

УДК 517.958:536.2

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА "УРАЛ" ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ P_1 -УРАВНЕНИЙ

И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Вопросы построения монотонных разностных схем при решении уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении рассматриваются во многих работах. В данной работе предложена новая разностная схема, улучшающая монотонность решения при аппроксимации гиперболических уравнений. Для этого используется методология построения диссипативных схем для системы P_1 -уравнений, записанной в инвариантах Римана. Особенностью новой схемы является учет функции Планка в соотношениях, связывающих значения интегральных средних величин со значениями величин в узлах разностных интервалов.

Ключевые слова: уравнение переноса в P_1 -приближении, разностная схема.

Введение

При решении уравнения переноса теплового излучения используются различные приближения углового распределения в пространстве направлений полета частиц. Это связано с тем, что потери энергии вещества на излучение в явной форме не зависят от углового распределения излучения и определяются только интегральными по направлениям величинами: плотностью излучения и потоком. Угловое распределение излучения можно представить в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам, который в плоской и сферической геометриях сводится к ряду по полиномам Лежандра. Сферические функции образуют полную систему, поэтому с этим разложением не связано никаких приближений. Но на практике приходится ограничиваться в разложении конечным числом членов, поэтому полученный результат называют P_n -приближением, если разложение прерывается на $(n + 1)$ -м члене. Обычно угловое распределение теплового излучения хорошо описывается уже двумя первыми полиномами Лежандра, которые сводят решение уравнения переноса к гиперболической системе P_1 -уравнений.

Если пренебречь временной производной по потоку, то гиперболическая система переходит в параболическую систему, для которой было предложено использовать разностную схему РОМБ [1–3]. В 1989 г. было предложено использовать эту схему и для решения гиперболической системы P_1 -уравнений [4–6]. Для разностной аппроксимации P_1 -уравнений были доказаны устойчивость и сходимость схемы РОМБ [7, 8], а также выполнение асимптотического диффузионного предела [9, 10].

Схема РОМБ применялась также для решения более сложной гиперболической системы квазидиффузионных уравнений [11]. Однако в работах [12, 13] показано, что она может быть неустойчива в квазидиффузионном приближении, поэтому для таких уравнений предложена схема ГРОМ [14].

Одним из основных требований при использовании разностных схем для решения P_1 -уравнений является получение неотрицательной плотности излучения и температуры вещества. Такие схемы обычно называют положительными. Возможность построения положительных схем в декартовых геометриях для системы уравнений переноса теплового излучения в P_1 -приближении подтверждается выполнением принципа максимума—минимума для данной системы [15]. В криволинейных

геометриях (сферической, цилиндрической) принцип максимума—минимума доказать не удается, поэтому построение положительных схем сильно усложняется.

Одним из подходов для получения положительных схем является переход к нелинейным схемам, построенным с использованием TVD-технологии для повышения точности [16]. Доказательство принадлежности таких схем к TVD-схемам затруднено из-за применения линеаризации, поэтому такие схемы названы TVDR (Total Variation Diminishing Reconstruction). В работе [17] предложена TVDR-схема, основанная на TVD-реконструкции одномерной системы P_1 -уравнений, записанной в инвариантах Римана. В работе [18] исследован порядок численной сходимости этой схемы и показано, что на гладких решениях TVDR-схема имеет второй порядок, а на разрывных решениях и в неоднородных средах порядок снижается до первого. В работе [19] предложена одномерная TVDR-схема, которая использует TVD-реконструкцию не инвариантов, а искомым величин: плотности и потока излучения. Эта схема, в отличие от предыдущей, более проста в реализации и легче обобщается на многомерные геометрии. В работах [20–22] предложены двумерные TVDR-схемы, построенные на реконструкции плотности и потока излучения. Для квазидиффузионного приближения TVDR-схемы рассмотрены в работах [23, 24].

Вопросы построения не только положительных, но и монотонных разностных схем при решении уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении рассматривались также в работах [25, 26], где сравнивались схемы РОМБ, TVDR и схема, построенная по аналогии со схемой Годунова.

В данной работе предложен новый вариант схемы РОМБ, улучшающий монотонность разностной аппроксимации гиперболических уравнений. Для этого применяется методология построения диссипативных схем, используемая при аппроксимации уравнения переноса в работе [27]. Новая схема названа схемой УРАЛ. Особенностью новой схемы является учет функции Планка с данного шага, а плотности и потока излучения — как с данного, так и предыдущего шага в соотношениях, связывающих значения интегральных средних величин со значениями величин в узлах разностных интервалов. Приведены две модельные задачи: в первой моделируется перенос в вакууме для изучения монотонности решения с учетом в соотношениях связи плотности и потока с предыдущего шага, во второй — перенос в реальной среде для изучения влияния функции Планка в соотношениях связи на получаемое решение.

Постановка задачи

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений переноса в P_1 -приближении для одномерной плоской геометрии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha_c U &= \alpha_c B; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x} + (\alpha_c + \alpha_s) S &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t — время; U — плотность излучения, умноженная на скорость света c ; S — поток энергии излучения; α_s — коэффициент рассеяния; α_c — коэффициент поглощения; B — равновесная плотность излучения, умноженная на скорость света.

Для решения системы (1) будем применять разностную аппроксимацию в пространстве $t \in [0, \infty]$, $x \in [-\infty, \infty]$, используя методологию построения диссипативных схем.

Построение диссипативной схемы без учета рассеяния

Для начала построим схему второго порядка аппроксимации без учета рассеяния:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha_c U &= \alpha_c B; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_c S &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Неявная разностная аппроксимация системы (2) в рамках одной ячейки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{h} + (\alpha_c U)_{i+1/2}^{n+1} &= (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1}; \\ \frac{S_{i+1/2}^{n+1} - S_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{3h} + (\alpha_c S)_{i+1/2}^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$; $h = x_{i+1} - x_i$; U_i^{n+1} , S_i^{n+1} — значения величин в узлах разностной сетки; $U_{i+1/2}^{n+1}$, $S_{i+1/2}^{n+1}$ — значения интегральных средних величин на интервалах разностной сетки; $i = \overline{0, I}$.

Для дальнейших исследований запишем разностную схему (3) в более компактном виде:

$$U_{i+1/2}^{n+1} + \frac{1}{q_{i+1/2}^{n+1} h} \Delta S_i^{n+1} = (F_0)_{i+1/2}^{n+1}; \quad S_{i+1/2}^{n+1} + \frac{1}{3q_{i+1/2}^{n+1} h} \Delta U_i^{n+1} = (F_1)_{i+1/2}^{n+1},$$

где $q_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{c\tau} + (\alpha_c)_{i+1/2}^{n+1}$; $(F_0)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q_{i+1/2}^{n+1}} \left[\frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1} \right]$; $(F_1)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{c\tau q_{i+1/2}^{n+1}} S_{i+1/2}^n$;

$\Delta(\square)_i = (\square)_{i+1} - (\square)_i$.

Переходя в системе (3) к инвариантам $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}U - S$, $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}U + S$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{(\psi_1)_{i+1/2}^{n+1} - (\psi_1)_{i+1/2}^n}{c\tau} - \frac{(\psi_1)_{i+1}^{n+1} - (\psi_1)_i^{n+1}}{\sqrt{3}h} + (\alpha_c \psi_1)_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1}; \\ \frac{(\psi_2)_{i+1/2}^{n+1} - (\psi_2)_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{(\psi_2)_{i+1}^{n+1} - (\psi_2)_i^{n+1}}{\sqrt{3}h} + (\alpha_c \psi_2)_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Систему уравнений (4) можно также записать в более компактном виде:

$$(\psi_1)_{i+1/2}^{n+1} - \lambda_{i+1/2}^{n+1} \Delta(\psi_1)_i^{n+1} = (Q_1)_{i+1/2}^{n+1}; \quad (\psi_2)_{i+1/2}^{n+1} + \lambda_{i+1/2}^{n+1} \Delta(\psi_2)_i^{n+1} = (Q_2)_{i+1/2}^{n+1}, \quad (5)$$

где $\lambda_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}q_{i+1/2}^{n+1}h}$; $(Q_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q_{i+1/2}^{n+1}} \left[\frac{1}{c\tau} (\psi_{1,2})_{i+1/2}^n + \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1} \right]$.

Если при численном решении уравнений системы (5) применять схемы второго порядка аппроксимации (например, DD-схему), то в зоне больших градиентов решения, а также в зоне больших оптических плотностей ($\alpha h \gg 1$) появляются нефизичные осцилляции и может нарушаться положительность решения. Если же применять схемы первого порядка аппроксимации (например, St-схему), то отмеченные недостатки снимаются, но понижается точность решения, градиенты в решении могут быть чрезмерно размыты. С позиции метода дифференциального приближения нефизичные осцилляции в схемах второго порядка аппроксимации для оптически плотных систем можно объяснить наличием антидиссипативных членов в первом дифференциальном приближении. Для подавления этих осцилляций вводятся диссипативные члены, а схемы, построенные таким образом, называются диссипативными схемами (ДС-схемами).

Рассмотрим алгоритм построения ДС-схем на примере гиперболического уравнения в одномерной плоской геометрии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha_c N = \frac{1}{2} \alpha_c B, \quad (6)$$

где $N(t, x, \mu)$ — неотрицательная функция.

Разностная аппроксимация по времени уравнения (6) имеет вид

$$\mu \frac{\partial N^{n+1}}{\partial x} + q N^{n+1} = Q^{n+1}, \quad (7)$$

где $q = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c$; $Q^{n+1} = \frac{1}{c\tau}N^n + \frac{1}{2}\alpha_c B^{n+1}$.

При аппроксимации уравнения (7) по пространству DD-схемой второго порядка с соотношениями $N_{i+1/2} = 0,5(N_i + N_{i+1})$, $Q_{i+1/2} = 0,5(Q_i + Q_{i+1})$ получаем

$$\mu \frac{N_{i+1}^{n+1} - N_i^{n+1}}{h} + q \frac{N_i^{n+1} + N_{i+1}^{n+1}}{2} = \frac{Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^{n+1}}{2}.$$

Из разложения в ряд Тейлора находим невязку:

$$\mu \frac{\partial N}{\partial x} + qN - Q = -\frac{qh^2}{12} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + O(h^3).$$

Антидиссипативное поведение остаточного члена $-\frac{qh^2}{12} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$ в невязке вызвано отрицательным коэффициентом при второй производной. Особо негативно антидиссипация сказывается на решении в оптически плотной среде. Для устранения антидиссипации можно ввести искусственную диссипацию добавлением $\frac{qh^2}{12} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$ в правую часть уравнения переноса (6). Таким образом, вместо гиперболического уравнения (6) получается параболическое уравнение с диссипативным оператором второго порядка в правой части. Естественно, решение параболического уравнения будет более гладким, чем решение гиперболического уравнения.

Для уменьшения погрешности аппроксимации величины Q вычитаем из правой части уравнения переноса (7) член $\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$, т. е. вместо уравнения (7) решаем уравнение

$$\mu \frac{\partial N^{n+1}}{\partial x} + qN^{n+1} = Q^{n+1} + \frac{qh^2}{12} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (8)$$

внося при этом ошибку второго порядка малости. Однако непосредственное решение (8) усложняется из-за появления производных второго порядка. Поэтому преобразуем уравнение (8) к виду системы уравнений первого порядка

$$\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_c N = \frac{1}{2} \alpha_c B; \quad \psi = N + \frac{\omega}{\mu}, \quad (9)$$

где $\psi(t, x, \mu)$ — диссипативная функция; $\omega = \theta h \frac{\partial Q}{\partial x} - \delta h \frac{\partial N}{\partial x}$ — диссипативная добавка; δ, θ — некоторые параметры.

Подставляя выражение для ψ в первое уравнение системы (9), получаем уравнение параболического типа

$$\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha_c N = \frac{1}{2} \alpha_c B + \delta h \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \theta h \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Выбирая параметры δ, θ по формулам $\delta = \frac{qh}{12}$, $\theta = \frac{\delta}{q}$, из аппроксимации уравнения (10) по времени получаем диссипативное уравнение (8).

Из вида диссипативной функции ψ можно получить выражение для N через ψ :

$$N = \psi - \frac{\omega}{\mu} = \psi + \frac{\delta h}{\mu} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\theta h}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial x} = \psi + \frac{\delta h}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\theta h}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial x} + O[(\delta h)^2, (\theta h)^2].$$

Если вместо этого уравнения использовать упрощенное выражение

$$N = \psi + \frac{\delta h}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\theta h}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то первое уравнение системы (9) будет справедливо с точностью до величин порядка $O[(\delta h)^2, (\theta h)^2]$.

Перейти к ДС-схемам для инвариантов можно, если выбирать соотношения связи в виде $\psi_{1,2} = \psi_{1,2}^d \mp \frac{1}{\mu} \left(\delta h \frac{\partial \psi_{1,2}^d}{\partial x} - \theta q h \frac{\partial Q_{1,2}}{\partial x} \right)$, где $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\psi_{1,2}^d$ — диссипативные инварианты.

Введем в систему для инвариантов (5) искусственную диссипацию. Заменяем инварианты в узлах $(\psi_{1,2})_i^{n+1}$ на диссипативные инварианты $(\psi_{1,2}^d)_i^{n+1}$:

$$(\psi_1)_{i+1/2}^{n+1} - \lambda_{i+1/2}^{n+1} \Delta \left(\psi_1^d \right)_i^{n+1} = (Q_1)_{i+1/2}^{n+1}; \quad (\psi_2)_{i+1/2}^{n+1} + \lambda_{i+1/2}^{n+1} \Delta \left(\psi_2^d \right)_i^{n+1} = (Q_2)_{i+1/2}^{n+1}. \quad (11)$$

Связь $\psi_{1,2}$ с диссипативными инвариантами $\psi_{1,2}^d$ зададим соотношениями

$$\begin{aligned} (\psi_1)_{i+1/2} &= (\psi_1^d)_{i+1/2} - \tilde{\delta} \Delta \left(\psi_1^d \right)_i + \gamma q \Delta \left(Q_1 \right)_i; \\ (\psi_2)_{i+1/2} &= (\psi_2^d)_{i+1/2} + \tilde{\delta} \Delta \left(\psi_2^d \right)_i - \gamma q \Delta \left(Q_2 \right)_i, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\tilde{\delta} = \sqrt{3}\delta$, $\gamma = \frac{\sqrt{3}\theta}{q}$ — коэффициенты искусственной диссипации; $(\psi_{1,2}^d)_{i+1/2} = 0,5 \left[(\psi_{1,2}^d)_i + (\psi_{1,2}^d)_{i+1} \right]$.

Подставляя соотношения связи (12) в систему (11), получаем

$$(\psi_1^d)_i = (\lambda^d + 0,5)^{-1} \left[(\lambda^d - 0,5) (\psi_1^d)_{i+1} + (Q_1)_{i+1/2} - \gamma q \Delta \left(Q_1 \right)_i \right] \text{ для счета по убыванию } i;$$

$$(\psi_2^d)_{i+1} = (\lambda^d + 0,5)^{-1} \left[(\lambda^d - 0,5) (\psi_2^d)_i + (Q_2)_{i+1/2} + \gamma q \Delta \left(Q_2 \right)_i \right] \text{ для счета по возрастанию } i,$$

где $\lambda^d = \tilde{\delta} + \lambda$.

При условиях

$$\lambda^d \geq 0,5; \quad (Q_1)_{i+1/2} - \gamma q \Delta \left(Q_1 \right)_i \geq 0; \quad (Q_2)_{i+1/2} + \gamma q \Delta \left(Q_2 \right)_i \geq 0 \quad (13)$$

получаем положительную ДС-схему с $\psi_{1,2}^d \geq 0$. В дальнейшем знак " \sim " в параметре $\tilde{\delta}$ для упрощения будем опускать.

Рассмотрим несколько примеров выбора параметров δ , γ в ДС-схемах. Если рассмотреть линейный случай с постоянным коэффициентом q , то при $\delta = 0,5$ и $(Q_{1,2})_i = 0,5 \left[(Q_{1,2})_{i-1/2} + (Q_{1,2})_{i+1/2} \right]$ получаем

$$\begin{aligned} (\psi_1^d)_i &= (\lambda + 1)^{-1} \left[\lambda (\psi_1^d)_{i+1} + (0,5 + \gamma q) (Q_1)_i + (0,5 - \gamma q) (Q_1)_{i+1} \right]; \\ (\psi_2^d)_{i+1} &= (\lambda + 1)^{-1} \left[\lambda (\psi_2^d)_i + (0,5 - \gamma q) (Q_2)_i + (0,5 + \gamma q) (Q_2)_{i+1} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда при положительных граничных значениях $(\psi_1^d)_I \geq 0$, $(\psi_2^d)_{i=0} \geq 0$, положительных правых частях $(Q_{1,2})_i \geq 0$ и $-0,5 \leq \gamma q \leq 0,5$ получаем положительную ДС-схему для диссипативных инвариантов $\psi_{1,2}^d \geq 0$. Но это не гарантирует положительности для инвариантов $\psi_{1,2} \geq 0$, так как из соотношений связи получаем

$$(\psi_1)_{i+1/2} = (\psi_1^d)_i + \gamma q \Delta \left(Q_1 \right)_i; \quad (\psi_2)_{i+1/2} = (\psi_2^d)_{i+1} - \gamma q \Delta \left(Q_2 \right)_i.$$

Положительную ДС-схему для инвариантов $\psi_{1,2} \geq 0$ получаем только при $\gamma = 0$, но ДС-схема с параметрами $\delta = 0,5$, $\gamma = 0$ имеет первый порядок аппроксимации. Такая ДС-схема является диссипативным аналогом шаговой St-схемы первого порядка аппроксимации для уравнения переноса, но имеет более высокий порядок, так как в этой схеме для диссипативных инвариантов $\psi_{1,2}^d$ используется схема второго порядка аппроксимации с соотношениями связи $(\psi_{1,2}^d)_{i+1/2} = 0,5 \left[(\psi_{1,2}^d)_i + (\psi_{1,2}^d)_{i+1} \right]$, а

для инвариантов $\psi_{1,2}$ — схема первого порядка с соотношениями связи $(\psi_1)_{i+1/2} = (\psi_1^d)_i$, $(\psi_2)_{i+1/2} = (\psi_2^d)_{i+1}$.

Если рассмотреть ДС-схему второго порядка аппроксимации с $q = \text{const}$, $\delta = \frac{\sqrt{3}qh}{16}$, $\gamma = 0$, $(Q_{1,2})_i = \frac{1}{2} [(Q_{1,2})_{i-1/2} + (Q_{1,2})_{i+1/2}]$, то получаем

$$\begin{aligned} (\psi_1^d)_i &= (\lambda^d + 0,5)^{-1} [(\lambda^d - 0,5) (\psi_1^d)_{i+1} + (Q_1)_{i+1/2}]; \\ (\psi_2^d)_{i+1} &= (\lambda^d + 0,5)^{-1} [(\lambda^d - 0,5) (\psi_2^d)_i + (Q_2)_{i+1/2}]; \\ (\psi_1)_{i+1/2} &= (0,5 + \delta) (\psi_1^d)_i + (0,5 - \delta) (\psi_1^d)_{i+1}; \\ (\psi_2)_{i+1/2} &= (0,5 - \delta) (\psi_2^d)_i + (0,5 + \delta) (\psi_2^d)_{i+1}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\lambda^d \geq 0,5$. Эта ДС-схема положительна для диссипативных инвариантов $\psi_{1,2}^d$, но при $\delta = \frac{\sqrt{3}qh}{16} \geq 0,5$ может быть неположительной для $\psi_{1,2}$.

Если рассмотреть схему с $\delta = \frac{1}{2} \frac{1 + \exp(-\lambda^{-1})}{1 - \exp(-\lambda^{-1})} - \lambda$, $\gamma = 0$, то получаем положительную ДС-схему (14) для инвариантов $\psi_{1,2}$ и $\psi_{1,2}^d$, так как $\lambda^d \geq 0,5$, $\delta \leq 0,5$. Если использовать разложение $\exp(-\lambda^{-1}) = 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} - \dots$ при $\lambda > 1$, то можно показать, что ДС-схема имеет второй порядок аппроксимации. При $\lambda < 1$ также можно показать, что $\delta \sim O(h)$.

Если рассмотреть схему с $\delta = \frac{1}{2} \frac{1 + \exp(-\lambda^{-1})}{1 - \exp(-\lambda^{-1})} - \lambda$, $\gamma = \frac{\delta}{q}$, то получаем положительную ДС-схему только для инвариантов $\psi_{1,2}^d$ (инварианты $\psi_{1,2}$ могут быть отрицательными):

$$\begin{aligned} (\psi_1^d)_i &= (\lambda^d + 0,5)^{-1} [(\lambda^d - 0,5) (\psi_1^d)_{i+1} + (0,5 + \delta) (Q_1)_i + (0,5 - \delta) (Q_1)_{i+1}]; \\ (\psi_2^d)_{i+1} &= (\lambda^d + 0,5)^{-1} [(\lambda^d - 0,5) (\psi_2^d)_i + (0,5 - \delta) (Q_2)_i + (0,5 + \delta) (Q_2)_{i+1}]; \\ (\psi_1)_{i+1/2} &= (0,5 + \delta) (\psi_1^d)_i + (0,5 - \delta) (\psi_1^d)_{i+1} + \delta \Delta (Q_1)_i; \\ (\psi_2)_{i+1/2} &= (0,5 - \delta) (\psi_2^d)_i + (0,5 + \delta) (\psi_2^d)_{i+1} - \delta \Delta (Q_2)_i, \end{aligned}$$

где $\lambda^d \geq 0,5$; $\gamma q = \delta \leq 0,5$.

Так как эта схема близка по построению к схеме РОМБ, но отличается от последней более совершенными соотношениями связи, было предложено назвать ее схемой УРАЛ (**У**совершенствованный **Р**омбовый **А**лгоритм). В одномерном плоском случае схема УРАЛ для каждого в отдельности диссипативного инварианта является аналогом ЛС-схемы (линейной характеристической).

Из этих примеров видно, что в простейшем линейном случае с постоянным коэффициентом q при $\gamma = 0$ можно построить безусловно положительные ДС-схемы для инвариантов $\psi_{1,2}$ и $\psi_{1,2}^d$ первого (при $\delta = 0,5$, $\gamma = 0$) и второго (при $\delta = \frac{1}{2} \frac{1 + \exp(-\lambda^{-1})}{1 - \exp(-\lambda^{-1})} - \lambda$, $\gamma = 0$) порядка аппроксимации по пространству.

Отличительной особенностью ДС-схем является то, что в таких схемах вместо исходной задачи относительно инвариантов $\psi_{1,2}$

$$(\psi_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} \mp \lambda_{i+1/2}^{n+1} \Delta (\psi_{1,2})_i^{n+1} = (Q_{1,2})_{i+1/2}^{n+1}$$

решается подобная задача относительно диссипативных инвариантов $\psi_{1,2}^d$

$$\left(\psi_{1,2}^d \right)_{i+1/2}^{n+1} \mp \left(\lambda^d \right)_{i+1/2}^{n+1} \Delta \left(\psi_{1,2}^d \right)_i^{n+1} = \left(\bar{Q}_{1,2} \right)_{i+1/2}^{n+1},$$

где $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} = (Q_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} \mp \gamma q \Delta (Q_{1,2})_i^{n+1}$; $(Q_{1,2})_i = 0,5 \left[(Q_{1,2})_{i-1/2} + (Q_{1,2})_{i+1/2} \right]$.

Несмотря на подобие исходных и диссипативных уравнений, между ними есть существенное различие. Переход в диссипативное пространство обеспечивает "прозрачность" среды за счет выполнения условия $\sqrt{3}qh \leq 2$. Таким образом, в диссипативном пространстве можно построить монотонные схемы второго порядка аппроксимации (например, использовать DD-схему). Однако это свойство не всегда сохраняется при переходе в исходное пространство для инвариантов $\psi_{1,2}$. Так, например, при $\gamma = \delta = 0$ получаем положительное решение

$$\begin{aligned} (\psi_1^d)_i &= (\lambda + 0,5)^{-1} \left[(\lambda - 0,5) (\psi_1^d)_{i+1} + (Q_1)_{i+1/2} \right] \geq 0; \\ (\psi_2^d)_{i+1} &= (\lambda + 0,5)^{-1} \left[(\lambda - 0,5) (\psi_2^d)_i + (Q_2)_{i+1/2} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

только при условии $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}qh} \geq 0,5$ или $\sqrt{3}qh \leq 2$, что соответствует условию прозрачности среды.

Для ДС-схем условие прозрачности среды $\lambda^d \geq 0,5$ выполняется всегда при выборе параметра δ в виде $\delta = \frac{1}{K\lambda}$, где K — некоторая положительная константа. Из условия положительности ДС-схем $\lambda^d \geq 0,5$ получаем условие на выбор константы K :

$$\lambda^d - 0,5 = \lambda + \delta - 0,5 = \lambda + \frac{1}{K\lambda} - 0,5 \geq \left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{K\lambda}} \right)^2 \geq 0 \quad \text{при } 0 < K \leq 16.$$

Необходимым условием положительности инвариантов $\psi_{1,2}^d$ в диссипативных уравнениях является неотрицательность правых частей $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$. Условие $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} = (Q_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} \mp \gamma q \Delta (Q_{1,2})_i^{n+1} \geq 0$ можно записать в виде

$$(Q_{1,2})_{i+1/2} \mp 0,5\gamma q h^2 \Lambda (Q_{1,2}) \geq 0,$$

где $\Lambda (Q_{1,2}) = \frac{1}{h^2} \left[(Q_{1,2})_{i-1/2} - 2(Q_{1,2})_{i+1/2} + (Q_{1,2})_{i+3/2} \right]$ — вторая разностная производная от правой части. Отсюда видно, что при ограниченной второй производной уменьшение пространственного шага (при $h \rightarrow 0$) гарантирует выполнение условий положительности $\psi_{1,2}^d$. Если эти условия при крупных шагах не выполняются, то для обеспечения условий положительности ДС-схем можно использовать алгоритмы коррекции решения (нелинейные монотонизаторы). Такой подход улучшает монотонные свойства ДС-схем во всем диапазоне изменения оптической плотности. Можно использовать разные варианты построения монотонизаторов. Например:

- 1) при $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} < 0$ полагать $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} = 0$;
- 2) при $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1} < 0$ полагать $\Delta (Q_{1,2})_i = 0$ или $\gamma = 0$;
- 3) при $|\Delta (Q_{1,2})_i| > 2(Q_{1,2})_{i+1/2}$ полагать $\Delta (Q_{1,2})_i = 2(Q_{1,2})_{i+1/2} \text{sign} (\Delta (Q_{1,2})_{i+1})$;
- 4) вычислять разность $\Delta (Q_{1,2})_i$ по формулам TVD-реконструкции, обеспечивающим неотрицательность $(\bar{Q}_{1,2})_{i+1/2}^{n+1}$.

Свойства ДС-схем определяются видом коэффициентов искусственной диссипации δ , γ , в зависимости от которых можно получать разные схемы. Приведем несколько примеров:

- 1) $\delta = 0,5$, $\gamma = 0$ — схема первого порядка аппроксимации, в которой условия положительности (13) всегда выполняются;
- 2) $\delta = 0$, $\gamma = 0$ — ДС-схема второго порядка аппроксимации по пространству без искусственной диссипации, в которой условия положительности (13) выполняются при $\lambda = \lambda^d \geq 0,5$;
- 3) $\delta = \frac{1}{12\lambda}$, $\gamma = \frac{\delta}{q}$ — ДС-схема второго порядка аппроксимации по пространству с искусственной диссипацией, в которой условие положительности $\frac{1}{12\lambda} + \lambda \geq 0,5$ всегда выполняется, а для выполнения условия положительности правой части необходимо применять монотонизатор;

- 4) $\delta = \frac{1}{2} \frac{1 + \exp(-\lambda^{-1})}{1 - \exp(-\lambda^{-1})} - \lambda$, $\gamma = 0$ — ДС-схема второго порядка аппроксимации по пространству, в которой инварианты $\psi_{1,2}^d$ и $\psi_{1,2}$ всегда положительны;
- 5) $\delta = \frac{1}{2} \frac{1 + \exp(-\lambda^{-1})}{1 - \exp(-\lambda^{-1})} - \lambda$, $\gamma = \frac{\delta}{q}$ — ДС-схема второго порядка аппроксимации по пространству (схема УРАЛ), в которой условие положительности $\delta + \lambda \geq 0,5$ всегда выполняется, а для выполнения условия положительности правых частей системы (11) необходимо применять монотонизатор.

Для последних двух схем можно показать, что параметр δ — монотонно возрастающая положительная функция, ограниченная сверху значением 0,5.

По формулам обратного перехода $U = \frac{\sqrt{3}}{2}(\psi_1 + \psi_2)$, $S = \frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)$ получаем ДС-схему в обозначениях U и S :

$$(U_i^d)^{n+1} + (U_{i+1}^d)^{n+1} + 2a_{i+1/2}^{n+1} \Delta (S_i^d)^{n+1} = (f_0)_{i+1/2}^{n+1}; \quad (15)$$

$$(S_i^d)^{n+1} + (S_{i+1}^d)^{n+1} + 2m_{i+1/2}^{n+1} \Delta (U_i^d)^{n+1} = (f_1)_{i+1/2}^{n+1};$$

$$\begin{aligned} (U_{i+1/2})^{n+1} &= (U_{i+1/2}^d)^{n+1} + \sqrt{3}\delta \Delta (S_i^d)^{n+1} - \sqrt{3}\gamma q \Delta (F_1)_i^{n+1}; \\ (S_{i+1/2})^{n+1} &= (S_{i+1/2}^d)^{n+1} + \frac{\delta}{\sqrt{3}} \Delta (U_i^d)^{n+1} - \frac{\gamma q}{\sqrt{3}} \Delta (F_0)_i^{n+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} (U_{i+1/2}^d)^{n+1} &= \frac{(U_i^d)^{n+1} + (U_{i+1}^d)^{n+1}}{2}; & (S_{i+1/2}^d)^{n+1} &= \frac{(S_i^d)^{n+1} + (S_{i+1}^d)^{n+1}}{2}; \\ a &= \sqrt{3}\delta + \frac{1}{qh}; & m &= \frac{\delta}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3qh} = \frac{a}{3}; & F_0^{n+1} &= \frac{1}{q^{n+1}} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right); & F_1^{n+1} &= \frac{1}{c\tau q^{n+1}} S^n; \\ (f_0)_{i+1/2}^{n+1} &= 2 \left[(F_0)_{i+1/2}^{n+1} + \sqrt{3}\gamma q \Delta (F_1)_i^{n+1} \right]; & (f_1)_{i+1/2}^{n+1} &= 2 \left[(F_1)_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\gamma q}{\sqrt{3}} \Delta (F_0)_i^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Система (15) решается потоковой прогонкой. Затем из системы (16) вычисляются значения величин в центрах ячеек $U_{i+1/2}^{n+1}$, $S_{i+1/2}^{n+1}$ и счет переходит на следующий временной шаг.

ДС-схемы, обеспечивающие положительность инвариантов, не гарантируют положительности плотности излучения. Поэтому дополнительно приходится строить алгоритмы, обеспечивающие положительность плотности излучения. Простейшими алгоритмами являются монотонизаторы, описанные выше.

Приведем расчеты модельной задачи в вакууме, имеющей точное решение $U = \begin{cases} U_0 & \text{при } x \leq \sqrt{3}ct, \\ 0 & \text{при } x > \sqrt{3}ct. \end{cases}$

В вакууме получаем разрывное решение с постоянной амплитудой в виде полочки, которое удастся аппроксимировать монотонно, только размазывая разрыв. По ширине зоны размазывания можно судить о точности аппроксимации. Неявные схемы устойчивы при любом числе Куранта, но положительность и монотонность могут нарушаться при разных числах Куранта. Из условий положительности инвариантов (13) $\lambda^d = \lambda = \frac{1}{\sqrt{3}qh} \geq 0,5$ получаем условие на число Куранта $C = \frac{c\tau}{h} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$. В численных расчетах рассмотрены варианты как с выполнением условий положительности при $C > 0,866$, так и с их нарушением при $C < 0,866$.

На рис. 1 приведены профили плотности, полученные при $U_0 = 4110$ по трем схемам с $C = 0,3$ (с нарушением условий положительности). Видно, что наилучший результат дает схема УРАЛ, по которой получается монотонный профиль, более крутой, чем по схеме РОМБ, а точность сравнима с DD-схемой второго порядка аппроксимации. Немонотонный профиль дает только DD-схема.

На рис. 2 приведены профили плотности, полученные с числом Куранта $C = 1$ (с выполнением условий положительности).

Профили плотности при выполнении условий положительности инвариантов монотонны для всех схем, но наилучшие результаты получаются по схемам DD и УРАЛ. При дальнейшем увеличении числа Куранта (соответственно при уменьшении h) решения по всем схемам сближаются и стремятся к точному.

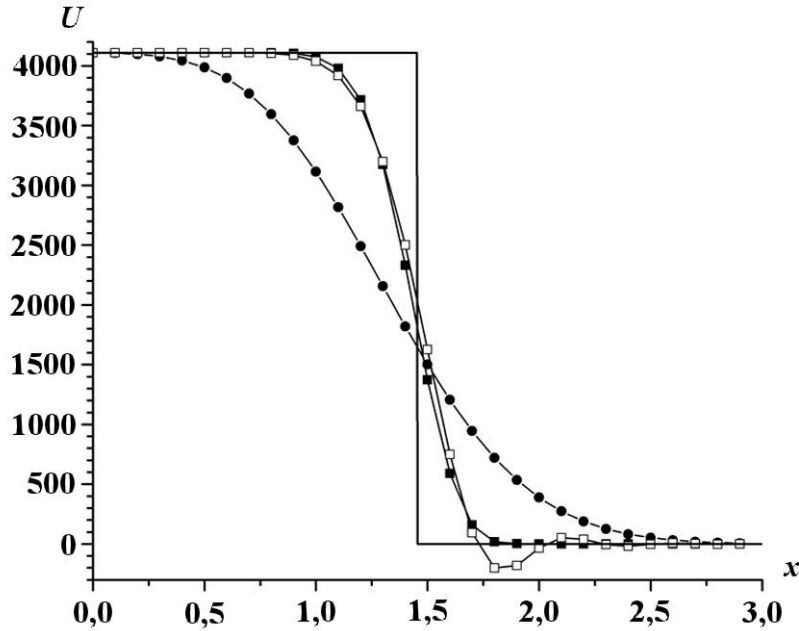


Рис. 1. Профили U при $C = 0,3$: — — точное решение; —■— — схема УРАЛ; —□— — DD-схема; —●— — схема РОМБ

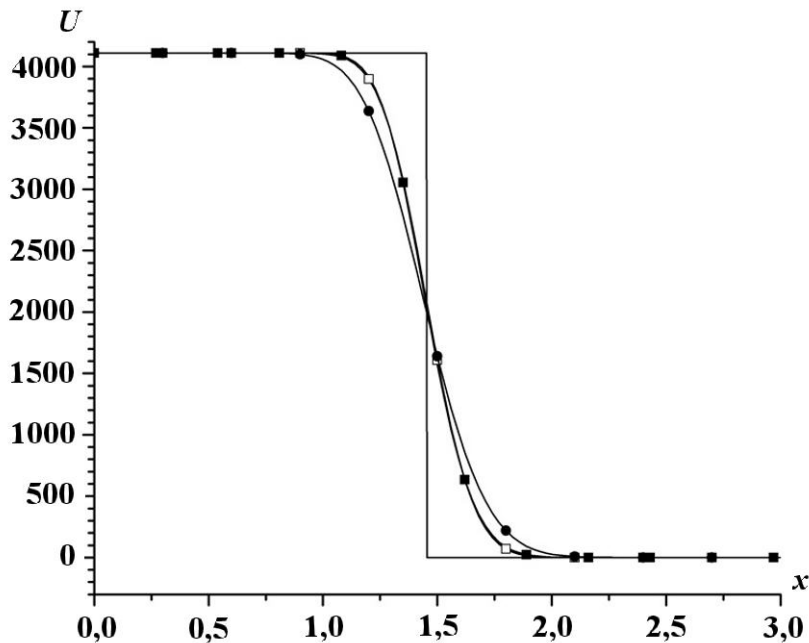


Рис. 2. Профили U при $C = 1$: — — точное решение; —■— — схема УРАЛ; —□— — DD-схема; —●— — схема РОМБ

Построение диссипативной схемы с учетом рассеяния

Неявная разностная аппроксимация системы (1) с учетом рассеяния в рамках одной ячейки имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{S_{i+1}^{n+1} - S_i^{n+1}}{h} + (\alpha_c U)_{i+1/2}^{n+1} &= (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1}; \\ \frac{S_{i+1/2}^{n+1} - S_{i+1/2}^n}{c\tau} + \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{3h} + (\alpha_c S + \alpha_s S)_{i+1/2}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Запишем разностную схему (17) в более компактном виде:

$$U_{i+1/2}^{n+1} + \frac{1}{q_1 h} \Delta S_i^{n+1} = (F_0)_{i+1/2}^{n+1}; \quad S_{i+1/2}^{n+1} + \frac{1}{3qh} \Delta U_i^{n+1} = (F_1)_{i+1/2}^n,$$

где $(F_0)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q_1} \left[\frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + (\alpha_c B)_{i+1/2}^{n+1} \right]$; $(F_1)_{i+1/2}^n = \frac{1}{c\tau q} S_{i+1/2}^n$; $q_1 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c$; $q = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c + \alpha_s$.

Переход к инвариантам Римана $\psi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U \mp S$ в системе (17) и получение характеристической системы отдельных уравнений относительно инвариантов возможно только при $\alpha_s = 0$. В общем случае при $\alpha_s \neq 0$ для получения характеристической системы в инвариантах можно перейти к псевдоинвариантам $\psi_{1,2} = \lambda U \mp S$, $\lambda = \sqrt{\frac{q_1}{3q}}$. Недостатком этого подхода является то, что переход к псевдоинвариантам возможен в предположении слабой зависимости от пространственных координат

отношения q_1/q , зависящего от коэффициентов поглощения и рассеяния, т. е. $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \approx 0$. Это условие выполняется, например, в предельных случаях оптически прозрачных и плотных сред. В оптически прозрачных средах при $\alpha_c \rightarrow 0$, $\alpha_s \rightarrow 0$ получаем $\lambda = \sqrt{\frac{1 + c\tau(\alpha_c + \alpha_s)}{3(1 + c\tau\alpha_c)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \rightarrow 0$. В

оптически плотных средах при $\alpha_c \rightarrow \infty$ получаем $\lambda = \sqrt{\frac{1 + \frac{1 + c\tau\alpha_s}{c\tau\alpha_c}}{3\left(1 + \frac{1}{c\tau\alpha_c}\right)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \rightarrow 0$. В случае

без рассеяния при $\alpha_s = 0$ всегда получаем $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$.

Перейдем к псевдоинвариантам $\psi_{1,2} = \lambda U \mp S$, $\lambda = \sqrt{\frac{q_1}{3q}}$ в предположении $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \approx 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial x} - \sqrt{3qq_1} \psi_1^{n+1} &= \frac{3\lambda}{c\tau} S^n - \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right); \\ \frac{\partial \psi_2^{n+1}}{\partial x} + \sqrt{3qq_1} \psi_2^{n+1} &= \frac{3\lambda}{c\tau} S^n + \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Запишем эту систему в виде

$$\alpha_1 \psi_1^{n+1} - \frac{\partial \psi_1^{n+1}}{\partial x} = f_1^{n+1}; \quad \alpha_1 \psi_2^{n+1} + \frac{\partial \psi_2^{n+1}}{\partial x} = f_2^{n+1}, \quad (18)$$

где $\alpha_1 = \sqrt{3qq_1}$; $f_1^{n+1} = \frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} - \frac{3\lambda}{c\tau} S^n$; $f_2^{n+1} = \frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} + \frac{3\lambda}{c\tau} S^n$.

Правые части системы (18) запишем в виде

$$f_1^{n+1} = \frac{\alpha_1}{c\tau q} \psi_1^n + \frac{\alpha_s}{c\tau q} U^n + \alpha_c B^{n+1}; \quad f_2^{n+1} = \frac{\alpha_1}{c\tau q} \psi_2^n + \frac{\alpha_s}{c\tau q} U^n + \alpha_c B^{n+1},$$

или только относительно инвариантов:

$$f_1^{n+1} = \frac{\alpha_1}{\sigma\tau q} \psi_1^n + \frac{\alpha_s}{\sigma\tau q} \frac{\psi_1^n + \psi_2^n}{2\lambda} + \alpha_c B^{n+1}; \quad f_2^{n+1} = \frac{\alpha_1}{\sigma\tau q} \psi_2^n + \frac{\alpha_s}{\sigma\tau q} \frac{\psi_1^n + \psi_2^n}{2\lambda} + \alpha_c B^{n+1}.$$

Отсюда видно, что из условий положительности инвариантов на предыдущем шаге $\psi_{1,2}^n \geq 0$ следует $f_{1,2}^{n+1} \geq 0$. Используя это, можно при соответствующей разностной аппроксимации $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ получить положительное решение $\psi_{1,2}^{n+1} \geq 0$. Получить монотонное решение намного сложнее.

Покажем, что если для аппроксимации системы (18) использовать St-схему, которая для одного уравнения переноса в плоской геометрии $\frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \alpha N = \frac{1}{2} \alpha_c B + \frac{1}{2} \alpha_s U$ всегда дает монотонное положительное решение, то при рассмотрении системы P_1 -уравнений можно получить немонотонное решение.

Разностная аппроксимация системы (18) St-схемой для инвариантов $(\psi_1)_i = (\psi_1)_{i+1/2}$, $(\psi_2)_{i+1} = (\psi_2)_{i+1/2}$ имеет вид

$$\alpha_1 \psi_{1,i}^{n+1} - \frac{\psi_{1,i+1}^{n+1} - \psi_{1,i}^{n+1}}{h} = f_{1,i+1/2}^{n+1}; \quad \alpha_1 \psi_{2,i+1}^{n+1} + \frac{\psi_{2,i+1}^{n+1} - \psi_{2,i}^{n+1}}{h} = f_{2,i+1/2}^{n+1}.$$

Запишем эту систему в виде

$$\left(\alpha_1 + \frac{1}{h} \right) \psi_{1,i}^{n+1} = \frac{\psi_{1,i+1}^{n+1}}{h} + f_{1,i+1/2}^{n+1}; \quad \left(\alpha_1 + \frac{1}{h} \right) \psi_{2,i+1}^{n+1} = \frac{\psi_{2,i}^{n+1}}{h} + f_{2,i+1/2}^{n+1}.$$

Составим разности этих уравнений в двух соседних точках:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1 + \frac{1}{h} \right) (\psi_{1,i+1}^{n+1} - \psi_{1,i}^{n+1}) &= \frac{1}{h} (\psi_{1,i+2}^{n+1} - \psi_{1,i+1}^{n+1}) + \Delta f_{1,i+1/2}^{n+1}; \\ \left(\alpha_1 + \frac{1}{h} \right) (\psi_{2,i+1}^{n+1} - \psi_{2,i}^{n+1}) &= \frac{1}{h} (\psi_{2,i}^{n+1} - \psi_{2,i-1}^{n+1}) + \Delta f_{2,i-1/2}^{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta f_{1,i+1/2}^{n+1} &= f_{1,i+3/2}^{n+1} - f_{1,i+1/2}^{n+1} = \\ &= \frac{1}{\sigma\tau q} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_s}{2\lambda} \right) (\psi_{1,i+1}^n - \psi_{1,i}^n) + \frac{\alpha_s}{2\lambda\sigma\tau q} (\psi_{2,i+2}^n - \psi_{2,i+1}^n) + \alpha_c (B_{i+3/2}^{n+1} - B_{i+1/2}^{n+1}); \\ \Delta f_{2,i-1/2}^{n+1} &= f_{2,i+1/2}^{n+1} - f_{2,i-1/2}^{n+1} = \\ &= \frac{1}{\sigma\tau q} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_s}{2\lambda} \right) (\psi_{2,i+1}^n - \psi_{2,i}^n) + \frac{\alpha_s}{2\lambda\sigma\tau q} (\psi_{1,i}^n - \psi_{1,i-1}^n) + \alpha_c (B_{i+3/2}^{n+1} - B_{i+1/2}^{n+1}). \end{aligned}$$

Рекуррентность счета позволяет показать, что монотонный профиль ψ_i^n на предыдущем шаге n , например, при $\psi_{i+1}^n - \psi_i^n \geq 0$, переходит в монотонный профиль на данном шаге, $\psi_{i+1}^{n+1} - \psi_i^{n+1} \geq 0$, при выполнении условий на границах для обоих инвариантов $\psi_{1,I}^{n+1} - \psi_{1,I-1}^{n+1} \geq 0$, $\psi_{2,i=1}^{n+1} - \psi_{2,i=0}^{n+1} \geq 0$ и условий $B_{i+1/2}^{n+1} - B_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$ во всех точках разностной сетки. При этом оба инварианта должны быть одновременно монотонно возрастающими или монотонно убывающими, если не рассматривать тривиальный случай постоянных инвариантов. Сумма и разность двух монотонно возрастающих или монотонно убывающих функций будет также монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией. Складывая и вычитая инварианты, по формулам обратного перехода $U = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2\lambda}$,

$S = \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}$ получаем выполнение свойства монотонности для плотности и потока излучения.

При разных знаках разностей на границах $\psi_{1,I}^{n+1} - \psi_{1,I-1}^{n+1}$, $\psi_{2,i=1}^{n+1} - \psi_{2,i=0}^{n+1}$ гарантировать знакопостоянство инвариантов невозможно. В этом случае можно получить немонотонности в плотности и

потоке излучения даже в St-схеме первого порядка аппроксимации. Например, при $\alpha_c = 0$, $\alpha_s = 0$ (в вакууме) и разных знаках разностей $\psi_{1,I}^{n+1} - \psi_{1,I-1}^{n+1}$, $\psi_{2,i=1}^{n+1} - \psi_{2,i=0}^{n+1}$ у границ оба инварианта могут быть знакопостоянными, но один — монотонно возрастающим, а второй — монотонно убывающим. Это приводит к немонотонности плотности и потока излучения.

Отсюда вытекают три утверждения для St-схемы в P_1 -приближении:

Утверждение 1. В P_1 -приближении монотонность плотности и потока излучения получается при одинаковых знаках разностей $\psi_{1,I}^{n+1} - \psi_{1,I-1}^{n+1}$, $\psi_{2,i=1}^{n+1} - \psi_{2,i=0}^{n+1}$ у границ.

Утверждение 2. В вакууме при разных знаках разностей $\psi_{1,I}^{n+1} - \psi_{1,I-1}^{n+1}$, $\psi_{2,i=1}^{n+1} - \psi_{2,i=0}^{n+1}$ у границ один инвариант монотонно возрастает, а второй монотонно убывает, что может приводить к немонотонности плотности и потока излучения.

Утверждение 3. В реальной среде при $\alpha_c \neq 0$, $\alpha_s \neq 0$ и разных знаках разностей $\psi_{1,I}^{n+1} - \psi_{1,I-1}^{n+1}$, $\psi_{2,i=1}^{n+1} - \psi_{2,i=0}^{n+1}$ у границ в зависимости от знака выражения $B_{i+1/2}^{n+1} - B_{i-1/2}^{n+1}$ можно получить немонотонность в одном из инвариантов, что приведет к немонотонности плотности и потока излучения.

Из этих утверждений следует, что получение монотонного решения в P_1 -системе даже в одномерном плоском случае — непростая задача, которая требует на каждом шаге проверять условия по инвариантам у границ. Инварианты у границ приходится вычислять специально на каждой итерации, так как в окончательной разностной системе они не присутствуют.

В средах с рассеянием схема УРАЛ имеет вид

$$\begin{aligned} (U_i^d)^{n+1} + (U_{i+1}^d)^{n+1} + 2a_{i+1/2}^{n+1} \Delta (S_i^d)^{n+1} &= (f_0)_{i+1/2}^{n+1}; \\ (S_i^d)^{n+1} + (S_{i+1}^d)^{n+1} + 2m_{i+1/2}^{n+1} \Delta (U_i^d)^{n+1} &= (f_1)_{i+1/2}^{n+1}; \\ (U_{i+1/2})^{n+1} &= (U_{i+1/2}^d)^{n+1} + \frac{\delta}{\lambda} \left[\Delta (S_i^d)^{n+1} - \eta \Delta (F_1)_i^n \right]; \\ (S_{i+1/2})^{n+1} &= (S_{i+1/2}^d)^{n+1} + \delta \lambda \left[\Delta (U_i^d)^{n+1} - \eta \Delta (F_0)_i^{n+1} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (U_{i+1/2}^d)^{n+1} &= \frac{(U_i^d)^{n+1} + (U_{i+1}^d)^{n+1}}{2}; \quad (S_{i+1/2}^d)^{n+1} = \frac{(S_i^d)^{n+1} + (S_{i+1}^d)^{n+1}}{2}; \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{1 + \exp(-\lambda_1^{-1})}{1 - \exp(-\lambda_1^{-1})} - \lambda_1; \\ a &= \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{q_1 h}; \quad m = \delta \lambda + \frac{1}{3q_1 h}; \quad F_0^{n+1} = \frac{1}{q_1} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right); \quad F_1^n = \frac{1}{c\tau q} S^n; \quad \lambda_1 = \frac{1}{h\sqrt{3qq_1}}; \\ \lambda &= \sqrt{\frac{q_1}{3q}}; \quad (f_0)_{i+1/2}^{n+1} = 2 \left[(F_0)_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\delta}{\lambda} \eta \Delta (F_1)_i^n \right]; \quad (f_1)_{i+1/2}^{n+1} = 2 \left[(F_1)_{i+1/2}^{n+1} + \delta \lambda \eta \Delta (F_0)_i^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Для положительности решения в схему УРАЛ введен параметр монотонизации η :

$$\eta_{i+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{при } (f_0)_{i+1/2} > 0 \text{ и } \left| (F_1)_{i+1/2}^{n+1} \right| > \delta \lambda \left| \Delta (F_0)_i^{n+1} \right|; \\ 0 & \text{при } (f_0)_{i+1/2} < 0 \text{ или } \left| (F_1)_{i+1/2}^{n+1} \right| \leq \delta \lambda \left| \Delta (F_0)_i^{n+1} \right|. \end{cases}$$

В качестве примера приведем расчеты тестовой задачи, моделирующей перенос в неоднородной среде с рассеянием, поглощением и функцией Планка. Среда состоит из трех веществ. В первом веществе при $0 \leq x < 1$ коэффициенты имеют вид $\alpha_c = 1$; $\alpha_s = 0,1$; $B = 1000$. Во втором веществе при $1 \leq x < 2$ их значения $\alpha_c = 50$; $\alpha_s = 1$; $B = 10000$. В третьем веществе при $2 \leq x \leq 3$ полагается $\alpha_c = 5$; $\alpha_s = 0,1$; $B = 100$. Граничные условия: слева $U = 4110$, справа $S = 0,5U$.

Эта задача не имеет точного решения, поэтому решение сравнивается с расчетом, полученным на очень подробной сетке из 5 000 ячеек, на которой все схемы дают одинаковый результат. Рассмотрены два варианта расчетов с числом Куранта $C = 0,3$ и $C = 1$.

На рис. 3 приведены профили плотности, полученные по трем схемам с $C = 0,3$. Видно, что наилучший результат дает схема УРАЛ, по которой получается профиль решения более точный, чем по схеме РОМБ, и более монотонный, чем по DD-схеме.

На рис. 4 приведены профили плотности, полученные по трем схемам с числом Куранта $C = 1$. Профили решения, полученные по схемам DD и УРАЛ, практически лежат на "точном" решении,

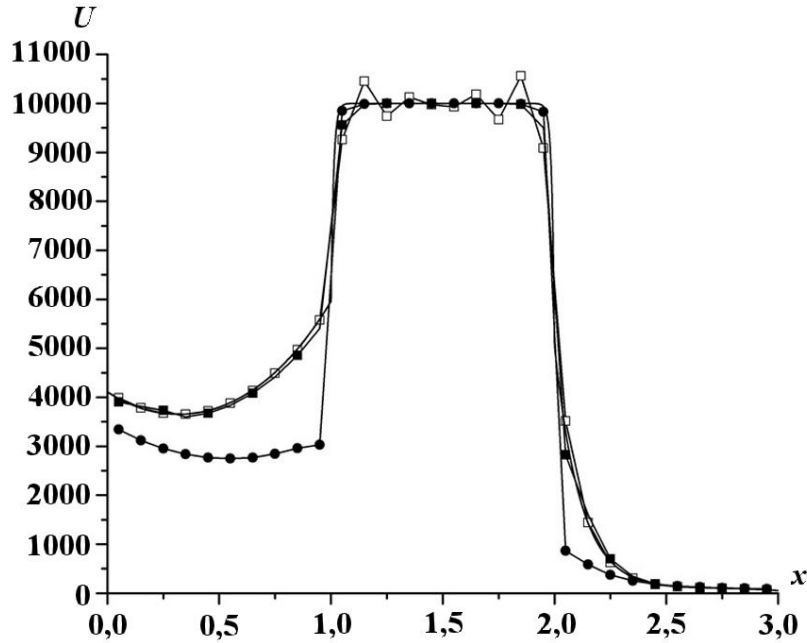


Рис. 3. Профили U при $C = 0,3$: — — расчет на сетке из 5 000 ячеек; —■— — схема УРАЛ; —□— — DD-схема; —●— — схема РОМБ

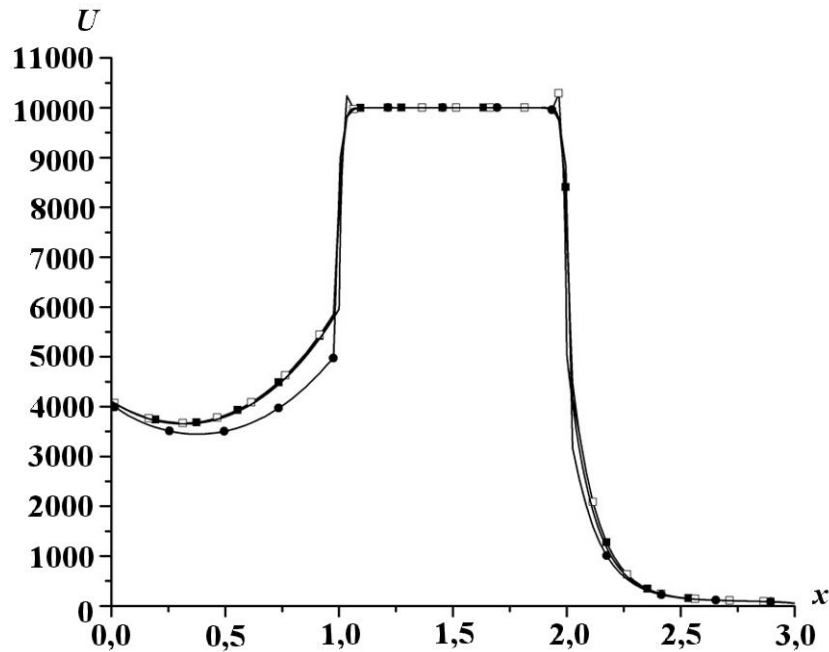


Рис. 4. Профили U при $C = 1$: — — расчет на сетке из 5 000 ячеек (точное решение); —■— — схема УРАЛ; —□— — DD-схема; —●— — схема РОМБ

поэтому все три линии совпадают, за исключением границ между областями, где DD-схема дает немонотонное решение. Схема РОМБ дает монотонное решение, но заметно хуже, особенно в первой области.

Приведенные расчеты модельных задач показали, что введение в соотношения связи как плотности и потока излучения с предыдущего шага (задача 1, см. рис. 1, 2), так и функции Планка (задача 2, см. рис. 3, 4) улучшает точность получаемого решения без нарушения свойства монотонности.

Заключение

В данной работе предложена новая схема второго порядка аппроксимации по пространству (схема УРАЛ) с улучшенными монотонными свойствами. Для ее построения используется введение диссипативных соотношений связи с учетом функции Планка, плотности и потока излучения как с данного, так и предыдущего шага. Для отдельного изучения влияния учета функции Планка в соотношениях связи, а также плотности и потока с предыдущего шага приведены две модельные задачи, на которых показана необходимость учета этих функций, а также преимущества по сравнению с известными схемами РОМБ и DD.

Список литературы

1. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А. Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339—347.
Gadzhiev A. D., Pisarev V. N., Shestakov A. A. Metod rascheta dvumernykh zadach teploprovodnosti na neortogonalnykh setkakh // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1982. T. 22, N 2. S. 339—347.
2. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Рыкованова В. В., Шестаков А. А. Методика и программа ТОМ1 для решения двумерного уравнения теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 1. С. 53—65.
Gadzhiev A. D., Pisarev V. N., Rykovanova V. V., Shestakov A. A. Metodika i programma TOM1 dlya resheniya dvumernogo uravneniya teploprovodnosti // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki. 1985. Vyp. 1. S. 53—65.
3. Гаджиев А. Д., Новаковская С. А., Шестаков А. А. Неявный конечно-объемный метод РОМБ для численного решения двумерного уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 1. С. 3—13.
Gadzhiev A. D., Novakovskaya S. A., Shestakov A. A. Neyavny konechno-ob'emny metod ROMB dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya teploprovodnosti na neregulyarnykh setkakh iz treugolnykh i chetyrekhugolnykh yacheek // Tam zhe. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2007. Vyp. 1. S. 3—13.
4. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод "Ромб" для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Там же. 1989. Вып. 3. С. 66—70.
Gadzhiev A. D., Shestakov A. A. Metod "Romb" dlya resheniya mnogogruppovogo uravneniya perenosa izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Tam zhe. 1989. Vyp. 3. S. 66—70.
5. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Двумерная методика "Ромб" для численного решения уравнений переноса излучения в многогрупповом P_1 -приближении // Там же. 1990. Вып. 1. С. 41—47.
Gadzhiev A. D., Shestakov A. A. Dvumernaya metodika "Romb" dlya chislennogo resheniya uravneniy perenosa izlucheniya v mnogogruppovom P_1 -priblizhenii // Tam zhe. 1990. Vyp. 1. S. 41—47.
6. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Методика численного решения двумерного уравнения переноса излучения в многогрупповом P_1 -приближении // Тез. докл. 3-й мат. конф. пяти ядерных

- центров США и России. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1996. С. 65.
Gadzhiev A. D., Shestakov A. A. Metodika chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa izlucheniya v mnogogruppovom P_1 -priblizhenii // Tez. dokl. 3-y mat. konf. pyati yadernykh tsentrov SShA i Rossii. Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 1996. S. 65.
7. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Об устойчивости и сходимости конечно-разностной схемы "Ромб" для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 1. С. 31–37.
Gadzhiev A. D., Shestakov A. A. Ob ustoychivosti i skhodimosti konechno-raznostnoy skhemy "Romb" dlya sovmestnogo resheniya uravneniya energii i uravneniya perenosa izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1993. Vyp. 1. S. 31–37.
 8. *Шестаков А. А.* Безусловно устойчивые разностные схемы для решения задачи переноса лучистой энергии в диффузионном и P_1 -приближениях // Там же. Вып. 3. С. 47–53.
Shestakov A. A. Bezuslovno ustoychivye raznostnye skhemy dlya resheniya zadachi perenosa luchistoy energii v diffuzionnom i P_1 -priblizheniyakh // Tam zhe. Vyp. 3. S. 47–53.
 9. *Шестаков А. А.* О диффузионных свойствах схемы для P_1 -уравнений // Тр. Межд. семинара по супервычислениям. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 389–394.
Shestakov A. A. O diffuzionnykh svoystvakh skhemy dlya P_1 -uravneniy // Tr. Mezhd. seminaru po supervychisleniyam. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2010. S. 389–394.
 10. *Шестаков А. А.* О диффузионных свойствах схемы РОМБ для P_1 -уравнений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 2. С. 56–62.
Shestakov A. A. O diffuzionnykh svoystvakh skhemy ROMB dlya P_1 -uravneniy // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2011. Vyp. 2. S. 56–62.
 11. *Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Романова Е. М., Шестаков А. А.* Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении // Там же. 2001. Вып. 4. С. 48–59.
Gadzhiev A. D., Seleznev V. N., Romanova E. M., Shestakov A. A. Metodika TOM4-KD dlya matematicheskogo modelirovaniya dvumernykh uravneniy perenosa izlucheniya v mnogogruppovom kvazidiffuzionnom priblizhenii // Tam zhe. 2001. Vyp. 4. S. 48–59.
 12. *Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Анализ некоторых схем для решения уравнения переноса излучения квазидиффузионным методом // Тр. Межд. семинара по супервычислениям. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 118–127.
Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Analiz nekotorykh skhem dlya resheniya uravneniya perenosa izlucheniya kvazidiffuzionnym metodom // Tr. Mezhd. seminaru po supervychisleniyam. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2010. S. 118–127.
 13. *Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Анализ некоторых схем для решения уравнения переноса излучения квазидиффузионным методом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 4. С. 3–15.
Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Analiz nekotorykh skhem dlya resheniya uravneniya perenosa izlucheniya kvazidiffuzionnym metodom // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2011. Vyp. 4. S. 3–15.
 14. *Грабовенская С. А., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Конечно-объемная схема ГРОМ для решения переноса излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2014. Вып. 3. С. 47–58.
Grabovenskaya S. A., Zavyalov V. V., Shestakov A. A. Konechno-obemnaya skhema GROM dlya resheniya perenosa izlucheniya kvasidiffuzionnym metodom // Tam zhe. 2014. Vyp. 3. S. 47–58.

15. *Шестаков А. А.* Принцип максимума, минимума для системы переноса лучистой энергии в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 2. С. 73–74.
Shestakov A. A. Printsip maksimuma, minimuma dlya sistemy perenosa luchistoy energii v P_1 -priblizhenii // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 1993. Vyp. 2. S. 73–74.
16. *Гаджиев А. Д., Вершинская А. С., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-реконструкции для построения монотонной и второго порядка схемы РОМБ решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Тез. докл. Межд. семинара по супервычислениям. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2008. С. 45.
Gadzhiev A. D., Verzhinskaya A. S., Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Primenenie TVD-rekonstruktsii dlya postroeniya monotonnoy i vtorogo poryadka skhemy ROMB resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Tez. dokl. Mezhd. seminaro po supervychisleniyam. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2008. S. 45.
17. *Гаджиев А. Д., Вершинская А. С., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 21–36.
Gadzhiev A. D., Verzhinskaya A. S., Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 2009. Vyp. 2. S. 21–36.
18. *Вершинская А. С., Шестаков А. А.* Исследование порядка численной сходимости TVD-схемы для решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Там же. 2013. Вып. 1. С. 18–33.
Verzhinskaya A. S., Shestakov A. A. Issledovanie poryadka chislennoy skhodimosti TVD-skhemy dlya resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Tam zhe. 2013. Vyp. 1. S. 18–33.
19. *Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А.* TVD-схема для численного решения переноса излучения в P_1 -приближении // Там же. 2013. Вып. 2. С. 48–55.
Gadzhiev A. D., Koshutin D. A., Shestakov A. A. TVD-skhema dlya chislenного resheniya perenosa izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Tam zhe. 2013. Vyp. 2. S. 48–55.
20. *Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Неявная конечно-объемная схема с TVD-реконструкцией для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Тез. докл. XII Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2014. С. 334.
Gadzhiev A. D., Chubareshko I. S., Shestakov A. A. Neyavnaya konechno-obemnaya skhema s TVD-rekonstruktsiey dlya chislenного resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Tez. dokl. XII Mezhd. konf. "Zababakhinskie nauch. chteniya". Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2014. S. 334.
21. *Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Неявные конечно-объемные TVD-методы для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении // Тез. докл. XIII Межд. конф. "Забабахинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. С. 355.
Gadzhiev A. D., Chubareshko I. S., Shestakov A. A. Neyavnye konechno-obemnye TVD-metody dlya chislenного resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // Tez. dokl. XIII Mezhd. konf. "Zababakhinskie nauch. chteniya". Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2017. S. 355.
22. *Гаджиев А. Д., Чубарешко И. С., Шестаков А. А.* Неявный конечно-объемный TVD-метод для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении //

- Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 2. С. 18–29.
Gadzhiev A. D., Chubaresheko I. S., Shestakov A. A. Neyavny konechno-obemny TVD-metod dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P_1 -priblizhenii // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2017. Vyp. 2. S. 18–29.
23. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Тез. докл. Межд. семинара по супервычислениям. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. С. 33.
Gadzhiev A. D., Zavyalov V. V., Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya kvazidiffuzionnym metodom // *Tez. dokl. Mezhd. seminaro po supervychisleniyam. Sarov: RFYaTs-VNIIEF,* 2009. S. 33.
24. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 3. С. 3–14.
Gadzhiev A. D., Zavyalov V. V., Grabovenskaya S. A., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya kvazidiffuzionnym metodom // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2010. Vyp. 3. S. 3–14.
25. *Шестаков А. А.* О монотонной аппроксимации системы P_1 -уравнений // Тез. докл. XIII Межд. конф. "Забабакхинские науч. чтения". Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. С. 358.
Shestakov A. A. O monotonnoy approksimatsii sistemy P_1 -uravneniy // *Tez. dokl. XIII Mezhd. konf. "Zababakhinskie nauch. chteniya". Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF,* 2017. S. 358.
26. *Шестаков А. А.* К вопросу построения монотонной разностной аппроксимации системы P_1 -уравнений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 1. С. 30–45.
Shestakov A. A. K voprosu postroeniya monotonnoy raznostnoy approksimatsii sistemy P_1 -uravneniy // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2017. Vyp. 1. S. 30–45.
27. *Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А.* DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 4. С. 33–46.
Gadzhiev A. D., Seleznev V. N., Shestakov A. A. DS_n -metod s iskusstvennoy dissipatsiey i VDM-metod uskoreniya iteratsiy dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v kineticheskoy modeli // *Tam zhe.* 2003. Vyp. 4. S. 33–46.

Статья поступила в редакцию 07.05.18.

DIFFERENCE SCHEME "URAL" FOR SOLVING A HYPERBOLIC SYSTEM OF P_1 -EQUATIONS УРАВНЕНИЙ / I. S. Chubaresheko, A. A. Shestakov (FSUE "Acad. E. I. Zababakhin RFNC-VNIITF", Snezhinsk, Chelyabinsk region).

Issues of constructing monotone difference schemes to solve the heat transport equation in the P_1 -approximation are discussed in many papers. This paper offers a new difference scheme that improves the solution monotonicity while approximating the hyperbolic equation. For this purpose, the technique of constructing dissipative schemes for a system of P_1 -equations written in Riemann invariants is used. The specific feature of the new scheme is in accounting the Planck function in expressions describing the relationship between the integral mean values of quantities and the values of quantities at nodes of difference intervals.

Keywords: a transport equation in the P_1 -approximation, difference scheme.