

УДК 519.6

## МОДЕЛИ НАСЫЩЕННО-НЕНАСЫЩЕННОЙ И НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В КОМПЛЕКСЕ ПРОГРАММ "НИМФА"

А. Н. Бахаев, П. А. Машенькин, М. Л. Сидоров  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлено описание моделей насыщенно-ненасыщенной и напорно-безнапорной изотермической фильтрации жидкости в пористых средах. Приведены основные уравнения моделируемых процессов, а также используемые сетки. Показано качественное и количественное согласие результатов на задачах с аналитическими решениями и задачах, рассчитанных по коммерческой программе FEFLOW.

*Ключевые слова:* программный комплекс НИМФА, насыщенно-ненасыщенная фильтрация, напорно-безнапорная фильтрация, верификация, кросс-верификация.

### Введение

За последние десятилетия в связи с интенсивным воздействием человека на гидросферу произошло существенное нарушение естественного гидродинамического и гидротехнического режимов подземных вод — одного из важнейших компонентов окружающей среды. Мелиорация, добыча полезных ископаемых, откачка воды из водоносных горизонтов, создание новых плотин на реках, изменение уровня воды в существующих водохранилищах и целый ряд других факторов приводят к масштабному изменению состояния почвы и подземных вод.

В связи с этим возникает необходимость при выполнении различных мероприятий оценивать последствия такого воздействия. При этом натурные наблюдения и целенаправленные эксперименты, выполняемые для оценки антропогенного влияния, оказываются весьма дорогостоящими и трудно-выполнимыми. Поэтому актуальным становится использование теоретических подходов численных расчетов с применением математических моделей рассматриваемых процессов.

Программный комплекс (ПК) НИМФА [1] создан в РФЯЦ-ВНИИЭФ в ходе реализации проекта "Развитие суперкомпьютеров и грид-технологий", принятого Комиссией при Президенте Российской Федерации по модернизации и технологическому развитию экономики России в 2010—2012 годах.

ПК НИМФА предназначен для моделирования многокомпонентной многофазной фильтрации и переноса примесей подземными водами в подземном пространстве со сложной геологической структурой. Программа ориентирована на решение задач с помощью полномасштабного комплексного моделирования на современных высокопараллельных суперЭВМ (десятки тысяч процессоров).

В ПК НИМФА для расчета гидродинамики подземных вод была реализована модель напорной фильтрации [1] (все поры породы заполнены водой). Однако на практике большой класс течений подземных вод (образование депрессионных воронок вблизи карьеров и откачивающих скважин, сезонные изменения уровня грунтовых вод и т. д.) плохо описывается этой моделью. Для расчета таких течений используются две модели — насыщенно-ненасыщенной и напорно-безнапорной фильтрации.

Модель насыщенно-ненасыщенной фильтрации используют, когда рассматривается зона, в которой часть пор заполнена водой, а часть — воздухом.

Модель напорно-безнапорной фильтрации представляет собой упрощение модели насыщенно-ненасыщенной фильтрации: зоны с водой и воздухом нет, а между сухой и мокрой зонами существует четкая граница.

### Математические модели фильтрации

**Насыщенно-ненасыщенная фильтрация.** Математическая модель насыщенно-ненасыщенной фильтрации жидкости в пористой среде описывается уравнением Ричардса [2]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \left[ \frac{\theta(\psi)}{m} \rho g (m\alpha + \beta) + \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right] = \operatorname{div} \left( \rho \frac{K k_r(\psi)}{\mu} \nabla (\psi + z) \right) + Q. \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] — плотность жидкости;  $g$  [м/сут<sup>2</sup>] — ускорение свободного падения;  $\psi = P/\rho g$  [м] — высота всасывания, где  $P$  [бар] — давление;  $\theta$  — влагосодержание;  $m$  — пористость;  $\alpha$  — сжимаемость жидкости;  $\beta$  — сжимаемость породы;  $K$  [м/сут] — коэффициент фильтрации;  $k_r(\psi)$  — относительная проницаемость;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $z$  [м] — вертикальная координата;  $Q$  [кг/сут] — массовые источники и стоки.

В случае, когда пористая среда и вода — несжимаемые, уравнение (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{K k_r(\psi)}{\mu} \nabla (\psi + z) \right) + Q.$$

Для численного решения уравнения (1) необходимы замыкающие соотношения (модели водоудерживающей способности почвы). Для этого используют алгебраические уравнения связи высоты всасывания  $\psi$  с влагосодержанием  $\theta$ , называемые капиллярными соотношениями. Также нужны соотношения, связывающие коэффициент фильтрации  $K(\psi)$  и высоту всасывания  $\psi$ .

В ПК НИМФА были реализованы следующие модели зависимостей  $\theta(\psi)$  и  $K(\psi)$  (данные модели используются, например, в HYDRUS [3]):

- Брукса—Кори (Brooks and Corey);
- ван Генухтена-Муалема (van Genuchten-Mualem);
- Вогела—Цислерова (Vogel and Cislerova);
- Косуги (Kosugi);
- Гарднера—Рийтема (Gardner and Rijtema).

Для примера приведем одну из самых широко используемых моделей ван Генухтена-Муалема:

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + |\alpha\psi|^n)^m}, & \psi < 0; \\ \theta_s, & \psi \geq 0; \end{cases}$$

$$K(\psi) = K_s S_{e,s}^l \left[ 1 - \left( 1 - S_{e,s}^{1/m} \right)^m \right]^2, \quad S_{e,s} = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r},$$

где  $S_{e,s}$  — эффективная насыщенность;  $m = 1 - 1/n$ ,  $n > 1$ ;  $\theta_r$  и  $\theta_s$  — остаточное (т. е. не извлекаемое гравитационным путем) влагосодержание и влагосодержание при полном насыщении соответственно;  $K_s$  [м/сут] — коэффициент фильтрации в условиях насыщения;  $\alpha$  [м<sup>-1</sup>] — параметр модели, функция размера пор;  $n$  — коэффициент распределения размеров пор;  $l$  — параметр связности пор.

**Напорно-безнапорная фильтрация.** Модель напорно-безнапорной фильтрации является частным случаем модели насыщенно-ненасыщенной фильтрации. В FEFLOW [2] подобная модель называется моделью фильтрации в пористой среде со свободной поверхностью с псевдоненасыщенными условиями.

Вводится в рассмотрение величина псевдонасыщенности\*  $S_p^e$ , которая определяется по следующей формуле:

$$S_p^e = S_p^e(\psi) = \frac{\Omega^{e,f}(\psi)}{\Omega^e},$$

где  $\Omega^e(\psi)$  [м<sup>3</sup>] — объем ячейки (индекс  $e$  обозначает принадлежность ячейке);  $\Omega^{e,f}(\psi)$  [м<sup>3</sup>] — объем жидкости в ячейке (индекс  $f$  означает заполнение флюидом).

Возможны три состояния насыщенности ячейки  $e$  (на рис. 1 ячейка выделена красным контуром, столб жидкости показан голубым цветом):

- полностью насыщенная, если в ней  $\psi \geq 0$ . Тогда  $\Omega^{e,f} = \Omega^e$  и  $S_p^e \equiv 1$ ;
- частично насыщенная, если  $-h^e < \psi < 0$ , где  $h^e$  — высота ячейки;
- полностью ненасыщенная (сухая), если  $\psi \leq -h^e$ .

Практически есть возможность задать минимальную толщину жидкости в ячейке (minimum filling height)  $h_r^e = 1$  мм (см. рис. 1, в) как предел при  $\Omega^{e,f} \rightarrow \Omega_r^{e,f}$ . То есть  $h_r^e$  — это высота водного столба в ячейке, которая соответствует минимальной влагонасыщенности. Величина  $h_r^e$  используется для того, чтобы вычислить остаточную насыщенность  $S_{p,r}^e = \Omega_r^{e,f} / \Omega^e > 0$ .

Функция насыщенности определяется следующим образом:

$$S_p^e = \begin{cases} 1, & \psi \geq 0; \\ 1 + \frac{(1 - S_{p,r}^e)\psi}{h^e}, & -h^e < \psi < 0; \\ S_{p,r}^e, & \psi \leq -h^e, \end{cases}$$

где  $h^e$  [м] — высота ячейки;  $\psi$  [м] — высота всасывания.

Зависимость высоты всасывания  $\psi$  от насыщенности  $S_p^e$  приведена на рис. 2.

Таким образом, влагосодержание в ячейке определяется по следующей формуле:

$$\theta = \begin{cases} m, & \psi \geq 0; \\ m \left[ 1 + \frac{(1 - S_{p,r}^e)\psi}{h^e} \right], & -h^e < \psi < 0; \\ m S_{p,r}^e, & \psi \leq -h^e. \end{cases}$$

Предположения, касающиеся коэффициента фильтрации, следующие:

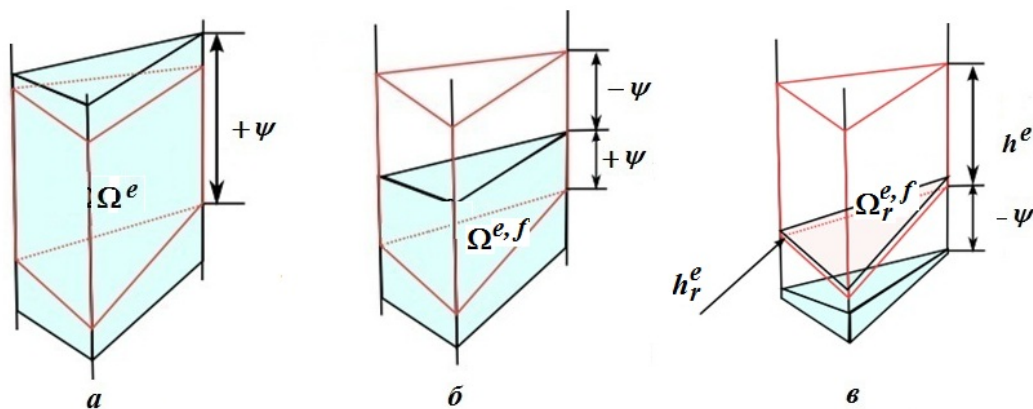


Рис. 1. Три варианта насыщенности  $S_p^e$ : а — насыщенная ячейка; б — частично насыщенная; в — полностью ненасыщенная (сухая) ячейка

\*Всюду далее будем использовать термин *насыщенность*.

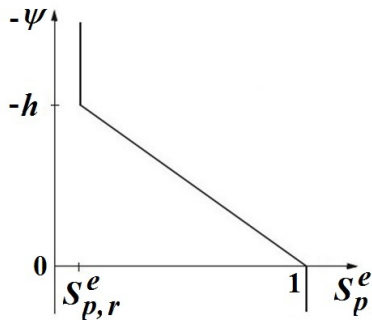


Рис. 2. Линейная зависимость между высотой всасывания  $\psi$  и насыщенностью  $S_p^e$  для ячейки  $e$  высотой  $h^e$

где  $K_r^{\min}$  — минимальное значение относительной проницаемости среды, используется как параметр модели.

Таким образом, описанная модель напорно-безнапорной фильтрации имеет два параметра, которые могут быть заданы пользователем:  $h_r$  и  $K_r^{\min}$ .

- в ненасыщенной зоне он является малой величиной по отношению к насыщенной зоне (его значение задается пользователем);
- для заданной ячейки коэффициент фильтрации меняется линейно от минимального значения (влажность близко к нулю) до максимального (полное заполнение водой ячейки) по мере роста уровня грунтовых вод.

Коэффициент фильтрации определяется следующим образом:

$$K(\psi) = K_r(\psi)K_s.$$

Здесь относительная проницаемость задается выражением

$$K_r(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi \geq 0; \\ \max(S, K_r^{\min}), & \psi < 0, \end{cases}$$

### Начальные и граничные условия

В качестве начальных условий могут задаваться распределение высоты всасывания в пористой среде

$$\psi(x, y, z, 0) = \psi_0(x, y, z)$$

и (или) распределение гидростатического напора

$$H(x, y, z, 0) = H_0(x, y, z).$$

Могут быть заданы граничные условия, зависящие от координат и времени:

- 1) первого рода — типа Дирихле. Данное граничное условие определяет напор на участке границы  $\Gamma$  расчетной области:

$$\psi(x, y, z, t)|_{\Gamma} = \psi_{\Gamma}(x, y, z, t);$$

- 2) второго рода — Неймана. Данное условие позволяет задать поток жидкости  $\vec{q}_{\Gamma}$  через границу  $\Gamma$ :

$$\vec{V}(x, y, z, t) \times \vec{n}|_{\Gamma} = \vec{q}_{\Gamma}(x, y, z, t),$$

где  $\vec{V}$  — скорость жидкости.

- 3) третьего рода — линейная комбинация условий первого и второго рода.

Граничные условия могут задаваться на частях граничной поверхности области моделирования (кровля, подошва, боковая поверхность). По умолчанию на всех границах и для всех моделируемых процессов задано условие второго рода — производная по нормали от величины равна нулю (т. е. для процесса фильтрации  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ ).

### Дискретизация уравнений

Расчетная методика решения нестационарных и стационарных задач изотермической насыщенно-ненасыщенной и напорно-безнапорной фильтрации в пористом пласте построена на основе метода конечного объема, неструктурированной сетки и записи неявных аппроксимаций в дельта-форме. Линеаризация системы конечно-объемных уравнений производится относительно приращения давления. Система линейных алгебраических уравнений решается в параллельном режиме методами, реализованными в библиотеке LParSol [4], разработанной в РФЯЦ-ВНИИЭФ. Сходимость итераций обеспечивается автоматическим выбором шага по времени. В общем случае решаются трехмерные задачи. В частном случае можно решать двумерные задачи в плоскости  $(x, y)$  и вертикальном разрезе  $(x, z)$ .

Переписываем уравнение (1), используя следующие формулы:

$$\frac{\partial(\psi + z)}{\partial t} = \frac{\partial(\psi)}{\partial t}; \quad \psi = \frac{P}{\rho g}; \quad S_0 = \beta + \frac{\alpha}{m}; \quad K = \rho \frac{K K_r(\psi)}{\mu}.$$

В результате имеем

$$S_0 \theta \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} \left( K (\nabla P - \rho \vec{g}) \right) + Q. \quad (2)$$

Интегрируем уравнение (2) по объему ячейки  $\Delta V_k$ , ограниченной поверхностью  $\Sigma_k = \bigcap_{f=1}^F \Delta S_f$ , и, используя формулу Гаусса—Остроградского, записываем интегральный закон уравнения фильтрации:

$$\int_{\Delta V_k} \left( S_0 \theta \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dV = \int_{\Sigma_k} [K (\nabla P - \rho \vec{g})] \vec{n} dS + \int_{\Delta V_k} Q dV. \quad (3)$$

Далее, используя квадратурные формулы, заменяем интегральные выражения разностными. При интегрировании будем использовать теорему о среднем. В качестве среднего значения функции по объему примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани — ее значение в центре грани. Тогда уравнение (3) в полудискретном виде запишется так:

$$\left( S_0 \theta \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_k \Delta V_k = \sum_{f=1}^F [K (\nabla P - \rho \vec{g}) \vec{n}]_f \Delta S_f + (Q \Delta V)_k. \quad (4)$$

Запишем дискретизацию производной влагосодержания по времени  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  и производной давления по времени  $\frac{\partial P}{\partial t}$  в уравнении (4) по схеме первого порядка аппроксимации:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau^n}; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau^n}, \quad (5)$$

где  $n$  — шаг по времени.

Подставляя выражения для производных (5) в (4) и аппроксимируя разностный оператор по верхнему временному слою, получаем следующую неявную схему:

$$\left( S_0 \theta \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau^n} + \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau^n} \right)_k \Delta V_k = \sum_{f=1}^F [K (\nabla P - \rho \vec{g}) \vec{n}]_f \Delta S_f + (Q \Delta V)_k. \quad (6)$$

Введем следующее обозначение:

$$\Lambda(P) = \sum_{f=1}^{N_f} [K (\nabla P - \rho \vec{g})]_f \vec{n}_f \Delta S_f. \quad (7)$$

Будем искать решение на новом временном слое по неявной схеме методом итераций. Тогда разностное уравнение (6) с учетом обозначения (7) примет вид

$$\left( S_0 \theta \frac{P^{\gamma+1} - P^n}{\tau^n} + \frac{\theta^{\gamma+1} - \theta^n}{\tau^n} \right)_k \Delta V_k = \Lambda(P^{\gamma+1}) + (Q \Delta V)_k,$$

где  $\gamma$  — номер итерации.

Значения  $\theta^{\gamma+1}$  и пространственного оператора  $\Lambda(P^{\gamma+1})$  определяются с помощью линеаризации по Ньютону:

$$\theta^{\gamma+1} = \theta^\gamma + \left( \frac{\partial \theta}{\partial P} \right)^\gamma \Delta P; \quad \Lambda(P^{\gamma+1}) = \Lambda(P^\gamma) + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial P} \right)^\gamma \Delta P; \quad \Delta P = P^{\gamma+1} - P^\gamma. \quad (8)$$

Рассмотрим слагаемое  $\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial P}\right)^\gamma \Delta P$  из второй формулы (8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial P}\right)^\gamma \Delta P &= \Lambda(P^{\gamma+1}) - \Lambda(P^\gamma) = \\ &= \left\{ \sum_{f=1}^{N_f} [K(\nabla P - \rho \vec{g})]_f \vec{n}_f \Delta S_f \right\}^{\gamma+1} - \left\{ \sum_{f=1}^{N_f} [K(\nabla P - \rho \vec{g})]_f \vec{n}_f \Delta S_f \right\}^\gamma. \end{aligned}$$

Взяв нелинейные коэффициенты с предыдущего слоя, получим:

$$\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial P}\right)^\gamma \Delta P = \sum_{f=1}^{N_f} [K^\gamma (\text{grad } \Delta P)]_f \vec{n}_f \Delta S_f.$$

Таким образом, разностная схема имеет вид

$$\frac{\Delta V_k}{\tau^n} \left[ \left(\frac{\partial \theta}{\partial P}\right)^\gamma + S_0 \theta^\gamma \right] \Delta P - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial P}\right)^\gamma \Delta P = \frac{\theta^n - \theta^\gamma}{\tau^n} \Delta V_k + \Lambda(P^\gamma) + (Q \Delta V)_k + S_0 \theta^\gamma \frac{P^\gamma - P^n}{\tau^n} \Delta V_k,$$

где  $(Q \Delta V)_k$  [кг/м<sup>3</sup>] — приток массы флюида в ячейку за единицу времени. Это так называемая дельта-форма разностного уравнения, где искомое решение является приращением давления в ячейках разностной сетки, а правая часть разностного уравнения является невязкой, т. е. погрешностью разностной аппроксимации уравнения фильтрации.

При определении потоков через грани ячеек в схеме (6) используется метод отложенной коррекции [1]. Относительная проницаемость  $K_r$  для общей грани двух ячеек определяется противоположным методом, т. е.  $K_r$  берется из той ячейки, где больше гидростатический напор. Такой способ выбора  $K_r$  необходим для уменьшения осцилляций решения.

### Верификация моделей фильтрации в ПК НИМФА

При разработке расчетного кода этапом, предворяющим применение кода на практике, является верификация численной модели. Верификация заключается в сравнении результата, полученного по этой модели, с известными референтными решениями (аналитическими, численными или полученными экспериментальным путем). Для тестирования моделей насыщенно-ненасыщенной и напорно-безнапорной фильтрации в ПК НИМФА использовались тестовые задачи, имеющие аналитическое решение, и задачи, не имеющие аналитического решения, но численно исследованные ранее с помощью некоторых комплексов программ. В качестве матрицы верификации использовался набор из 10 тестов.

Сравнение результатов для тестов с аналитическим решением проводилось с помощью относительной погрешности  $L_1$ , рассчитываемой по формуле

$$L_1 = \frac{\sum_i |f_i^{analit} - f_i^{calc}|}{\sum_i |f_i^{analit}|} \cdot 100 \%,$$

где суммирование выполняется по всем ячейкам области.

Расчеты задач из матрицы верификации показывают, что погрешность численного решения в задачах с аналитическим решением в основном не превышает 2,2%.

Для задач, не имеющих аналитического решения, сравнение проводилось с результатами расчетов этих задач, полученными по другим программным комплексам.

Приведем результаты некоторых тестов.

**Одномерная нестационарная ненасыщенная фильтрация в вертикальном столбе сухого грунта.** Описание теста приведено в [5]. Данная задача не имеет аналитического решения и решается численно. Необходимо получить профиль высоты всасывания от вертикальной координаты  $\psi(z, t)$  в момент времени  $t = 1$  сут и сравнить его с результатами, полученными по FEFLOW [2].

В задаче используется модель ван Генухтена-Муалема [2] с параметрами, приведенными в [5].

Задача решалась на регулярной сетке с шагами по пространству  $\Delta z = 0,5; 2,5$  см. Количество ячеек составило 200 и 40 соответственно. Шаг по времени выбирался автоматически.

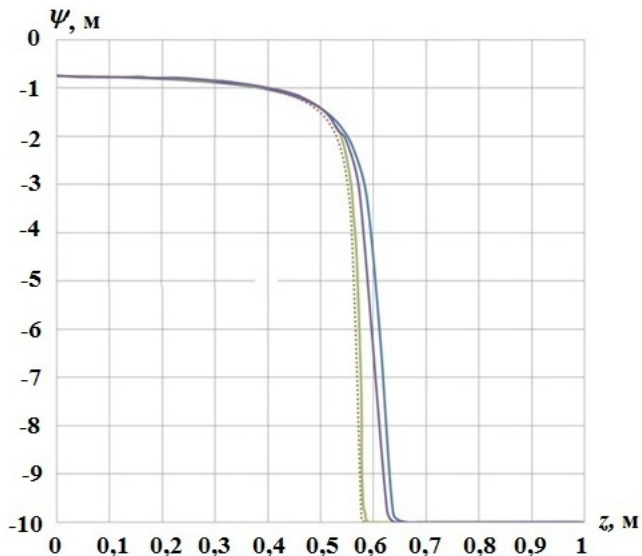


Рис. 3. Профили  $\psi$  в расчетах ПК НИМФА и FEFLOW для грубой и подробной сеток: —  $\Delta z = 2,5$  см, НИМФА; ..... —  $\Delta z = 0,5$  см, НИМФА; —  $\Delta z = 0,5$  см, FEFLOW; —  $\Delta z = 2,5$  см, FEFLOW

На рис. 3 показаны профили высоты всасывания  $\psi$  на момент времени  $t = 1$  сут для разных шагов сетки в сравнении с профилями, полученными по FEFLOW. Из рисунка видно их хорошее качественное согласие. Относительная погрешность  $L_1$  между численными решениями FEFLOW и ПК НИМФА составила не более 0,27%. Время счета задачи на сетке в 200 ячеек равно 0,73 с.

**Задача о капиллярном барьере.** Капиллярные барьеры образуются в ненасыщенных условиях, когда слой мелкозернистых пород лежит на слое крупнозернистых отложений. Барьер возникает из-за разной проницаемости мелкозернистых и крупнозернистых пород в ненасыщенных условиях.

В расчетной области присутствуют два наклонных пласта толщиной 0,5 м каждый. Верхний пласт состоит из мелкозернистых, а нижний — из крупнозернистых песков. Угол наклона капиллярного барьера составляет 5%. Полная постановка теста приведена в [2].

Данная задача позволяет рассмотреть следующие вопросы:

- орошение сильно осушенных грунтов, что обычно вызывает большие трудности с вычислительной точки зрения;
- сильная неоднородность гидравлических параметров пластов;
- образование насыщенной зоны внутри расчетной области.

Аналитическое решение для данной задачи получается по формуле Росса [6], которая дает выражение отклонения потока капиллярным барьером. При тестировании необходимо сравнить расчетное отклонение потока с аналитическим решением и провести кросс-верификацию с программой FEFLOW [2].

При моделировании задачи о капиллярном барьере в ПК НИМФА использовалась гексаэдральная расчетная сетка, содержащая 1600 ячеек (рис. 4). Была использована сетка с измельчением к поверхности раздела пластов. При построении сетки в ПК НИМФА расчетная область была разделена на 4 пласта: верхний и нижний толщиной 0,45 м и два средних толщиной 0,05 м. Для дискретизации каждого из этих пластов используется одинаковое количество сеточных слоев по вертикали. Параметры сетки следующие: шаг по оси  $X$  — 2 м; шаг по оси  $Z$  во втором и третьем слоях — 0,00625 м, в первом и четвертом слоях — 0,05625 м.

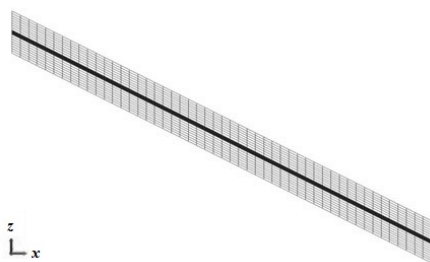


Рис. 4. Сетка со сгущением к поверхности раздела пластов

На рис. 5 показаны результаты расчета насыщенности по ПК НИМФА и по программе FEFLOW, демонстрирующие близкое совпадение структуры насыщенности в расчетной области.

На рис. 6 показаны рассчитанные отношения потока (просачивания) через барьер (поверхность раздела мелкозернистой и крупнозернистой пород) к инфильтрации в сравнении с аналитической формулой Росса. Можно констатировать качественное соответствие результатов аналитическому решению и количественное — результатам, полученным с помощью программы FEFLOW [3]. При этом решение по ПК НИМФА проявляет монотонный характер, в то время как в решении FEFLOW наблюдаются осцилляции. Время счета задачи на сетке в 1 600 ячеек составило 26,2 с.

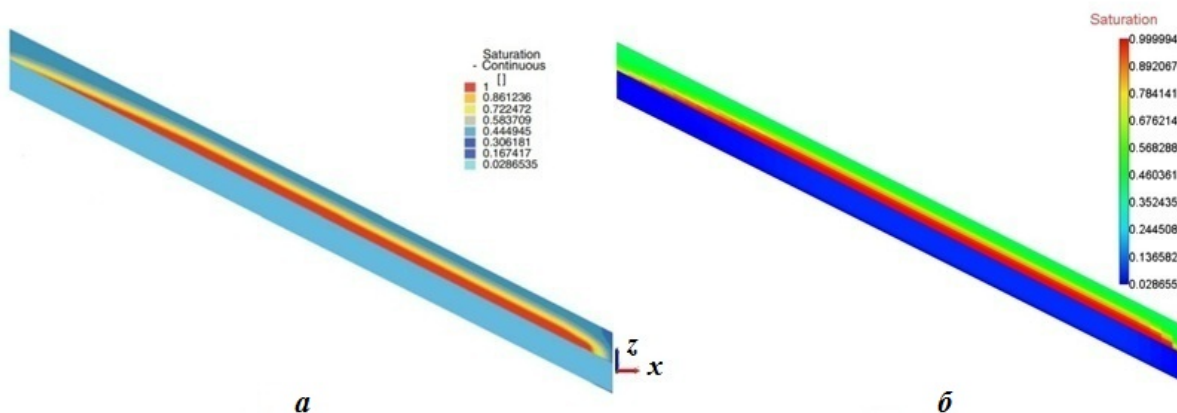


Рис. 5. Насыщенность, рассчитанная с помощью программы FEFLOW (а) и ПК НИМФА (б)

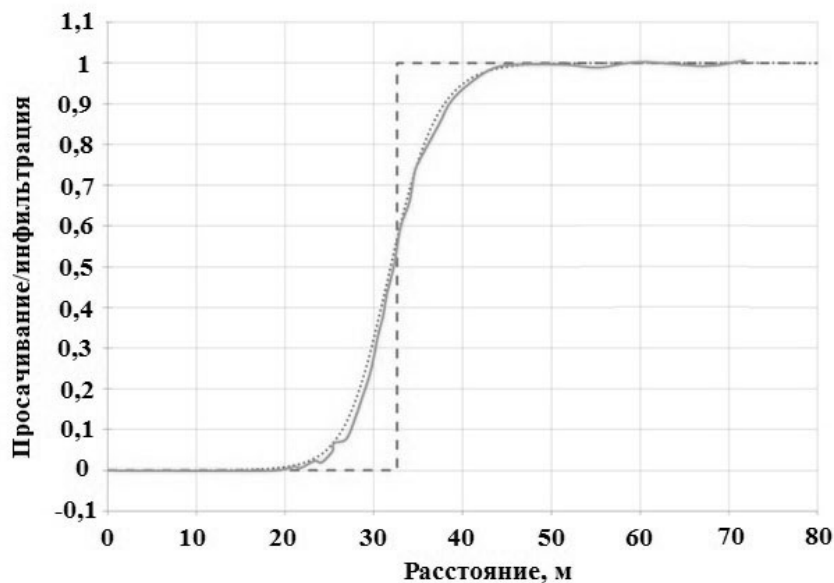


Рис. 6. Отношение просачивания через барьер к инфильтрации: — — — по формуле Росса; ····· — по ПК НИМФА; — — — по программе FEFLOW

**Задача Полубариновой-Кочиной о безнапорной фильтрации через тело дамбы.** Постановка задачи приведена в [7]. Исследуется двумерная стационарная фильтрация через тело дамбы (прямоугольную перемычку). Необходимо получить сопоставление расходов жидкости, протекающей через перемычку, посчитанных с применением численной модели и аналитически, а также сопоставление расчетных и аналитических высот участков высачивания в нижнем бьефе перемычки. Постановка задачи схематично приведена на рис. 7.



Использовались последовательность сеток в 10, 20 и 40 ячеек по осям  $X$  и  $Z$ , по оси  $Y$  задавалась одна ячейка (ширина дамбы размером 0,25 м). Данная задача является стационарной. В ПК НИМФА она рассчитывалась методом установления.

Полученные результаты приведены в таблице, где  $Q$  — расход через перемычку; погрешность определяется по формуле  $\frac{|Q_a - Q_n|}{Q_a} \cdot 100\%$  ( $Q_a$  — расход, полученный аналитически;  $Q_n$  — расход, полученный численно). Из таблицы следует сходимость численных результатов к аналитическому значению. Максимальная погрешность (на самой грубой сетке  $10 \times 10$ ) по расходу жидкости через перемычку составляет 0,88 %, а на сетке  $40 \times 40$  — 0,33 %.

На рис. 8 показано распределение насыщенности в перемычке. Размер участка высачивания при данных граничных условиях в соответствии с [7] равен 2 м. Размер участка высачивания, полученный численно с помощью ПК НИМФА, равен 2,5 м. Время счета задачи на сетке из 1600 ячеек составило 0,86 с.

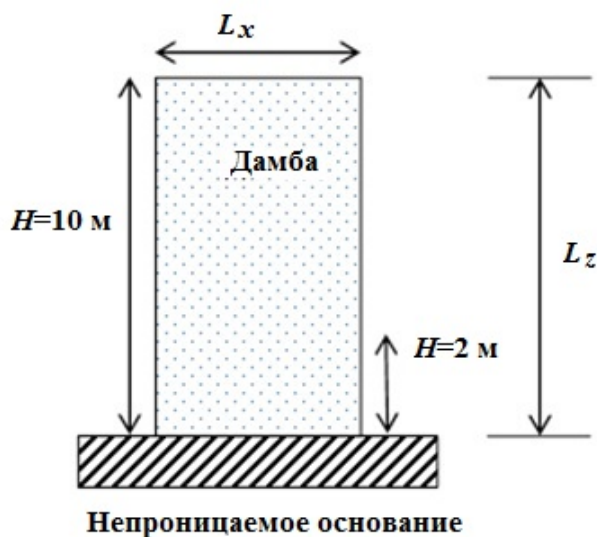


Рис. 7. Постановка задачи Полубариновой-Кочиной

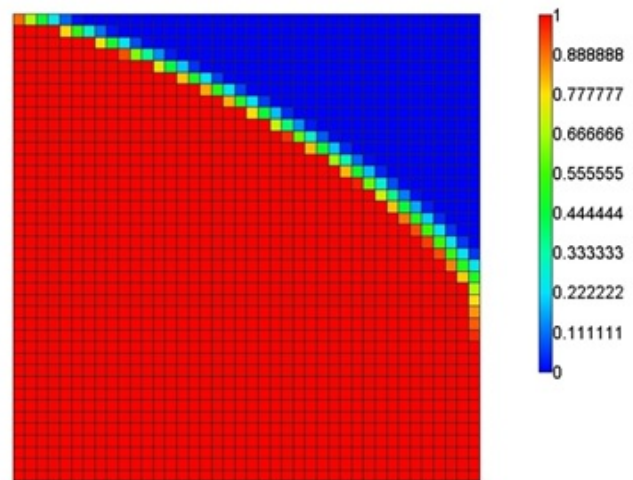


Рис. 8. Задача Полубариновой-Кочиной. Распределение насыщенности в перемычке, полученное с помощью ПК НИМФА

**Задача Полубариновой-Кочиной. Сопоставление численных и аналитических расходов жидкости через перемычку**

Расчет	$Q$ , м <sup>3</sup> /сут	Погрешность, %
Аналитический	1,0368	—
Численный, сетка $10 \times 10$	1,04596	0,88
Численный, сетка $20 \times 20$	1,04267	0,559
Численный, сетка $40 \times 40$	1,04025	0,33

**Задача Баренблатта о растекании бугра в безнапорном сухом пласте.** Рассматривается двумерное движение подземных вод в области фильтрации, лежащей на горизонтальном водопоре. Необходимо сравнить результаты с аналитическим решением. Описание теста приведено в [8]. Постановка задачи представлена на рис. 9. Аналитическое решение данной задачи получено Г. И. Баренблаттом [8].

Для решения задачи была использована регулярная сетка с шагом по пространству 1 м. Количество ячеек в расчете составляет 20 000.

Сравнение аналитических решений с численными результатами (рис. 10) дает хорошее совпадение. Относительная погрешность численного и аналитического решений не превысила 2,04%. Время счета задачи на сетке из 2000 ячеек при расчетном времени  $t = 1000$  сут составило 45 с.

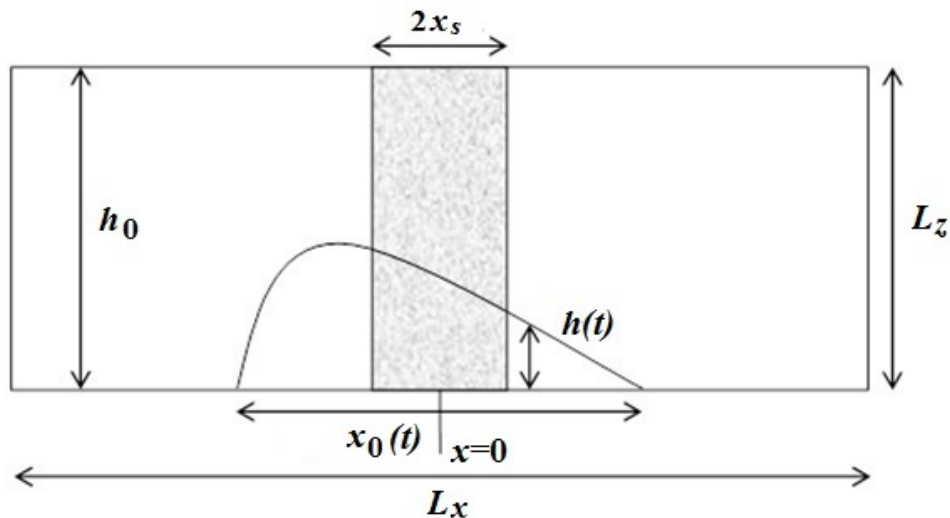


Рис. 9. Схема области задачи Баренблатта

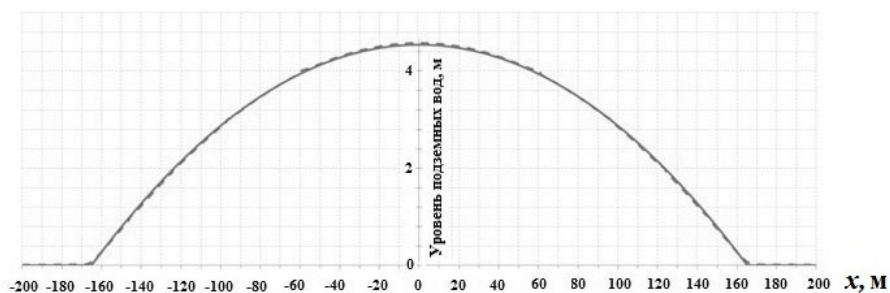


Рис. 10. Аналитическое решение задачи Баренблатта (—) и численное решение, полученное с помощью ПК НИМФА (---),  $t = 1000$  сут

### Заключение

На данный момент в РФЯЦ-ВНИИЭФ в комплексе программ НИМФА реализованы модели насыщенно-ненасыщенной и напорно-безнапорной фильтрации. Приведены результаты численных расчетов ряда тестовых задач с использованием этих моделей. При этом в качестве тестовых использованы задачи с известными аналитическими решениями.

Представлены результаты сравнения аналитических решений с численными, полученными как по пакету НИМФА, так и по коммерческой программе FEFLOW, применяемой для решения данного класса задач.

В результате выполненной работы показано, что реализованная в ПК НИМФА модель насыщенно-ненасыщенной фильтрации хорошо описывает все особенности решений. Также показано, что результаты, полученные по программе FEFLOW и по пакету НИМФА, очень близки.

### Список литературы

1. Бутнев О. И., Пронин В. А., Сидоров М. Л., Колесников С. С., Кузнецов В. Ю. Пакет программ НИМФА-2 для решения задач многофазной фильтрации с применением суперкомпью-

- терных технологий // Тр. XIV межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. С. 112—119.
- Butnev O. I., Pronin V. A., Sidorov M. L., Kolesnikov S. S., Kuznetsov V. Yu.* Paket programm NIMFA-2 dlya resheniya zadach mnogofaznoy filtratsii s primeneniem superkompyuternykh tekhnologiy // Тр. XIV mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2012. S. 112—119.
2. *Diersch H. J. G.* Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media. Springer, 2014.
  3. *Simunek J., Sejna M., Saito H., Sakai M., van Genuchten M. Th.* The HYDRUS-1D Software Package for Simulating the Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably Saturated Media. Version 4.0. HYDRUS Software Series 3. Riverside, California: Department of Environmental Sciences, University of California Riverside, 2008. P. 315.
  4. *Алейников А. Ю., Барабанов Р. А., Бартенев Ю. Г., Ерзунов В. А., Карпов А. П., Кузнецов В. Ю., Петров Д. А., Резчиков В. Ю., Стаканов А. Н., Щаникова Е. Б.* Параллельные решатели СЛАУ в пакетах программ Российского федерального ядерного центра — Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. Вып. 47. С. 73—92.  
*Aleynikov A. Yu., Barabanov R. A., Bartenev Yu. G., Erzunov V. A., Karpov A. P., Kuznetsov V. Yu., Petrov D. A., Rezchikov V. Yu., Stakanov A. N., Shchanikova E. B.* Parallelnye reshateli SLAU v paketakh programm Rossiyskogo federalnogo yadernogo tsentra — Vserossiyskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta eksperimental'noy fiziki // Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika. 2016. Vyp. 47. S. 73—92.
  5. *Celia M. A., Bouloutas E. J., Zabra R. L.* A General mass conservative numerical solution for unsaturated flow equation // Water Resources Research. 1990. Vol. 26, No 7. P. 1483-96.
  6. *Webb S. W.* Generalization of Ross' tilted capillary barrier diversion formula for different two-phase characteristic curves // Ibid. 1997. Vol. 33, No 8. P. 1855—1859.
  7. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.  
*Polubarinova-Kochina P. Ya.* Teoriya dvizheniya gruntovykh vod. M.: Nauka, 1977.
  8. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.  
*Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M.* Teoriya nestatsionarnoy filtratsii zhidkosti i gaza. M.: Nedra, 1972.

Статья поступила в редакцию 15.02.19.

MODELS OF SATURATED-UNSATURATED AND CONFINED-UNCONFINED FLOWS IN "NIMFA" SOFTWARE / A. N. Bakhaev, P. A. Mashenkin, M. L. Sidorov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper describes models of saturated-unsaturated and confined-unconfined isothermic flows in porous media. Both qualitative and quantitative agreement between the results obtained for problems having analytical solutions and problems solved using the commercial code FEFLOW has been demonstrated.

*Keywords:* NIMFA software, saturated-unsaturated flow, confined-free flows, verification, cross-verification.