УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ СО СТАТИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИЕЙ СЕТКИ ПОД ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

А. В. Стручков, А. С. Козелков, Р. Н. Жучков, А. А. Уткина, А. В. Саразов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлено описание алгоритма численного решения задач аэродинамики, основанного на выделении областей ударных волн и последующем измельчении в них расчетной сетки посредством метода адаптивно-встраиваемых сеток. Применяемый метод основан на дроблении ячеек за счет добавления новых узлов на грани. Выделение области ударных волн для адаптации осуществляется с использованием критерия на основе градиента давления и градиента плотности. Предлагаемый алгоритм реализован на произвольных неструктурированных сетках и ориентирован на конечно-объемную дискретизацию системы уравнений Навье—Стокса. Применение алгоритма демонстрируется на задачах о трансзвуковом обтекании профиля NACA0012 и сверхзвуковом обтекании клина. Показано, что использование предложенного метода адаптивных сеток существенно улучшает качество численного решения, полученного на грубых сетках.

Ключевые слова: аэродинамика, численное моделирование, адаптивные сетки, трансзвуковое и сверхзвуковое течение, ударные волны.

Введение

Задачи внешней и внутренней аэродинамики характеризуются одновременным присутствием зон с трансзвуковыми и сверхзвуковыми скоростями течения. Сложность моделирования таких течений обусловливается наличием в потоке ударных волн (УВ). Сформировавшиеся скачки уплотнения воздействуют на пограничные слои, что является причиной процессов отражения волн сжатия и разрежения, отрыва потока и других нестационарных явлений, вызывающих локальный рост потерь кинетической энергии потока и коэффициента трения [1—5]. Это, в свою очередь, влияет на точность определения аэродинамических свойств исследуемых объектов.

К методам численного моделирования таких течений предъявляются достаточно жесткие требования как по точности описания процесса, так и по отказоустойчивости численного решения. На практике это осуществляется за счет использования максимально подробной сетки и применения численных схем повышенного порядка аппроксимации [6—9].

Использование численных схем повышенного порядка аппроксимации достаточно отработано. Методы улучшения сходимости решения основываются на многосеточных технологиях [10—12] и применении лимитирующих функций [13], а параметры их использования достаточно универсальны.

Применение указанного подхода требует построения качественной расчетной сетки большого размера. Этот подход получил практическое применение в расчетах на блочно-структурированных сетках [14, 15], однако диапазон геометрических объектов, описываемых такими сетками, ограничен. Кроме того, сложная процедура сшивки решений, полученных в различных подобластях с использованием интерполяционных функций, не позволяет описывать течения с достаточной степенью точности, да и построение таких функций, обеспечивающих наименьшую погрешность, весьма нетривиально.

От этих недостатков свободны неструктурированные сетки. Они обладают большей гибкостью при дискретизации физических обла-

стей сложной геометрической конфигурации и обеспечивают возможность полной автоматизации процесса построения сетки. В настоящее время именно такие сетки широко применяются при решении большинства промышленно-ориентированных задач [16].

Основной проблемой при использовании неструктурированных сеток (как и структурированных) является возможная потеря точности решения из-за недостаточного сеточного разрешения, особенно в области УВ. Хорошее сеточное разрешение требуется и для моделирования турбулентности с использованием современных LES- и DES-моделей [17, 18]. Это приводит к тому, что при выборе сетки необходимо правильно определять размер ячеек, чтобы подробно описать все составляющие поток структуры, не подавить сеточной вязкостью мелкомасштабные составляющие и при этом не уйти за разумные пределы используемых вычислительных ресурсов.

Одним из эффективных методов повышения сеточного разрешения в области УВ, а также правильного описания вихревых структур при моделировании турбулентности является применение локального измельчения сетки в таких областях. Однако на этапе построения расчетной сетки предопределение точного положения особенностей решения для построения локального измельчения ячеек нетривиально: положение области измельчения приходится определять из общих соображений, а ее размер выбирать "с запасом". Зачастую это приводит к получению весьма избыточной по размерам сетки. Таким образом, возникает потребность в автоматизации процесса определения локальной области сгущения сеточной модели для более точного разрешения физических особенностей течения.

Избежать трудоемкой ручной генерации таких сеток помогает метод динамически адаптивных сеток [4, 19], позволяющий на основе получаемого решения автоматически измельчать сетку лишь в тех областях, для которых локально требуется это решение улучшить. По способу подстраивания под особенности решения динамически адаптивные сетки делятся на адаптивно-подвижные и адаптивно-встраиваемые [2—4].

При использовании адаптивно-подвижных сеток число элементов сетки не изменяется. Для улучшения решения и повышения его точности узлы первоначальной сетки перемещаются в области с высокими градиентами газодинамических переменных, тем самым создавая в области особенности решения локальное сгущение. Наряду с достоинствами указанного метода отметим его недостаток — возможное сильное искажение сетки с последующей потерей точности решения.

Для рассматриваемых задач более подходящей является адаптивно-встраиваемая сетка, уменьшение размеров ячеек которой осуществляется посредством встраивания дополнительных ячеек. Данный подход позволяет измельчать только определенную часть расчетной сетки без ее изменения в области с гладким решением. В работах [20—22] разработанные методы адаптивно-встраиваемых сеток применяются в основном на структурированных сетках или на неструктурированных сетках, но с ячейками определенной формы.

В настоящей работе представлен метод адаптивно-встраиваемых сеток для неструктурированных сеток с ячейками произвольной формы. Метод на основе анализа градиентов физических величин автоматически определяет область локального измельчения. Затем к ячейкам внутри обозначенной области применяется алгоритм дробления, основанный на разбиении за счет добавления новых узлов. Предлагаемый алгоритм применяется отдельно от процесса решения, т. е. сначала проводится расчет на основной сетке, и только затем сетка дробится.

Основные сведения

При дискретизации уравнений Навье—Стокса в численной методике применяется метод конечных объемов, основанный на интегрировании исходных дифференциальных уравнений, записанных в дивергентном виде [21], по контрольному объему. Контрольные объемы (ячейки сетки) являются произвольными многогранниками, в общем случае ограниченными произвольным числом граней и покрывающими расчетную область без зазоров и наложений. Вершинами (узлами) граней являются узлы сетки. Общий вид ячейки произвольной неструктурированной сетки показан на рис. 1.

При дискретизации все переменные определяются в центрах ячеек сетки, конвективные и диффузионные потоки рассчитываются через грань ячейки. Для хранения данных используется модель памяти *face-based*, в которой ведущую роль играют грани ячеек. В соответствии с этой моделью памяти данные содержат следующие элементы сетки:

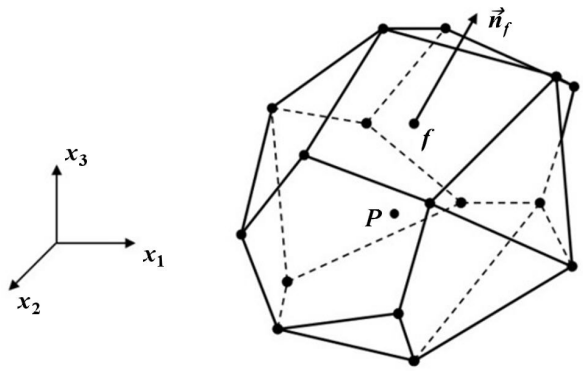

Рис. 1. Общий вид ячейки сетки

– узел — номер и координаты;
– грань — номера двух ячеек, для которых грань является общей, количество узлов грани и номера этих узлов;
– ячейка — количество образующих ее граней и номера этих граней.

Каждый n-мерный элемент сетки (ячейка или грань) представляется в виде списка из s узлов $\{p_1, \ldots, p_s\}$, упорядоченных некоторым образом.

Метод статической адаптации расчетной сетки

В основе предлагаемого метода адаптации расчетной сетки лежит алгоритм дробления ячеек, основанный на разбиении граней, образующих ячейку. Рассмотрим алгоритм адаптации на примере шестигранной ячейки.

Для формирования новых граней исходной ячейки необходимо добавить новые узлы в центр каждой грани и на середину каждого ребра (рис. 2, *а*).

Для формирования новых граней внутри исходной ячейки в ее центр добавляется новый узел (рис. 3), координаты которого известны.

В итоге из исходной ячейки имеем 8 адаптивных ячеек — ячеек первого уровня адаптации. Таким образом, строится новая адаптивная сетка, имеющая области локального измельчения и используемая для дальнейшего расчета.

Описанный алгоритм допускает многоуровневую адаптацию: он также может быть применен к ячейкам первого уровня адаптации, формируя при этом ячейки второго уровня, и т. д. Число вложенных уровней адаптации ограничивается лишь минимальным объемом адаптивной ячейки, задаваемым пользователем. Отметим, что число адаптивных ячеек определяется числом узлов, образующих исходную ячейку. Представленный алгоритм также обобщается на ячейки в форме произвольного выпуклого многогранника. Пример разбиения подобной ячейки показан на рис. 2, *б*. Отмеченные свойства данного алгоритма делают его универсальным и применимым на произвольных неструктурированных сетках.

В предложенном алгоритме необходимо предусмотреть механизм интерполяции решения с исходной сетки на адаптивную. Методом, позволяющим избежать потери точности при интерполяции, является прямой перенос решения с исходной сетки на адаптивную. Всем адаптивным ячейкам присваивается решение, взятое из исходной ячейки. Продолжение счета на новой, измельченной, сетке с учетом полученного решения на исходной сетке позволяет минимизировать количество итераций, необходимых для уточнения решения.

Для применения предложенного алгоритма необходимо определить области измельчения ячеек сетки, для чего используют критерии адаптации [3—6, 22, 23]. Далее описан критерий адаптации, применяемый в настоящей работе.

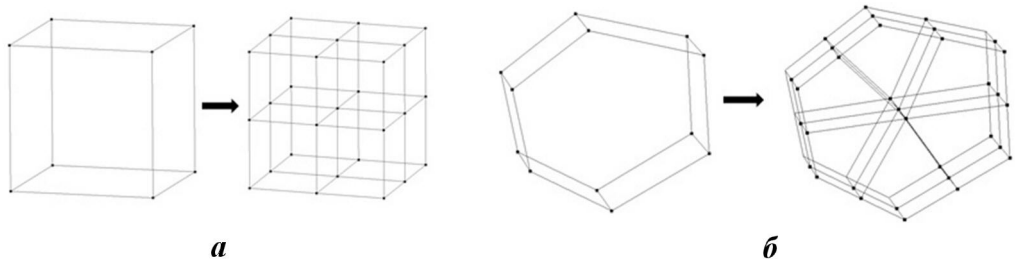

Рис. 2. Добавление новых узлов в центр грани и на середину ребер (*а* — для шестигранной ячейки; *б* — для ячейки в форме произвольного многогранника)

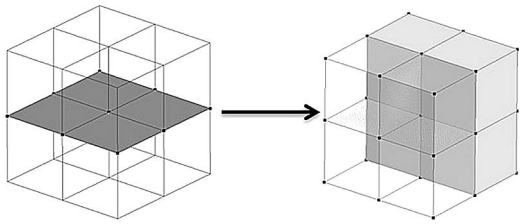

Рис. 3. Формирование граней внутри ячейки и образование ячеек первого уровня адаптации

Критерии адаптации расчетной сетки

Локальное измельчение сетки, как правило, производится в тех подобластях расчетной области, в которых необходимо повысить точность решения. В случае задач внешней аэродинамики к таким подобластям прежде всего относится фронт УВ.

Для введения адаптации в указанных областях (подобластях) применяется явное выделение области пользователем либо расположение области определяется автоматически. Так как фронт УВ имеет достаточно сложную форму, то выделить вручную представляющую интерес область локального измельчения с наименьшим вовлечением в нее лишних ячеек весьма непросто. В этом случае область целесообразно выделять автоматически на основе некоторого численного критерия. Для автоматического определения области УВ, возникающей при трансзвуковом или сверхзвуковом обтекании, наиболее подходящим критерием является значение функции на основе градиента газодинамической величины [22, 23]:

$$f = (V_{cell})^{1/3} \left|\nabla F\right|, \qquad (1)$$

где V_{cell} — объем ячейки; ∇F — градиент газодинамической величины. Величина $(V_{cell})^{1/3}$ в выражении (1) является характерным размером ячейки и позволяет учесть зависимость значения критерия f от объема ячейки. Таким образом, максимальное значение функции критерия будет достигаться в ячейках с наибольшим объемом и большим значением градиента, что обеспечит попадание в область локального измельчения крупных ячеек в области сильного изменения газодинамических величин (например, УВ). Минимальное значение критерия f характерно для области с плавным изменением газодинамических величин и достигается в ячейках с наименьшим объемом и малым значением градиента, что приведет к их исключению из области локального измельчения.

В данной работе в качестве газодинамической величины F используется плотность или давление. Эти величины наиболее подходят для выделения области УВ [22], так как их градиенты в этой области будут принимать максимальные значения.

Рассмотрим применение критерия (1) на примере автоматического выделения областей скачка уплотнения и фронта УВ при трансзвуковом обтекании аэродинамического профиля NACA0012 [8, 24, 25] и сверхзвуковом течении в канале с клином [10]. Картины формирующихся при этом течений представлены на рис. 4. Для данных задач взяты параметры потока, соответствующие экспериментам [10, 24, 25]. При обтекании профиля NACA0012 на границах расчетной области задаются число Маха 0,75, статическое давление 84 418,95 Па и температура 260 К, а также направление потока, соответствующее углу атаки профиля 4°. При сверхзвуковом течении в канале с клином во входном сечении канала задаются скорость потока 697,52 м/с, статическое давление 101 325 Па и температура $T = 300$ К, что соответствует числу Маха $\mathrm{M} = 2$.

При обтекании профиля NACA0012 происходит формирование отрывной зоны на подветренной его стороне (область А, рис. 4, *а*). Хотя ударная волна является криволинейной, по своему характеру у поверхности профиля она соответствует нормальному скачку уплотнения (область Б на рис. 4, *а*), переводящему сверхзвуковое течение в дозвуковое. Качественное описание УВ и правильное определение положения ее фронта повышает точность решения подобного класса задач, одна из целей которых — определение взаимосвязи структуры поля течения вблизи обтекаемого профиля и аэродинамических характеристик.

При сверхзвуковом течении в канале с клином образуется присоединенный скачок уплотнения, приводящий к формированию ударно-волновой структуры потока в канале: зарождению скачка уплотнения, его развитию, отражению от стенок канала и взаимодействию с системой (веером [10]) волн разряжения (область В на рис. 4, *б*). С точки зрения численного моделирования в областях таких структур потока рекомендуется строить подробную расчетную сетку, что позволит уменьшить степень "размазывания" фронтов (область Г на рис. 4, *б*) и повысить точность численного решения.

На рис. 5, 6 показано поле f из критерия (1) для задач трансзвукового обтекания профиля и

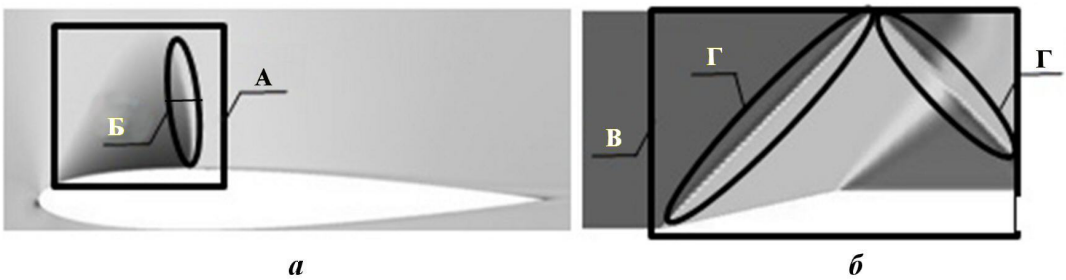

Рис. 4. Поле числа Маха: *а* — при трансзвуковом обтекании профиля NACA0012; *б* — при сверхзвуковом течении в канале с клином

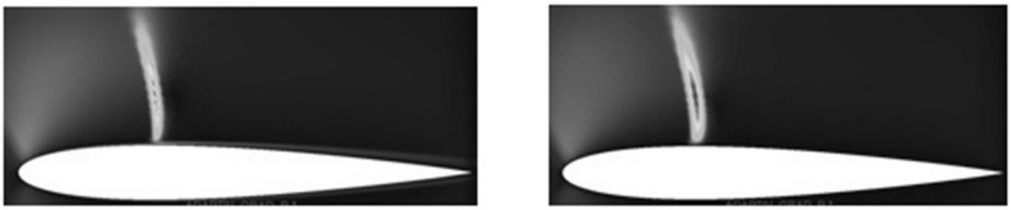

Рис. 5. Трансзвуковое обтекание профиля NACA0012. Поле распределения функции критерия для плотности (слева) и давления (справа)

Рис. 6. Сверхзвуковое обтекание клина. Поле распределения функции критерия для плотности (слева) и давления (справа)

сверхзвукового обтекания клина. Видно, что область максимального значения функции критерия (1) (на рисунках она имеет чисто белый цвет) как в случае плотности, так и в случае давления совпадает с положением скачка уплотнения и фронта УВ. При этом результаты применения критерия на основе плотности и давления идентичны. Область с максимальным значением функции этого критерия рассматривается как область для локального измельчения расчетной сетки.

При продолжении счета на измельченной сетке положение фронта УВ уточняется: фронт может смещаться и уходить из области локального измельчения. Для исключения этого необходимо в качестве исходных ячеек помечать не только ячейки с сильным изменением газодинамических величин, но и соседние с ними ячейки первого-второго слоев, что позволяет расширить область локального измельчения. Такой подход делает возможным "удерживать" фронт области с высокими градиентами в границах локальной области измельчения.

Ниже рассмотрены результаты использования представленного алгоритма на примере решения задач трансзвукового и сверхзвукового обтекания.

Численные эксперименты

Представленный выше алгоритм реализован в пакете программ ЛОГОС [26] — программном продукте инженерного анализа, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач конвективного тепломассопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ. Пакет программ ЛОГОС успешно прошел валидацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных аэродинамических и гидродинамических задач, включая расчеты турбулентных и нестационарных течений [15, 17, 26, 27].

Валидация численного метода адаптации сетки была проведена на решении задач трансзвукового обтекания профиля NACA0012 и сверхзвукового обтекания клина.

Сверхзвуковое течение в плоском канале с клином. Рассматривается задача моделирования течения невязкого сжимаемого газа в канале с клином в 10° (рис. 7). При решении задачи выполняется исследование зависимости результатов расчетов от адаптации расчетной сетки в области УВ.

Для расчета используется блочно-структурированная сетка, состоящая из шестигранников и содержащая 95 000 ячеек.

Параметры на входе канала описаны в предыдущем разделе. На боковых границах канала задается граничное условие *жесткая стенка*. На выходе из канала задается давление 101 325 Па.

На рис. 8 (см. также цветную вкладку) представлено поле распределения числа Маха.

В соответствии с формировавшимся течением построено локальное измельчение расчетной сетки в области фронта УВ (рис. 9).

Расчеты проводились на адаптивных сетках первого и второго уровней, а также на сетке, в 2 раза мельче исходной. Для оценки влияния измельчения расчетной сетки на получаемый результат оценим распределение полного давления вдоль канала для каждой из расчетных сеток (рис. 10, 11; см. также цветную вкладку).

Видно, что в области последней серии скачков амплитуда УВ меньше на исходной сетке, в то время как на сетках первого и второго уровней адаптации, равно как и на сетке, в 2 раза мельче исходной, амплитуда УВ больше. Заметим, что

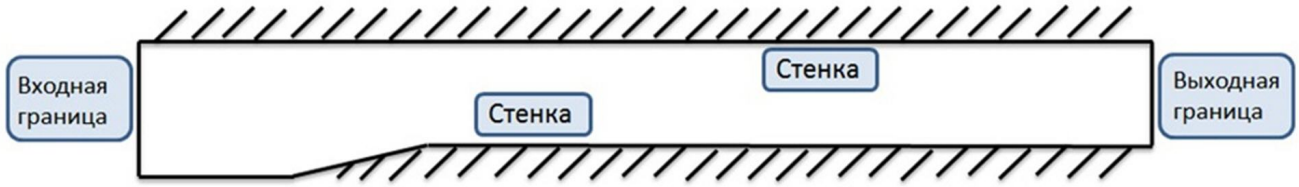

Рис. 7. Течение в плоском канале с клином

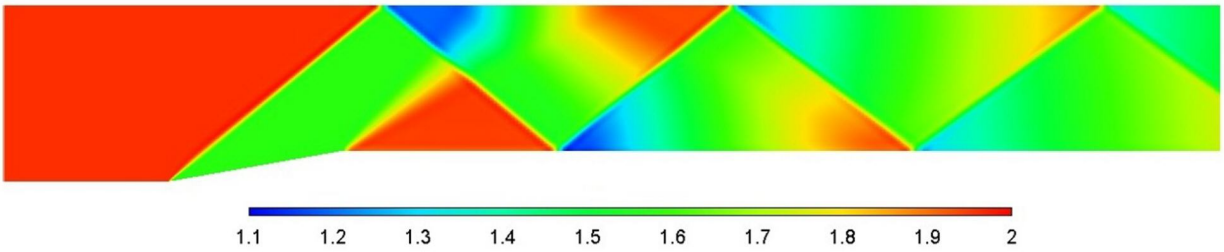

Рис. 8. Поле распределения числа Маха на исходной сетке при сверхзвуковом обтекании клина

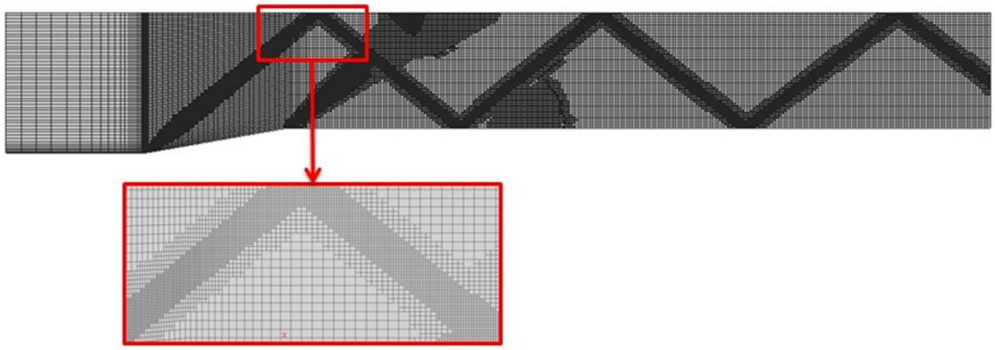

Рис. 9. Локальное измельчение расчетной сетки (2-й уровень адаптации)

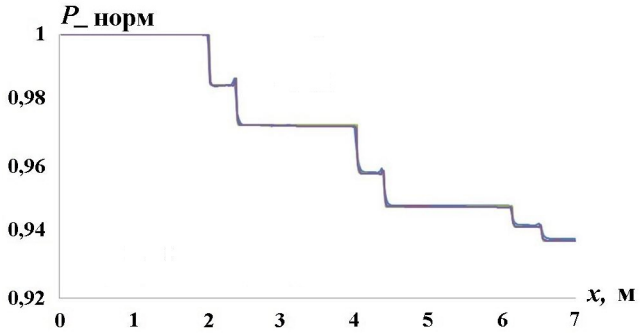

Рис. 10. Распределения полного нормированного давления: — исходная сетка; — сетка 1-го уровня адаптации; — сетка 2-го уровня адаптации; — сетка в 2 раза мельче исходной

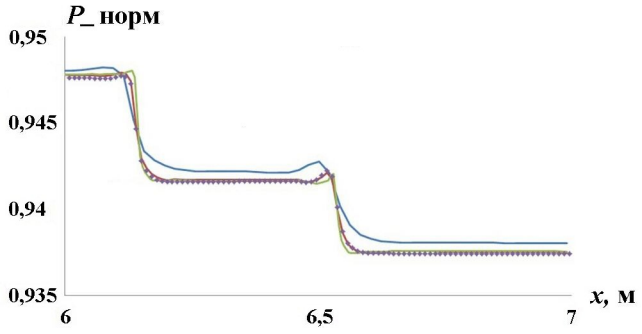

Рис. 11. Распределения полного нормированного давления, укрупненный фрагмент последних скачков: — исходная сетка; — сетка 1-го уровня адаптации; — сетка 2-го уровня адаптации; ♦ — сетка в 2 раза мельче исходной

в области УВ на сетке второго уровня адаптации ячейки самые мелкие. Однако это измельчение повлияло лишь на меньшую степень размазывания фронта УВ (что логично). Значение амплитуды УВ осталось таким же, как на сетке первого уровня адаптации и сетке, в 2 раза мельче исходной (результаты на этих сетках повторяются). Для сравнения берется заключительная серия скачков, так как на выходе из канала УВ имеет наименьшую интенсивность по сравнению с областью ее формирования. Поэтому более качественное определение фронта УВ на всем ее протяжении способствует более качественному определению ее свойств в конце.

Из представленных результатов (табл. 1, 2) можно сделать вывод, что по амплитуде УВ сеточная сходимость достигается на сетке первого уровня адаптации. При этом измельчение во всей расчетной области не требуется, что показал расчет на сетке, в 2 раза мельче исходной.

Трансзвуковое обтекание профиля NACA0012. Рассматривается задача моделирования течения вязкого сжимаемого газа вдоль профиля NACA0012 при угле атаки 3,04°. При решении задачи выполняется исследование

Таблица 1

Задача о сверхзвуковом обтекании клина. Время счета на разных сетках

Сетка	Число ячеек	Время одной итерации, с	Число итераций до сходимости
Исходная	95 000	0,24	90
1-го уровня адаптации	201 204	0,54	140
2-го уровня адаптации	563 332	1,9	190
В 2 раза мельче исходной	760 000	2,1	140

Таблица 2

Задача о сверхзвуковом обтекании клина. Полное нормированное давление за скачком (Па) и его отклонение от полученного на сетке, мельче исходной в 2 раза (%)

Сетка	$2 < X < 4$		$4{,}3 < X < 6$		$6{,}6 < X < 7$	
	P_норм	Отклонение	P_норм	Отклонение	P_норм	Отклонение
Исходная	0,9725	0,005	0,948	0,028	0,938	0,065
1-го уровня адаптации	0,9724	0,003	0,9478	0,004	0,9375	0,01
2-го уровня адаптации	0,9724	0,0003	0,9478	0,004	0,9375	0,01

зависимости результатов расчета от локального измельчения расчетной сетки в области возникающего скачка уплотнения.

Для расчета используется блочно-структурированная сетка, состоящая из шестигранников и содержащая около 158 000 ячеек. На рис. 12 представлен фрагмент геометрии области с расчетной сеткой.

При обтекании профиля на границах расчетной области задаются число Маха 0,7, статическое давление 46 066,2 Па и температура 248 К, а также направление потока, соответствующее углу атаки профиля 3,04°. На поверхности профиля задается граничное условие *стенка без прилипания*.

На рис. 13 (см. также цветную вкладку) представлено поле распределения числа Маха.

Данный режим обтекания является односкачковым, он характеризуется возникновением УВ у поверхности профиля. Применение алгоритма адаптации в данной задаче дает результат, показанный на рис. 14.

Дальнейший расчет на сетке первого уровня адаптации позволил более качественно прописать УВ. Это подтверждает график распределения коэффициента давления $C_p = \dfrac{p - p_{ref}}{0{,}5\rho V^2}$ (p — давление; p_{ref}, ρ — давление и плотность невозмущенного потока) по поверхности в области УВ, который имеет более резкий перепад (рис. 15). Перегиб кривой в окрестности $x = 0{,}33$ возникает на границе области измельчения в адаптивной сетке, что не является положительным моментом в отношении используемого алгоритма, но в целом не ухудшает получаемого

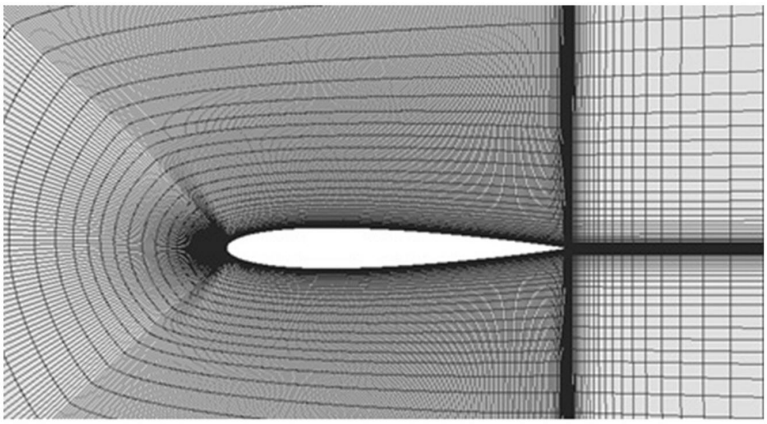

Рис. 12. Расчетная область задачи о трансзвуковом обтекании профиля NACA0012

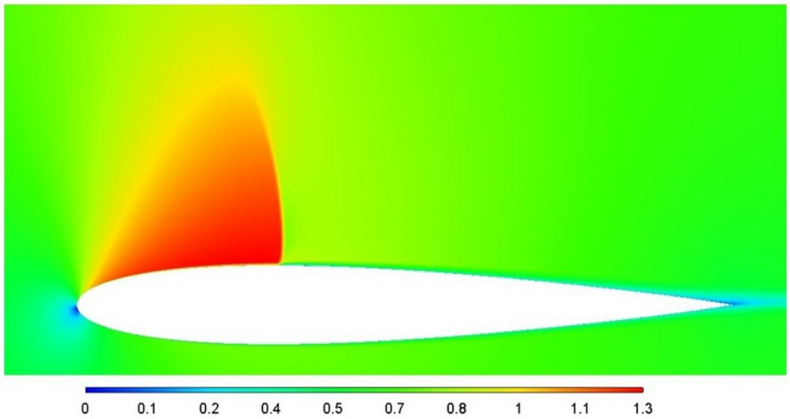

Рис. 13. Поле распределения числа Маха при трансзвуковом обтекании профиля NACA0012

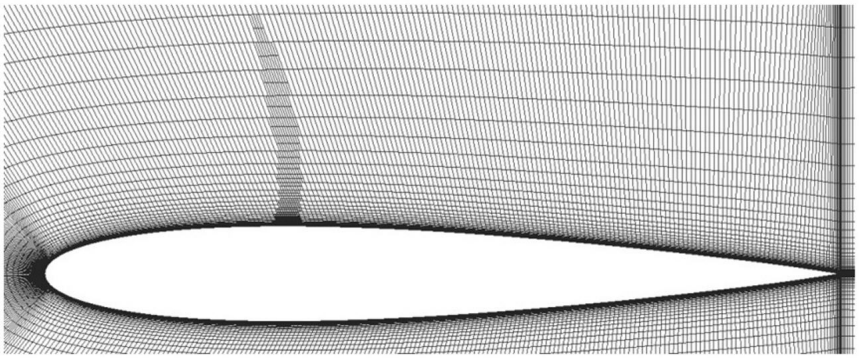

Рис. 14. Сетка 1-го уровня адаптации

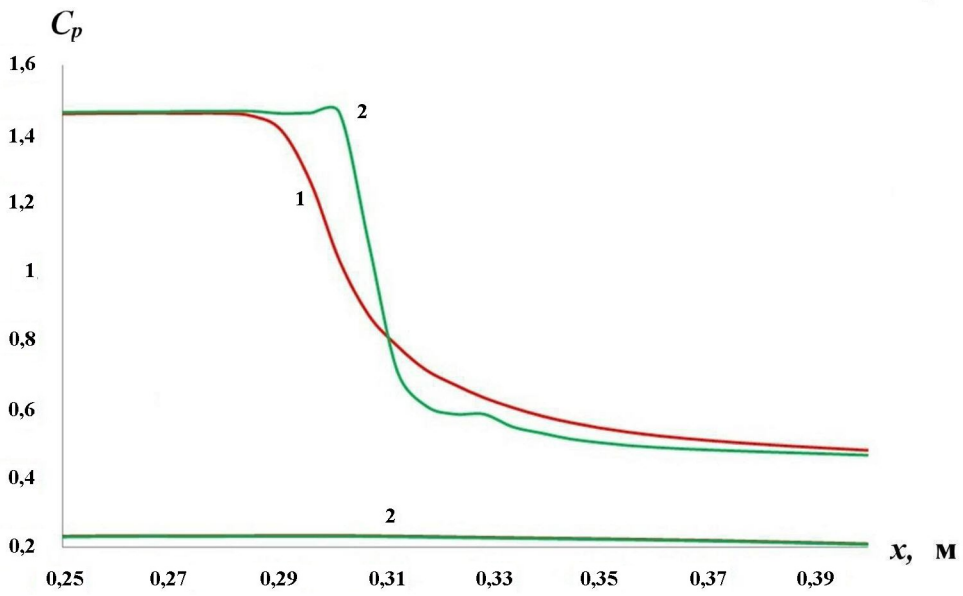

Рис. 15. Распределение коэффициента давления на поверхности профиля в области ударной волны: 1 — исходная сетка; 2 — сетка 1-го уровня адаптации

решения с точки зрения определения аэродинамических характеристик.

В табл. 3 показано сравнение значений коэффициентов лобового сопротивления C_{xa} и подъемной силы C_{ya}, полученных на исходной сетке и сетке первого уровня адаптации, с экспериментальными данными [23]. Также в таблице приведены результаты расчета на сетке, в 2 раза мельче исходной.

Из табл. 3 видно, что измельчение в 2 раза всей расчетной сетки не дает большей точности решения по сравнению с решением, получаемым на сетке первого уровня адаптации, причем обе сетки в области скачка над профилем имеют одинаковый размер ячеек. При этом число ячеек используемых сеток весьма отличается, что существенно повлияло на время сходимости (табл. 4).

Следует отметить, что определение коэффициента лобового сопротивления — непростая задача, точность решения которой напрямую зависит от точности описания УВ, возникающей у поверхности профиля. Представленные данные демонстрируют изменение результатов, а также их зависимость от использования алгоритма адаптации расчетной сетки для ее локального измельчения.

Заключение

В настоящей работе представлены описание алгоритма генерации адаптивно-встраиваемых сеток и его применение к решению задач газовой динамики. Показан принцип работы алгоритма дробления, основанного на добавлении новых уз-

Таблица 3

Сравнение расчетных значений коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы с экспериментальными данными

Вариант расчета	C_{xa}	C_{ya}	Отклонение от эксперимента C_{xa}, %	Отклонение от эксперимента C_{ya}, %
ЛОГОС, исходная сетка	0,0144	0,4808	14,38	4,85
ЛОГОС, сетка 1-го уровня адаптации	0,0142	0,4849	12,54	4,03
ЛОГОС, сетка в 2 раза мельче исходной	0,0143	0,4847	12,86	4,07
Эксперимент	0,0126	0,5054	—	—

Таблица 4

Задача о трансзвуковом обтекании профиля NACA0012. Время счета на разных сетках

Сетка	Число ячеек	Время одной итерации, с	Число итераций до сходимости
Исходная	157 914	0,62	3 200
1-го уровня адаптации	165 159	0,65	3 800
В 2 раза мельче исходной	631 656	2,1	4 000

лов на грани ячейки. Приведено описание структуры памяти, используемой для реализации алгоритма дробления на произвольных неструктурированных сетках. Рассмотрен вопрос выбора критерия для выделения областей УВ и последующего измельчения в них расчетной сетки.

Применимость разработанного метода продемонстрирована на задачах о трансзвуковом обтекании профиля NACA0012 и сверхзвуковом обтекании клина. Показано, что использование предложенного метода адаптивных сеток улучшает качество численного решения, полученного на исходных сетках.

Применению представленного алгоритма к решению промышленно-ориентированных задач будет посвящена отдельная статья.

Работа выполнена при финансовой помощи гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных исследований молодых российских ученых — докторов наук (МД-4874.2018.9), государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2685.2018.5), а также финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00267).

Список литературы

1. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболической системы уравнений. М.: Физматлит, 2001.
   Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskoy sistemy uravneniy. M.: Fizmatlit, 2001.
2. *Гильманов А. Н.* Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматлит, 2000.
   Gilmanov A. N. Metody adaptivnykh setok v zadachakh gazovoy dinamiki. M.: Fizmatlit, 2000.
3. *Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P, Tarasov V. I., Bondarenko Yu. A., Gorodnichev A. V., Degtyarenko L. I., Kaplunov M. I., Stadnik A. L., Volgin A. V., Voronov E. G., Zharova G. V.* Adaptation of the EGAK code for numerical simulations of 2D flows with adaptive built-in refined computational mesh // Meeting on the ISTC Project #436-97. Physical Model and Code Development for Deflagration-to Detonation Transition and Detonation of Hydrogen Containing Mixtures. Cologne, May 17—19, 2000.
4. Код ЭГИДА-2D для моделирования двумерных задач. Учеб. пособие в 2 томах / Под ред. Ю. В. Янилкина. Саров, 2008.
   Kod EGIDA-2D dlya modelirovaniya dvumernykh zadach. Ucheb. posobie v 2 tomakh /Pod red. Yu. V. Yanilkina. Sarov, 2008.

5. *Коваленко А. А., Нейланд В. Я.* Сильное взаимодействие пограничного слоя с гиперзвуковым потоком газа // Ученые записки ЦАГИ. 1975. Т. 6, № 2. С. 28—38.
Kovalenko A. A., Neyland V. Ya. Silnoe vzaimodeystvie pogranichnogo sloya s giperzvukovym potokom gaza // Uchenye zapiski TsAGI. 1975. T. 6, N 2. S. 28—38.
6. *Булат П. В., Волков К. Н.* Применение WENO-схем для моделирования взаимодействия отраженной ударной волны с пограничным слоем // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 5. С. 1163—1170.
Bulat P. V., Volkov K. N. Primenenie WENO-skhem dlya modelirovaniya vzaimodeystviya otrazhennoy udarnoy volny s pogranichnym sloem // Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal. 2015. T. 88, N 5. S. 1163—1170.
7. *Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Володченкова К. Б.* Моделирование турбулентных течений на сетках гибридной структуры с использованием схем высокого порядка точности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. Вып. 3. С. 18—31.
Kozelkov A. S., Zhuchkov R. N., Utkina A. A., Volodchenkova K. B. Modelirovanie turbulentnykh techeniy na setkakh gibridnoy struktury s ispolzovaniem skhem vysokogo poryadka tochnosti // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2014. Vyp. 3. S. 18—31.
8. *Chakravarthy S. R., Osher S.* A new class of high-accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. 1985. No 85-0363.
9. *Gottlieb S.* On high-order strong stability preserving Runge-Kutta and multi step time discretizations // J. Sci. Comp. 2005. Vol. 25, No 1—2. P. 105—128.
10. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков А. С., Тетерина И. В.* Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013.
Volkov K. N., Deryugin Yu. N., Emelyanov V. N., Karpenko A. G., Kozelkov A. S., Teterina I. V. Metody uskoreniya gazodinamicheskikh raschetov na nestrukturirovannykh setkakh. M.: Fizmatlit, 2013.
11. *Жуков В. Т., Феодоритова О. Б.* Многосеточный метод для конечно-элементных дискретизаций уравнений аэродинамики // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 1. С. 115—131.
Zhukov V. T., Feodoritova O. B. Mnogosetochny metod dlya konechno-elementnykh diskretizatsiy uravneniy aerodinamiki // Matematicheskoe modelirovanie. 2011. T. 23, N 1. S. 115—131.
12. *Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Козелков А. С., Тетерина И. В.* Алгебраический многосеточный метод в задачах вычислительной физики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2014. Т. 15, № 2. С. 183—200.
Volkov K. N., Deryugin Yu. N., Emelyanov V. N., Kozelkov A. S., Teterina I. V. Algebraicheskiy mnogosetochny metod v zadachakh vychislitelnoy fiziki // Vychislitelnye metody i programmirovanie: novye vychislitelnye tekhnologii. 2014. T. 15, N 2. S. 183—200.
13. *Лашкин С. В., Козелков А. С., Глазунова Е. В., Тарасова Н. В., Ялозо А. В.* Применение ограничителей градиента при решении уравнений Навье—Стокса на произвольных неструктурированных сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 3—17.
Lashkin S. V., Kozelkov A. S., Glazunova E. V., Tarasova N. V., Yalozo A. V. Primenenie ogranichiteley gradienta pri reshenii uravneniy Navie-Stoksa na proizvolnykh nestrukturirovannykh setkakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2017. Vyp. 2. S. 3—17.
14. *Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P. R.* Detached-Eddy Simulations past a Circular Cylinder // Flow. Turb. Comb. 2000. Vol. 63. P. 293—313.
15. *Козелков А. С., Курулин В. В., Тятюшкина Е. С., Пучкова О. Л.* Моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках с использованием модели отсоединенных вихрей // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 81—96.

Kozelkov A. S., Kurulin V. V., Tyatyushkina E. S., Puchkova O. L. Modelirovanie turbulentnykh techeniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti na nestrukturirovannykh setkakh s ispolzovaniem modeli otsoedinennykh vikhrey // Matematicheskoe modelirovanie. 2014. T. 26, N 8. S. 81—96.

16. *Погосян М. А., Савельевских Е. П., Шагалиев Р. М., Козелков А. С., Стрелец Д. Ю., Рябов А. А., Корнев А. В., Дерюгин Ю. Н., Спиридонов В. Ф., Циберев К. В.* Применение отечественных суперкомпьютерных технологий для создания перспективных образцов авиационной техники // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 2. С. 3—17.
Pogosyan M. A., Savelevskikh E. P., Shagaliev R. M., Kozelkov A. S., Strelets D. Yu., Ryabov A. A., Kornev A. V., Deryugin Yu. N., Spiridonov V. F., Tsiberev K. V. Primenenie otechestvennykh superkompyuternykh tekhnologiy dlya sozdaniya perspektivnykh obraztsov aviatsionnoy tekhniki // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 2. S. 3—17.
17. *Козелков А. С., Курулин В. В., Пучкова О. Л., Тятюшкина Е. С.* Моделирование турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках с использованием модели отсоединенных вихрей // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 8. С. 81—96.
Kozelkov A. S., Kurulin V. V., Puchkova O. L., Tyatyushkina E. S. Modelirovanie turbulentnykh techeniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti na nestrukturirovannykh setkakh s ispolzovaniem modeli vikhrey // Matematicheskoe modelirovanie. 2014. T. 26, N 8. S. 81—96.
18. *Козелков А. С., Курулин В. В.* Численная схема для моделирования турбулентных течений несжимаемой жидкости с использованием вихреразрешающих подходов // Вычислительная математика и математическая физика. 2015. Т. 55, № 7. С. 135—146.
Kozelkov A. S., Kurulin V. V. Chislennaya skhema dlya modelirovaniya turbulentnykh techeniy neszhimaemoy zhidkosti s ispolzovaniem vikhrerazreshayushchikh podkhodov // Vychislitelnaya matematika i matematicheskaya fizika. 2015. T. 55, N 7. S. 135—146.
19. Adaptive mesh refinement — theory and applications: Proc. Chicago Workshop on Adaptive Mesh Refinement Methods (Lecture Notes in Comp. Sci. and Eng. September, 3—5, 2003) / Ed. by T. Plewa, T. Linde, Weirs V. Gregory. Chicago: Springer, 2005.
20. *Барахнин В. Б., Карамышев В. Б.* TVD-схема на подвижной адаптивной сетке // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 1. С. 19—30.
Barakhnin V. B., Karamyshev V. B. TVD-skhema na podnizhnoy setke // Vychislitelnye tekhnologii. 2000. T. 5, N 1. S. 19—30.
21. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
Loytsyanskiy L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza. M.: Nauka, 1987.
22. *Daunenhofer J. F., Baron J. R.* Grid Adaption for the 2D Euler Equations. Technical Report AIAA-85-0484. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1985.
23. *Warren G. P., Andersom W. K., Thomas J. L., Krist S. L.* Grid convergence for adaptive methods // AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference. Honolulu, Hawaii American Institute of Aeronautics and Astronautics. June 1991.
24. *Колесников Г. А., Марков В. К., Михайлюк А. А.* Аэродинамика летательных аппаратов / Под ред. Г. А. Колесникова. М.: Машиностроение, 1993.
Kolesnikov G. A., Markov V. K., Mikhayluk A. A. Aerodinamika letatelnykh apparatov / Pod red. G. A. Kolesnikova. M.: Mashinostroenie, 1993.
25. *Ladson Ch. L., Hill A. S., Johnson W. G.* Pressure Distributions from High Reynolds Number Transonic Tests of an NACA 0012 Airfoil in the Langley 0.3-Meter Transonic Cryogenic Tunnel. NASA Technical Memorandum. Hampton, Virginia: Langley Research Center, 1987.
26. *Дерюгин Ю. Н., Жучков Р. Н., Зеленский Д. К., Козелков А. С., Саразов А. В., Кудимов Н. Ф., Липницкий Ю. М., Панасенко А. В., Сафронов А. В.* Результаты валидации многофункционального пакета программ ЛОГОС при решении задач аэрогазодинамики старта и полета ракетносителей // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 9. С. 83—95.

Deryugin Yu. N., Zhuchkov R. N., Zelenskiy D. K., Kozelkov A. S., Sarazov A. V., Kudimov N. F., Lipnitskiy Yu. M., Panasenko A. V., Safronov A. V. Rezultaty validatsii mnogofunktsionalnogo paketa programm LOGOS pri reshenii zadach aerogazodinamiki starta i poleta raket-nositeley // Matematicheskoe modelirovanie. 2014. T. 26, N 9. S. 83—95.

27. *Козелков А. С.* Методика численного моделирования цунами оползневого типа на основе уравнений Навье—Стокса // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 218—236.
Kozelkov A. S. Metodika chislennogo modelirovaniya tsunami opolznevogo tipe na osnove uravneniy Navie-Stoksa // Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred. 2016. T. 9, N 2. S. 218—236.

Статья поступила в редакцию 07.06.18.

NUMERICAL SIMULATION OF AERODYNAMIC PROBLEMS WITH STATIC ADAPTATION OF THE MESH FOR SPECIFIC FEATURES OF THE SOLUTION /

A. V. Struchkov, A. S. Kozelkov, R. N. Zhuchkov, A. A. Utkina, A. V. Sarazov (FSUE RFNC-VNIIEF, Sarov, N. Novgorod region).

The algorithm of numerical solution for aerodynamics problems based on the separation of the shockwave areas followed up by refining the mesh there using adaptively embedded meshes is described. The implemented method is based on the division of cells by adding new nodes on the face. Finding shockwave areas for adaptation is done using the criteria on the basis of the pressure gradient and density gradient. The proposed algorithm is realized on random non-structured meshes and aimed at finite-volume discretization of the system of Navier-Stokes equations. Implementation of the algorithm is shown with the problems of transonic airflow of the profile NACA0012 and supersonic airflow of a wedge. It is shown that implementation of the proposed method of adaptive meshes improves considerably the quality of the numerical solution produced at the coarse meshes.

Keywords: aerodynamics, numerical simulation, adaptive meshes, transonic and supersonic flow, shock waves.