КМ метод для математического моделирования двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 6. С. 29–41.
10. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А. DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Тез. докл. Межд. семинара "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003. С. 43.
11. Шестаков А. А. Метод ВДЭПФ для решения уравнения переноса излучения в различных приближениях // Тез. докл. XIII Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017.
12. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Шестаков А. А. RDSA-метод для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 2. С. 3–19.
13. Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А. Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2013. Вып. 3. С. 3–15.
14. Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А. DS_n -метод с TVD-реконструкцией и синтетическим P_1SA -методом ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения

- переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 4. С. 3–19.
15. Шестаков А. А. Сравнение некоторых методов ускорения итераций при совместном решении уравнения переноса излучения в P_1 -приближении и уравнения энергии // Там же. 1993. Вып. 2. С. 10–16.
 16. Мудров В. И., Ивлев А. А. Мажоранты Ньютона в прикладных задачах. М.: ЛЕНАНД, 2014.
 17. Завьялов В. В., Шестаков А. А. Выделение диагонального элемента для ускорения итераций в кинетическом приближении при расчете теплопереноса // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 2. С. 93–104.
 18. Шестаков А. А. Исследование скорости сходимости итераций метода ВДЭПФ при совместном решении уравнения энергии и уравнения переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 2. С. 3–16.
 19. Яценко Н. Н. Метод дробных шагов решения задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
 20. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
 21. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339–347.
 22. Загускин В. Л., Кондрашов В. Е. О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 5. С. 1107–1109.
 23. Шагалиев Р. М. Об одном устойчивом алгоритме раздельного счета по областям двумерного уравнения теплопроводности по узловой разностной схеме // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 3. С. 25–33.
 24. Бисярин А. Ю., Грибов В. М., Zubov A. D. и др. Комплекс ТИГР для расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью // Там же. С. 34–41.
 25. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Рыкованова В. В., Шестаков А. А. Методика и программа ТОМ1 для решения двумерного уравнения теплопроводности // Там же. 1985. Вып. 1. С. 53–65.
 26. Барышникова К. Н., Змушко В. В. Устойчивая разностная схема для решения уравнения теплопроводности прогонкой по областям // Там же. 1984. Вып. 2. С. 72–75.
 27. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А. DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 33–46.
 28. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078–1087.
 29. Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 4. С. 3–9.
 30. Кошутин Д. А., Шестаков А. А. Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса // Там же. 2017. Вып. 3. С. 39–50.
 31. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Там же. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
 32. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Двумерная методика РОМБ для численного решения уравнений переноса излучения в многогрупповом P_1 -приближении // Там же. 1990. Вып. 1. С. 41–47.

33. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Грабовенская С. А., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 3. С. 3-14.

Статья поступила в редакцию 19.12.17.

NUMERICAL EFFECTS IN THE HEAT TRANSPORT SIMULATION / A. A. Shestakov (FSUE "Acad. E. I. Zababakhin RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region).

In the numerical simulation of the heat transport problems, sometimes there occur effects, which are not described by the physics of simulated processes and make it difficult to achieve a proper understanding of these processes. We mean the grid effects, first of all, which are caused by discretizing the space by a difference grid and disappear with the use of stable and converging difference schemes and smaller sizes of the discrete grid cells. However, some other numerical simulation features weakly dependent on, or independent of the difference grid in use, which usually disappear with a decreasing size of cells, may cause errors in solutions. The paper describes some numerical effects for the heat transport problems.

Keywords: radiation transport, numerical simulation.
