

УДК 519.633.6

МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

И. В. Соболев

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описано численное решение уравнений электродинамики на неструктурированных многогранных сетках методом типа Годунова второго порядка. Для уравнений идеальной магнитной газовой динамики применяются три разностные схемы, основанные на приближенном решении задачи о распаде разрыва. Рассмотрено также исключение численного магнитного заряда методом СТ. Разностная схема для уравнений Максвелла использует точное решение задачи Римана. Приводятся тестовые расчеты и их сравнение с опубликованными данными.

Ключевые слова: уравнения идеальной магнитной газовой динамики, уравнения Максвелла, метод Годунова, неструктурированные сетки.

Введение

Уравнения электродинамики широко используются в фундаментальных и прикладных научных исследованиях. В последние десятилетия интенсивно развиваются конечно-разностные методы решения этих уравнений. Первоначально разностные схемы использовали ортогональные матричные сетки, но в дальнейшем появилась необходимость расчетов задач в областях сложной формы. Наиболее универсальные численные методы получаются введением в счетной области неструктурированной сетки и применением метода конечных объемов.

Одним из наиболее распространенных методов численного решения гиперболических уравнений математической физики является метод Годунова [1]. В настоящей работе рассмотрено применение данного метода к уравнениям идеальной магнитной газовой динамики (МГД) и уравнениям Максвелла.

Разностные схемы идеальной МГД, встречающиеся в литературе, можно разделить на две группы. К первой относится схема Хартена—Лакса—ван Лира (HLL) и ее различные обобщения [1–3], ко второй — схемы типа Роу [1, 2, 4]. Важной составной частью любой численной МГД-методики является процедура сохранения соленидальности магнитного поля. Методы исключения численного магнитного заряда описаны в работах [1, 4–12]. Решение уравнений Максвелла методом Годунова рассмотрено в статьях [13, 14].

В данной статье представлена практическая реализация методов и алгоритмов, опубликованных в работах [1–14]. Приводятся расчеты на сходимость и сравнение различных разностных схем на примере тестовых задач.

1. Метод второго порядка типа Годунова

1.1. Общая схема. В настоящей работе применяется разностная схема MUSCL [1, 15], которая имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству, использует кусочно-линейную реконструкцию величин в ячейках и двухшаговый пересчет по времени.

Пусть имеется гиперболическая система уравнений вида

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{U} = (u_1, \dots, u_n)^T$ — вектор консервативных переменных. Предположим, что счетная область заполнена сеткой, состоящей из ячеек, которые представляют собой произвольные несамопересекающиеся многогранники.

Решение уравнений (1) состоит из следующих трех этапов:

1. Построение кусочно-линейной реконструкции.
2. Продвижение на полшага вперед по времени.
3. Вычисление потоков вектора \vec{U} через грани ячеек.

Пусть в каждой ячейке C_i с центром (x_i^0, y_i^0, z_i^0) задан вектор \vec{U}_i^0 . Построим линейную реконструкцию $\vec{U}_i(x, y, z) = \vec{U}_i^0 + \vec{\alpha}_i(x - x_i^0) + \vec{\beta}_i(y - y_i^0) + \vec{\gamma}_i(z - z_i^0)$. Вычисление коэффициентов $\vec{\alpha}_i, \vec{\beta}_i, \vec{\gamma}_i$ более подробно описано в подразд. 1.2.

Пусть грань F_j разделяет ячейки C_i и C_k , а ее центр имеет координаты x_j, y_j, z_j . Обозначим $\vec{U}_{j,i} = \vec{U}_i(x_j, y_j, z_j), \vec{U}_{j,k} = \vec{U}_k(x_j, y_j, z_j)$.

Пусть ячейка C_i имеет грани F_{j_1}, \dots, F_{j_N} , а ее объем равен V_i ; $\vec{S}_{j_k} = (S_{j_k}^x, S_{j_k}^y, S_{j_k}^z) = \int_{F_{j_k}} \vec{n}_k dS$,

где \vec{n}_k — единичная нормаль к грани F_{j_k} , направленная наружу от ячейки C_i .

На втором этапе (продвижение на полшага вперед по времени) решаются разностные уравнения

$$V_i \frac{\vec{U}_{j_k,i}^* - \vec{U}_{j_k,i}}{\tau/2} + \sum_{l=1}^N \left(\vec{F}(\vec{U}_{j_l,i}) S_{j_l}^x + \vec{G}(\vec{U}_{j_l,i}) S_{j_l}^y + \vec{H}(\vec{U}_{j_l,i}) S_{j_l}^z \right) = 0.$$

Пусть \vec{n}_j — вектор единичной нормали к F_j , направленный из ячейки C_i в ячейку C_k . Дополним вектор \vec{n}_j до ортонормированного базиса $(\vec{n}_j, \vec{t}_j, \vec{s}_j)$ и образуем матрицу

$$T_j = \begin{pmatrix} n_j^x & n_j^y & n_j^z \\ t_j^x & t_j^y & t_j^z \\ s_j^x & s_j^y & s_j^z \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор \vec{U}_i имеет вид $\vec{U}_i = (u_i^1, \dots, u_i^a, u_i^{a+1}, u_i^{a+2}, u_i^{a+3}, \dots, u_i^{a+3b-2}, u_i^{a+3b-1}, u_i^{a+3b})$, где величины u_i^1, \dots, u_i^a являются скалярными функциями, а величины $u_i^{a+1}, u_i^{a+2}, u_i^{a+3}, \dots, u_i^{a+3b-2}, u_i^{a+3b-1}, u_i^{a+3b}$ — компоненты трехмерных векторов; $0 \leq a \leq n$; $a + 3b = n$. Воспользуемся инвариантностью уравнений (1) относительно вращений в пространстве, чтобы свести вычисление потоков через грани к одномерному случаю ([15], гл. 16). Для получения нормальных и тангенциальных компонент векторов $(u_i^{a+3k-2}, u_i^{a+3k-1}, u_i^{a+3k})$ рассмотрим блочно-диагональную матрицу

$$M_j = \begin{pmatrix} \left. \begin{array}{c} 1 \\ a \end{array} \right\} & & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \left. \begin{array}{c} T_j \\ b \end{array} \right\} & & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & T_j \end{pmatrix}$$

и векторы $\vec{U}_j^L = M_j \vec{U}_{i,j}^*$, $\vec{U}_j^R = M_j \vec{U}_{k,j}^*$. Различные методы вычисления потока через грань F_j используют точные или приближенные решения одномерной задачи Римана с начальными условиями \vec{U}_j^L и \vec{U}_j^R . Пусть $\vec{\Phi}_j(\vec{U}_j^L, \vec{U}_j^R)$ — поток, полученный по какому-либо из известных алгоритмов. Разностная схема для решения уравнений (1) имеет вид

$$\frac{\vec{U}_i^{n+1} - \vec{U}_i^n}{\tau} = -\frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^N S(F_{jk}) M_{jk}^{-1} \vec{\Phi}_{jk}, \quad (2)$$

где $S(F_{jk})$ — площадь грани F_{jk} .

1.2. Кусочно-линейная реконструкция и ограничители. Пусть имеется трехмерная счетная сетка, состоящая из произвольных многогранников, причем в центре каждой ячейки C_i задана функция u_i^0 , которая постоянна внутри C_i . Для построения разностных схем второго порядка аппроксимации кусочно-постоянные функции u_i^0 заменяются на кусочно-линейные $u_i(x, y, z) = u_i^0 + \alpha_i(x - x_i^0) + \beta_i(y - y_i^0) + \gamma_i(z - z_i^0)$, где x_i^0, y_i^0, z_i^0 — координаты центра ячейки C_i [1]. Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ определяются методом наименьших квадратов.

Пусть ячейка C_i соседствует с ячейками C_{i_1}, \dots, C_{i_M} , центр ячейки C_{i_k} имеет координаты x_k, y_k, z_k . Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ находятся из условия минимизации функции $F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = \sum_{k=1}^M [u_i^0 + \alpha_i(x_k - x_i^0) + \beta_i(y_k - y_i^0) + \gamma_i(z_k - z_i^0) - u_{i_k}^0]^2$.

В соответствии с теоремой Годунова любая разностная схема, имеющая порядок аппроксимации выше первого, является немонотонной, т. е. приводит к появлению нефизических осцилляций. Для преодоления этого явления используются ограничители. Известно много видов ограничителей, которые применяются для построения одномерных монотонных разностных схем [1]. Одна из первых многомерных конструкций была предложена Бартом и Джесперсоном (см. [1]).

Пусть внутри каждой ячейки C_{i_k} ($k \in \overline{1, M}$), соседней с C_i , задана функция $u_{i_k}^0$. Пусть $u_{\min} = \min(u_i^0, \min_{k=\overline{1, M}} u_{i_k}^0)$, $u_{\max} = \max(u_i^0, \max_{k=\overline{1, M}} u_{i_k}^0)$. Предположим, что внутри ячейки C_i задана линейная функция

$$u_i(x, y, z) = u_i^0 + \alpha_i(x - x_i^0) + \beta_i(y - y_i^0) + \gamma_i(z - z_i^0).$$

Пусть x_j, y_j, z_j ($j = 1, \dots, K$) — координаты вершин ячейки C_i . Рассмотрим числа

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi\left(\frac{u_{\max} - u_i^0}{u_i(x_j, y_j, z_j) - u_i^0}\right), & u_i(x_j, y_j, z_j) > u_i^0; \\ \varphi\left(\frac{u_{\min} - u_i^0}{u_i(x_j, y_j, z_j) - u_i^0}\right), & u_i(x_j, y_j, z_j) < u_i^0; \\ 1, & u_i(x_j, y_j, z_j) = u_i^0. \end{cases}$$

Здесь функция φ имеет вид $\varphi(x) = \min(1, x)$. Для сохранения монотонности коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ заменяются на коэффициенты $\psi\alpha_i, \psi\beta_i, \psi\gamma_i$, где $\psi = \min(\psi_1, \dots, \psi_K)$.

2. Уравнения идеальной МГД

Уравнения идеальной МГД для идеального газа с показателем адиабаты γ в консервативной форме имеют вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(\vec{U})}{\partial z} = 0,$$

$$\text{где } \vec{U} = (\rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, E)^T; \quad \vec{F}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} - B_x^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ u_x \left(E + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - B_x (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix};$$

$$\vec{G}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} - B_y^2 \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ u_y B_x - u_x B_y \\ 0 \\ u_y B_z - u_z B_y \\ u_y \left(E + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - B_y (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix}; \quad \vec{H}(\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ \rho u_z^2 + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} - B_z^2 \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_z B_y - u_y B_z \\ 0 \\ u_z \left(E + p + \frac{|\vec{B}|^2}{2} \right) - B_z (\vec{u} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix};$$

ρ — плотность среды; $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор скорости; $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ — вектор напряженности магнитного поля; p — давление; $E = \rho \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}$ — полная энергия.

2.1. Вычисление потоков по схемам HLL и HLLC.

Схема HLL пригодна для любой гиперболической системы уравнений вида $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} = 0$. Из всех разрывов, появляющихся в задаче Римана, метод HLL учитывает только две самые быстрые ударные волны. Если заданы начальные условия \vec{U}^L и \vec{U}^R , то поток $\vec{\Phi}_{HLL}$ вычисляется по формуле

$$\vec{\Phi}_{HLL} = \begin{cases} \vec{F}(\vec{U}^L), & \lambda^L > 0; \\ \frac{\lambda^R \vec{F}(\vec{U}^L) - \lambda^L \vec{F}(\vec{U}^R) + \lambda^R \lambda^L (\vec{U}^R - \vec{U}^L)}{\lambda^R - \lambda^L}, & \lambda^L \leq 0 \leq \lambda^R; \\ \vec{F}(\vec{U}^R), & \lambda^R < 0, \end{cases}$$

где λ^L и λ^R — соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}$ [1].

В случае идеальной МГД используются оценки чисел λ^L и λ^R , приведенные в работе [2].

$$\text{Пусть } a^2 = \frac{\gamma \max(p^L, p^R)}{\min(\rho^L, \rho^R)}; \quad u_a^2 = \frac{\max(|\vec{B}^L|^2, |\vec{B}^R|^2)}{\min(\rho^L, \rho^R)}; \quad u_{ax}^2 = \frac{\max((B_x^L)^2, (B_x^R)^2)}{\min(\rho^L, \rho^R)};$$

$$u_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(a^2 + u_a^2 + \sqrt{(a^2 + u_a^2)^2 - 4a^2 u_{ax}^2} \right)}. \quad \text{Тогда } \lambda^L = \min(u_x^L, u_x^R) - u_f; \quad \lambda^R = \max(u_x^L, u_x^R) + u_f.$$

Уточненный метод HLLC дополнительно учитывает центральный контактный разрыв. В настоящей работе реализуется схема HLLC для уравнений идеальной МГД, описанная в работе [3].

Поток $\vec{\Phi}_{HLLC}$ вычисляется по формуле

$$\vec{\Phi}_{HLLC} = \begin{cases} \vec{F}(\vec{U}^L), & \lambda^L > 0; \\ \vec{F}_L^*, & \lambda^L \leq 0 < \lambda_M; \\ \vec{F}_R^*, & \lambda_M \leq 0 < \lambda^R; \\ \vec{F}(\vec{U}^R), & \lambda^R < 0, \end{cases}$$

где величины λ_M , \vec{F}_L^* , \vec{F}_R^* определены в [3].

2.2. Вычисление потоков по схеме Рои. Схема Рои также применима для любой гиперболической системы уравнений $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} = 0$ [1]. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}$; \vec{R}_i и \vec{L}_i — соответственно правый и левый собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_i . Поток схемы Рои $\vec{\Phi}_{Roe}$ вычисляется по формуле

$$\vec{\Phi}_{Roe} = \frac{1}{2} \left[\vec{F}(\vec{U}^L) + \vec{F}(\vec{U}^R) - \sum_{i=1}^n \vec{L}_i (\vec{U}^R - \vec{U}^L) |\lambda_i| \vec{R}_i \right].$$

Величины λ_i , \vec{R}_i и \vec{L}_i для уравнений идеальной МГД приводятся в работе [4].

3. Методы исключения численного магнитного заряда

Различные методы исключения численного магнитного заряда можно разделить на три группы [1].

К первой группе относится использование искусственного скалярного потенциала φ , удовлетворяющего уравнению Пуассона $\Delta \varphi = -\text{div} \vec{B}$ [5]. Если ввести новое магнитное поле $\vec{B}' = \vec{B} + \nabla \varphi$, то его дивергенция будет равна нулю. Недостатком этого метода является необходимость решения эллиптического уравнения, что сильно увеличивает время расчетов.

Вторая группа методов использует модифицированную МГД-систему, для которой магнитный заряд удовлетворяет уравнению конвекции [4] или волновому уравнению [6] и переносится к границам счетной области. Эти методы требуют небольшой модификации разностных схем и незначительно увеличивают время счетного шага, но не обеспечивают точного обнуления дивергенции магнитного поля.

К третьей группе относятся различные варианты метода СТ (Constrained Transport), описанные в работах [7–12]. Данный метод требует введения разнесенного шаблона для магнитного поля, при этом его пересчет на гранях сетки осуществляется с помощью дискретного аналога закона Фарадея. Однако реализация метода СТ описана в литературе только для прямоугольных [7–10] или треугольных [11, 12] сеток.

В настоящей работе алгоритмы из статьи [9] обобщаются на произвольные неструктурированные многогранные сетки. В расчетах двумерных задач, приведенных в подразд. 5.3 и 5.4, исключение магнитного заряда выполнялось методом СТ.

3.1. Магнитное поле на гранях. Пусть P_i — грань некоторой ячейки сетки; $V_{i,j_1}, \dots, V_{i,j_M}$ — ее вершины; \vec{n}_i — единичная нормаль к грани P_i ; $\vec{\Phi}_i = (\Phi_{i,1}, \dots, \Phi_{i,8})$ — поток на этой грани. Предположим, что, кроме вектора напряженности магнитного поля, заданного в центрах ячеек, на каждой грани P_i задана нормальная компонента $B_{n,i} = \vec{B} \cdot \vec{n}_i$. Рассмотрим трехмерный вектор $\vec{F}_i = (\Phi_{i,5}, \Phi_{i,6}, \Phi_{i,7})$. Тогда верно равенство $\vec{F}_i = \vec{n}_i \times \vec{E}_i$, где $\vec{E}_i = -(\vec{u} \times \vec{B})_i$ — вектор напряженности электрического поля на грани P_i . Пусть $d\vec{l}_{i,k} = \overrightarrow{V_{i,j_k} V_{i,j_{k+1}}}$. По формулам векторной алгебры

$$\vec{F}_i \cdot (\vec{n}_i \times d\vec{l}_{i,k}) = (\vec{n}_i \times \vec{E}_i) \cdot (\vec{n}_i \times d\vec{l}_{i,k}) = (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_i) (\vec{E}_i \cdot d\vec{l}_{i,k}) - (\vec{n}_i \cdot d\vec{l}_{i,k}) (\vec{E}_i \cdot \vec{n}_i) = \vec{E}_i \cdot d\vec{l}_{i,k}, \quad (3)$$

так как ребро $\overrightarrow{V_{i,j_k} V_{i,j_{k+1}}}$ лежит в плоскости грани P_i и, следовательно, $\vec{n}_i \cdot d\vec{l}_{i,k} = 0$.

Рассмотрим теперь закон Фарадея

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0. \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4) по грани P_i , получим равенство

$$S(P_i) \frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} + \int_{P_i} (\text{rot} \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0,$$

где $S(P_i)$ — площадь грани P_i .

Применяя формулу Стокса, получаем

$$S(P_i) \frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} + \int_{\partial P_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Заменяя интеграл конечной суммой, получаем

$$\frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} \approx -\frac{1}{S(P_i)} \sum_{k=1}^M \vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k}. \quad (5)$$

Пусть $P_{i_1,k}, \dots, P_{i_{N_k},k}$ — все грани, содержащие ребро $\overrightarrow{V_{i,j_k} V_{i,j_{k+1}}}$. Тогда в силу (3) величину $\vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k}$ можно представить в виде

$$\vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k} \approx \frac{1}{N_k} \sum_{s=1}^{N_k} \vec{F}_{i_s,k} \cdot (\vec{n}_{i_s,k} \times d\vec{l}_{i,k}). \quad (6)$$

3.2. Интерполяция магнитного поля. Изложенный здесь алгоритм интерполяции магнитного поля с граней в ячейки взят из книги [16].

Пусть $P_{i,j}$ — грань ячейки C_i , а $V_{i,j,1}, \dots, V_{i,j,N_{i,j}}$ — вершины грани $P_{i,j}$; $Q_{i,j,k}$ — грань ячейки C_i , отличная от $P_{i,j}$ и содержащая вершины $V_{i,j,k-1}$ и $V_{i,j,k}$.

Пусть $B_{n,1}$ — нормальная компонента магнитного поля на грани $P_{i,j}$; $B_{n,2}, B_{n,3}$ — нормальные компоненты магнитного поля соответственно на гранях $Q_{i,j,k}, Q_{i,j,k+1}$; \vec{n}_1 — вектор единичной нормали к грани $P_{i,j}$; \vec{n}_2, \vec{n}_3 — векторы единичных нормалей соответственно к граням $Q_{i,j,k}, Q_{i,j,k+1}$. Рассмотрим вектор $\vec{B}_{i,j,k}$, компоненты которого находятся из системы трех линейных уравнений $\vec{B}_{i,j,k} \cdot \vec{n}_s = B_{n,s}, s = 1, 2, 3$.

Пусть $K \equiv V_{i,j,k}$; L — центр ребра $V_{i,j,k-1} V_{i,j,k}$; M — центр ребра $V_{i,j,k} V_{i,j,k+1}$; N — центр грани $P_{i,j}$; O — центр ячейки C_i ; $W_{i,j,k}$ — объем четырехугольной пирамиды $KLNM O$. Тогда вектор напряженности магнитного поля в центре ячейки C_i найдем по формуле

$$\vec{B}_i = \frac{\sum_j \sum_k \vec{B}_{i,j,k} W_{i,j,k}}{\sum_j \sum_k W_{i,j,k}}. \quad (7)$$

3.3. Метод СТ. Решение уравнений идеальной МГД методом СТ состоит из следующих трех шагов:

1. Пересчет вектора консервативных переменных в каждой ячейке по формуле (2).
2. Пересчет нормальной компоненты магнитного поля на каждой грани по формулам (5), (6). При этом для численной дивергенции магнитного поля в ячейке C_l будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{B})_l = \frac{1}{V_l} \sum_i \frac{\partial B_{n,i}}{\partial t} S(P_i) = -\frac{1}{V_l} \sum_i \sum_k \vec{E}_{i,k} \cdot d\vec{l}_{i,k}. \quad (8)$$

В сумме (8) каждое слагаемое встречается два раза с противоположными знаками, значит, эта сумма равна нулю.

3. Интерполяция магнитного поля с граней в центры ячеек по формуле (7).

4. Уравнения Максвелла

Система уравнений Максвелла в отсутствие зарядов и токов имеет вид

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (9)$$

где \vec{E} — вектор напряженности электрического поля; \vec{H} — вектор напряженности магнитного поля; \vec{D} — вектор электрической индукции; \vec{B} — вектор магнитной индукции; ε — диэлектрическая проницаемость среды; μ — магнитная проницаемость среды.

Система уравнений (9) может быть переписана в виде

$$Q \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + C \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

где $\vec{U} = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^T$; $Q = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как система уравнений (10) является линейной, потоки через грани можно вычислять, используя точное решение задачи Римана [13]. Пусть $\vec{U}^L = (E_x^L, E_y^L, E_z^L, H_x^L, H_y^L, H_z^L)$, $\vec{U}^R = (E_x^R, E_y^R, E_z^R, H_x^R, H_y^R, H_z^R)$ — начальные условия одномерной задачи. Обозначим

$$\begin{aligned} c^L &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^L \mu^L}}; & c^R &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^R \mu^R}}; \\ E_y^* &= \frac{E_y^L \varepsilon^L c^L + E_y^R \varepsilon^R c^R + H_z^L - H_z^R}{\varepsilon^L c^L + \varepsilon^R c^R}; & E_z^* &= \frac{E_z^L \varepsilon^L c^L + E_z^R \varepsilon^R c^R - H_y^L + H_y^R}{\varepsilon^L c^L + \varepsilon^R c^R}; \\ H_y^* &= \frac{H_y^L \mu^L c^L + H_y^R \mu^R c^R - E_z^L + E_z^R}{\mu^L c^L + \mu^R c^R}; & H_z^* &= \frac{H_z^L \mu^L c^L + H_z^R \mu^R c^R + E_y^L - E_y^R}{\mu^L c^L + \mu^R c^R}. \end{aligned}$$

Тогда $\vec{\Phi}(\vec{U}^L, \vec{U}^R) = (0, H_z^*, -H_y^*, 0, -E_z^*, E_y^*)^T$.

5. Расчеты тестовых МГД-задач

5.1. Расчеты на сходимость теста Даи—Вудварда. Данный тест представляет собой задачу о распаде разрыва, в которой возникают все виды ударных МГД-волн. Постановка задачи взята из работы [17].

Счетная область задачи представляет собой прямоугольный параллелепипед $[0; 1] \times [0; 0, 1] \times [0; 0, 1]$. Счетная сетка — ортогональная шестигранная. Число ячеек по направлениям y, z равнялось 5, а для направления x число ячеек N бралось из множества $\{100, 200, 500, 1\,000, 2\,000\}$. Расчеты проводились по трем разностным схемам: Роу, HLL и HLLC.

На рис. 1 показаны профили плотности, полученные в расчетах на сетке с 2000 ячеек по направлению x . Видно, что схема HLLC лучше, чем HLL, описывает контактную границу.

В табл. 1 представлены значения нормы погрешности для расчетов с различным числом ячеек,

которая вычисляется по формуле $\|\rho - \rho_{et}\|_{L_1} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i |\rho_i - \tilde{\rho}_i|}{\sum_{i=1}^n V_i}$, где V_i — объем, а $\tilde{\rho}_i$ — значение

эталонной плотности i -й ячейки; суммирование ведется по всем ячейкам сетки. Также вычисляется локальный порядок сходимости плотности в норме L_1 по формуле $\alpha = \ln \frac{\|\rho_1 - \rho_{et}\|_{L_1}}{\|\rho_2 - \rho_{et}\|_{L_1}} / \ln \frac{N_2}{N_1}$, где ρ_i — функция плотности, полученная в расчете с числом ячеек N_i ($i = 1, 2$).

На рис. 2 показаны зависимости нормы погрешности от сетки в логарифмическом масштабе (по оси абсцисс отложена величина $1/N$). Видно, что схема Роу дает наиболее быструю сходимость.

Таблица 1

Норма погрешности вычислений и порядок сходимости в задаче Даи—Вудварда

N	Схема Роу		Схема HLL		Схема HLLC	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,036761	0,650435	0,065921	0,600685	0,050637	0,594826
200	0,023420	0,826719	0,043471	0,679818	0,033528	0,739931
500	0,010980	0,621691	0,023317	0,577064	0,017020	0,584285
1 000	0,007136	0,667115	0,015630	0,603075	0,011352	0,642920
2 000	0,004494		0,010290		0,007270	

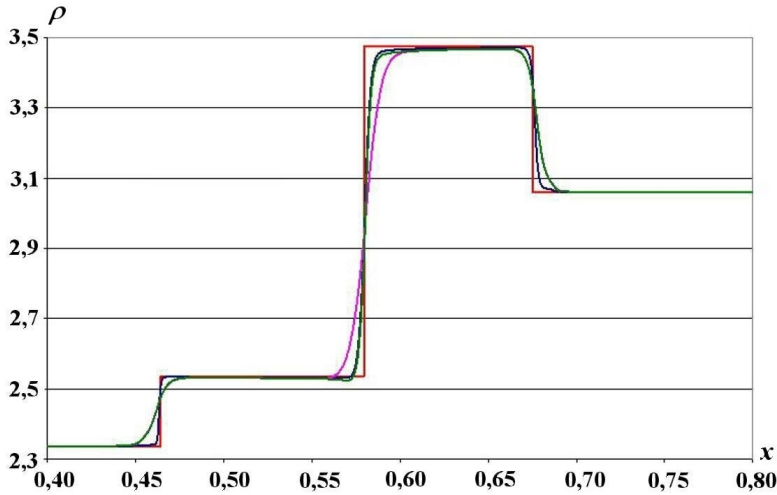


Рис. 1. Профили плотности в момент времени $t = 0,15$, $N = 2000$:
 — красная линия — аналитическое решение; — синяя линия — схема Роу; — фиолетовая линия — схема HLL;
 — зеленая линия — схема HLLC

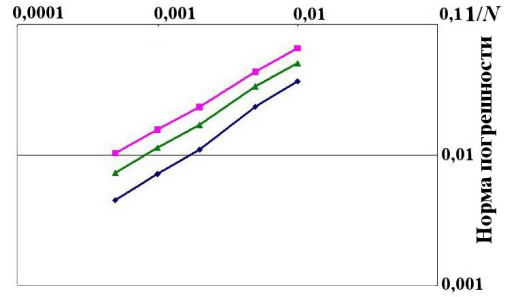


Рис. 2. Зависимости нормы погрешности плотности от сетки в задаче Дай—Вудварда: — синяя линия с ромбами — схема Роу; — фиолетовая линия с квадратами — схема HLL; — зеленая линия с треугольниками — схема HLLC

5.2. Расчеты на сходимость теста Брио—Ву.

Данный тест используется для численного исследования распада неэволюционных разрывов. Постановка задачи приведена в работе [18].

Счетная область задачи представляет собой прямоугольный параллелепипед $[0; 1] \times [0; 0,1] \times [0; 0,1]$. Счетная сетка — ортогональная шестигранная. Число ячеек по направлениям y, z равнялось 5, а для направления x число ячеек N бралось из множества $\{100, 200, 500, 1000, 2000\}$. Расчеты проводились по трем разностным схемам: Роу, HLL и HLLC.

На рис. 3 показаны профили плотности, полученные в расчетах на сетке с 500 ячейками по направлению x . Эталонное решение получено с помощью одномерного расчета по схеме Лакса—Вендрофа [15] с числом точек $N = 10000$.

В табл. 2 представлены норма погрешности и локальный порядок сходимости плотности в норме L_1 для расчетов с различным числом ячеек.

На рис. 4 показаны зависимости нормы погрешности от сетки в логарифмическом масштабе (по оси абсцисс отложена величина $1/N$).

Таблица 2

Норма погрешности вычислений и порядок сходимости в задаче Брио—Ву

N	Схема Роу		Схема HLL		Схема HLLC	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,013377	0,682327	0,019744	0,622680	0,017914	0,624477
200	0,008336	0,744233	0,012823	0,650081	0,011620	0,685919
500	0,004215	0,808896	0,007068	0,708268	0,006198	0,744277
1000	0,002406	0,917271	0,004326	0,768205	0,003700	0,823332
2000	0,001274		0,002540		0,002091	

5.3. Задача о двумерном МГД-вихре.

Постановка задачи взята из работы [19]. Счетная область задачи — прямоугольный параллелепипед $[0; 1] \times [0; 1] \times [0; 0,01]$. Счетная сетка была получена трансляцией в один слой двумерной равномерной шестиугольной сетки (рис. 5). Число ячеек двумерной сетки 160 200.

Задача считалась по схеме Роу. На рис. 6—9 показано сравнение результатов расчетов с данными, опубликованными в работе [19].

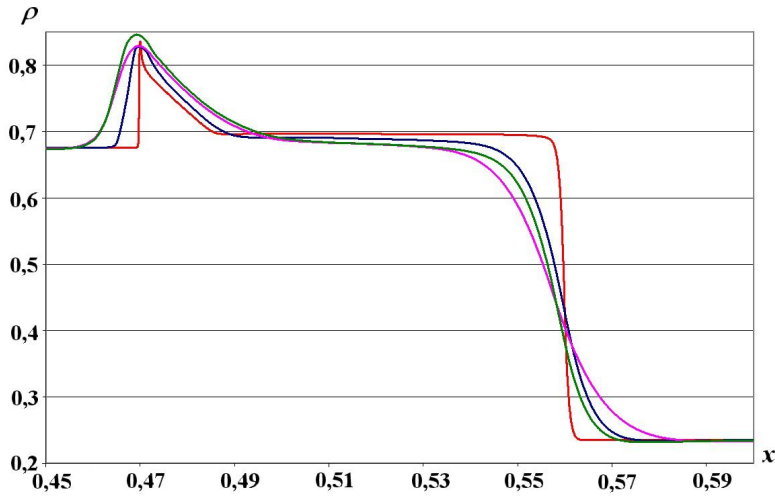


Рис. 3. Профили плотности в момент времени $t = 0,1$, $N = 500$: — эталонное решение; — схема Роу; — схема HLL; — схема HLLC

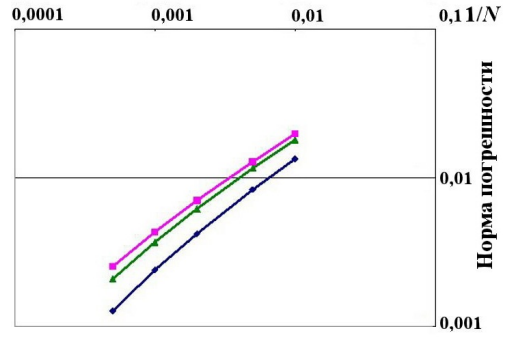


Рис. 4. Зависимости нормы погрешности плотности от сетки в задаче Брио—Бу: —♦— схема Роу; —■— схема HLL; —▲— схема HLLC

Рассмотрим максимальную дивергенцию магнитного поля по всей счетной области, которая считалась по формуле $\text{div} \vec{B} = \max_i \frac{1}{V_i} \left| \sum_j S(P_j) B_{n,j} \right|$, где максимум берется по всем ячейкам, а суммирование происходит по всем граням ячейки. Значение максимальной численной дивергенции в начале расчета составляло $7,61 \cdot 10^{-11}$, в конце расчета — $7,45 \cdot 10^{-11}$.

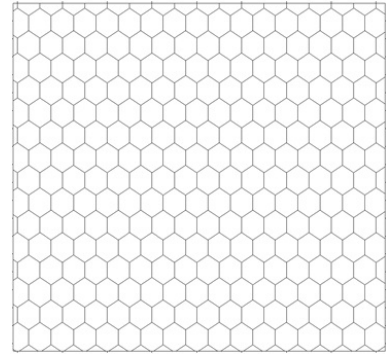


Рис. 5. Фрагмент двумерной сетки для задачи о МГД-вихре

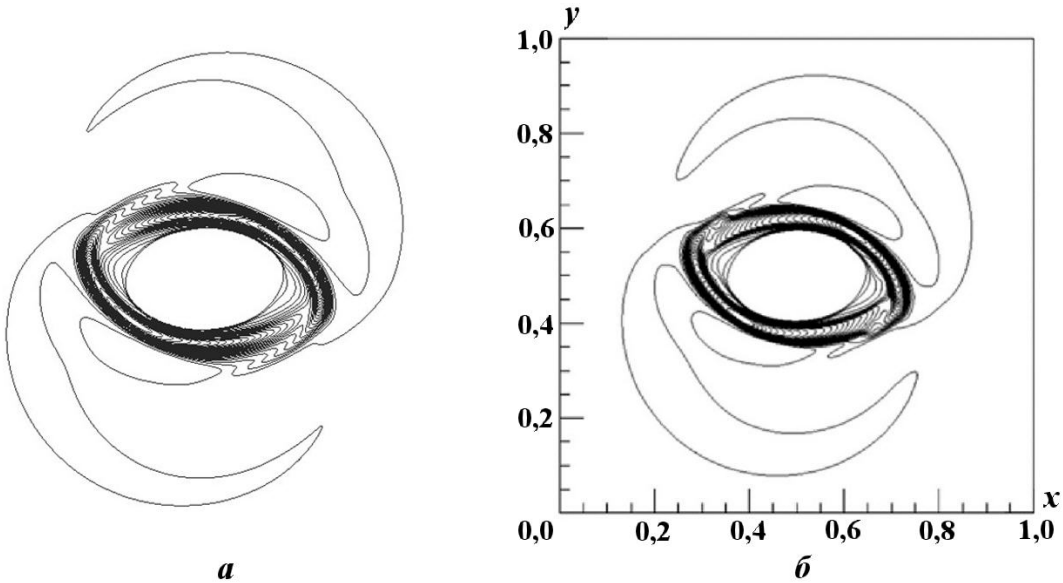


Рис. 6. Изолинии плотности на момент времени $t = 0,15$ в задаче о МГД-вихре: *a* — расчет; *b* — из работы [19]

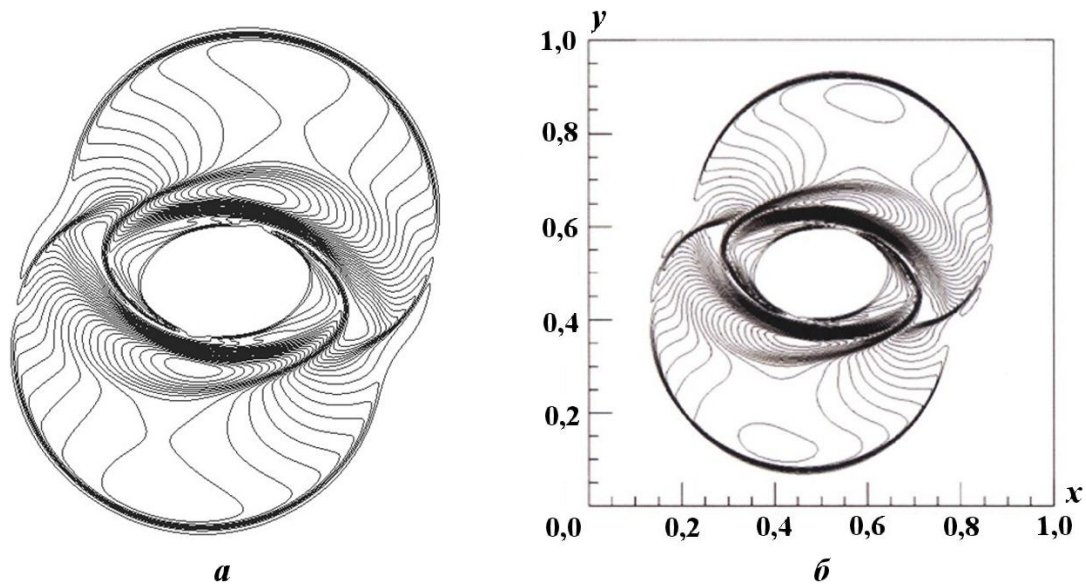


Рис. 7. Изолинии магнитного давления на момент времени $t = 0,15$ в задаче о МГД-вихре: a — расчет; b — из работы [19]

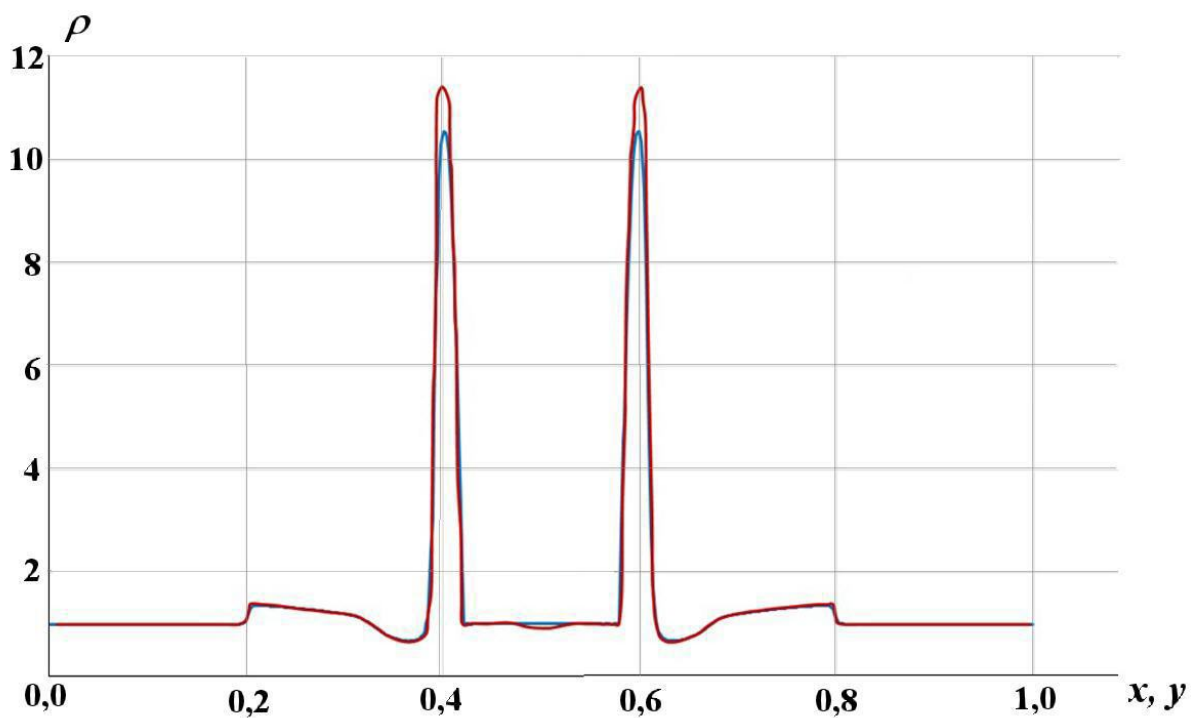


Рис. 8. Профили плотности вдоль прямой $x = y$ в момент времени $t = 0,15$ в задаче о МГД-вихре: — — расчет; — — из работы [19]

5.4. Двумерный тест "MHD blast wave". Постановка задачи взята из работы [19]. Задача считалась на той же сетке, что и предыдущая, по схеме Poу.

На рис. 10—13 показано сравнение результатов расчетов с данными из [19].

Значение максимальной численной дивергенции в начале расчета составляло $1,52 \cdot 10^{-9}$, в конце расчета — $1,7 \cdot 10^{-9}$.

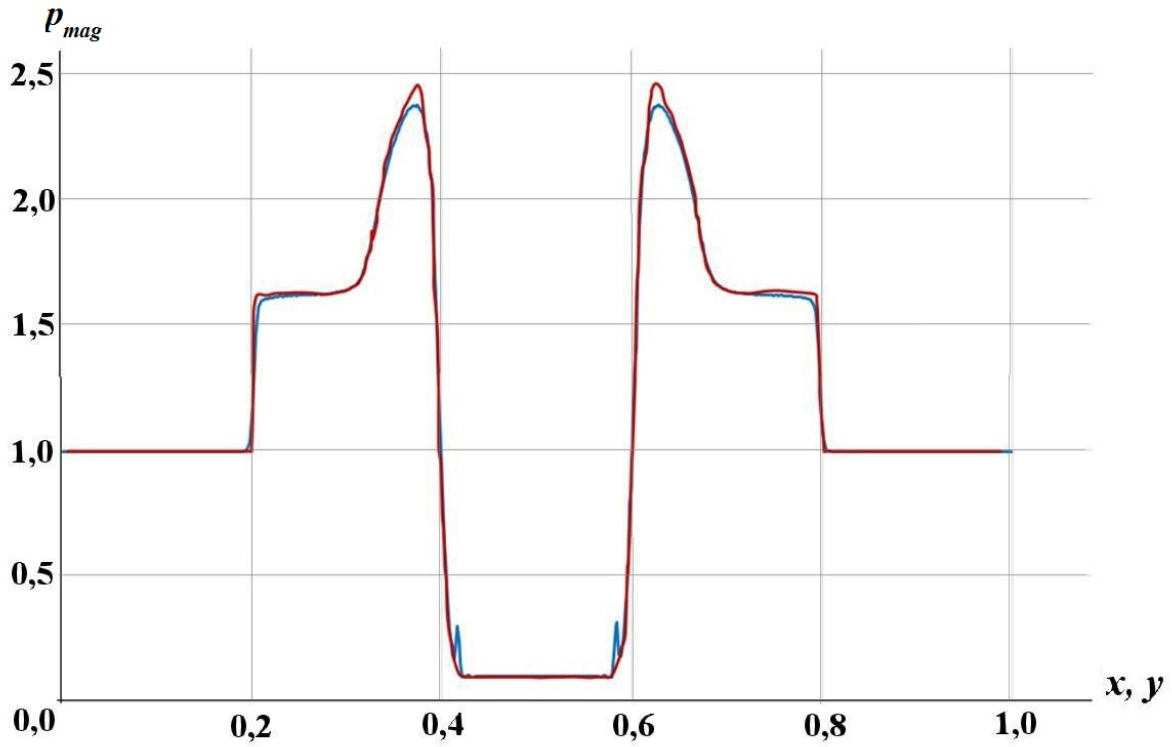


Рис. 9. Профили магнитного давления вдоль прямой $x = y$ в момент времени $t = 0,15$ в задаче о МГД-вихре: — расчет; — из работы [19]

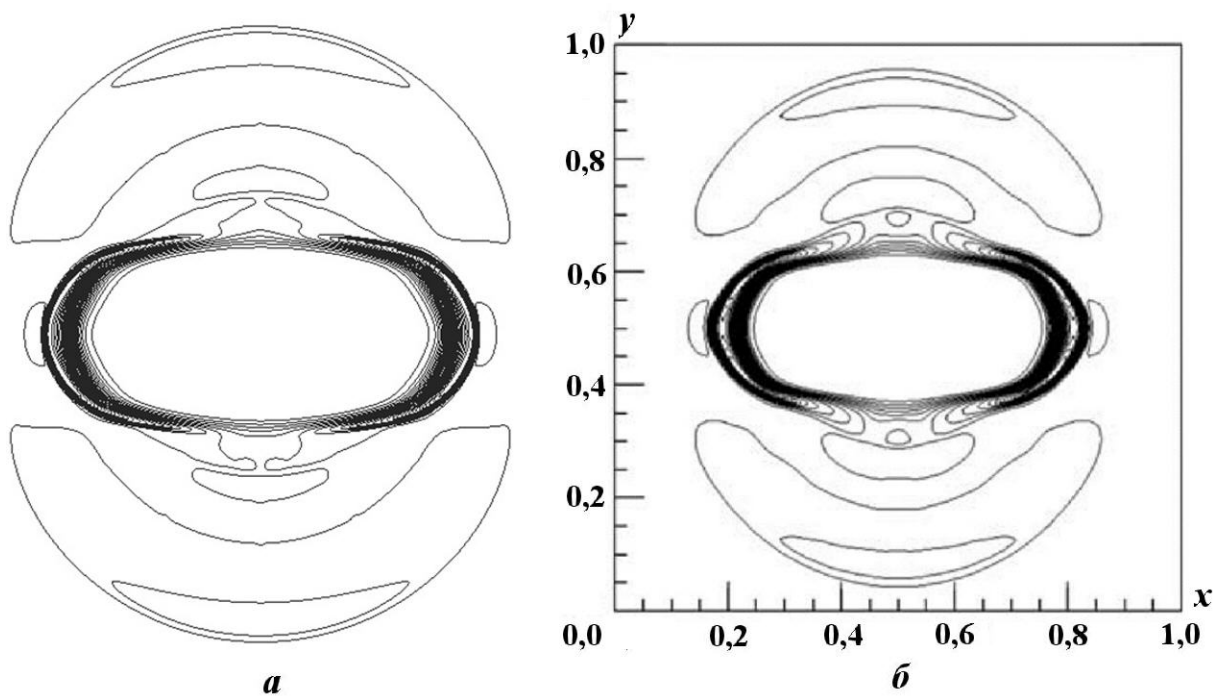


Рис. 10. Изолинии плотности на момент времени $t = 0,01$ в тесте "MHD blast wave": a — расчет; b — из работы [19]

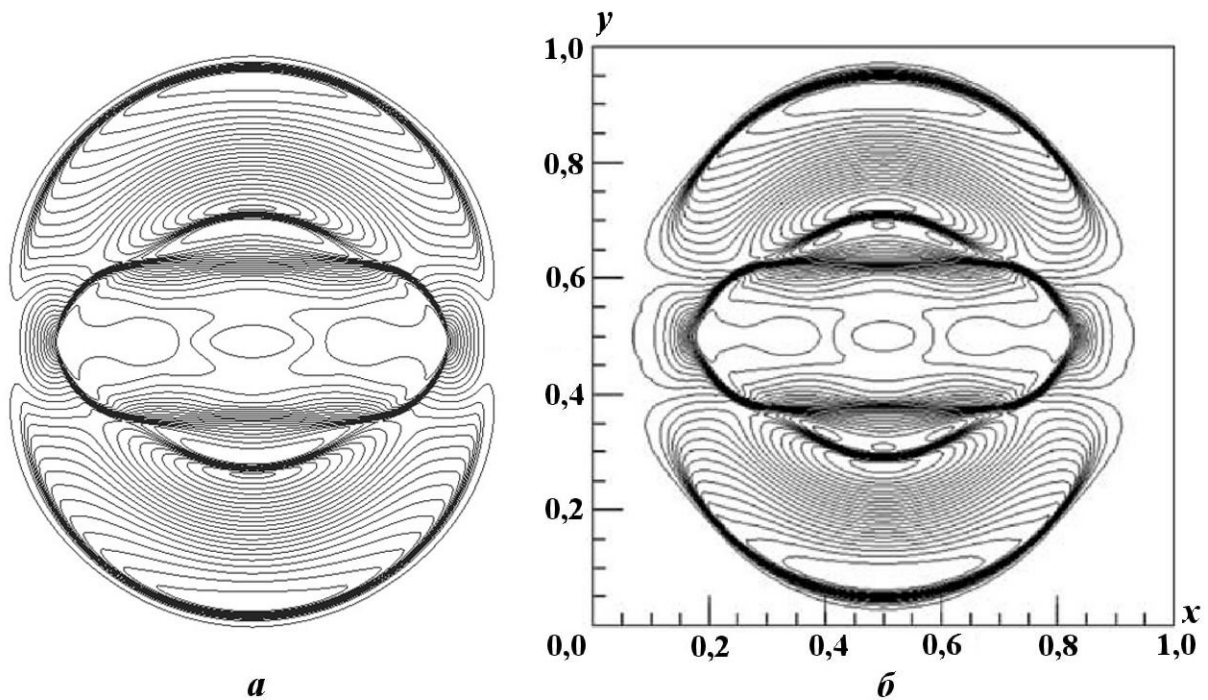


Рис. 11. Изолинии магнитного давления на момент времени $t = 0,01$ в тесте "MHD blast wave": a — расчет; b — из работы [19]

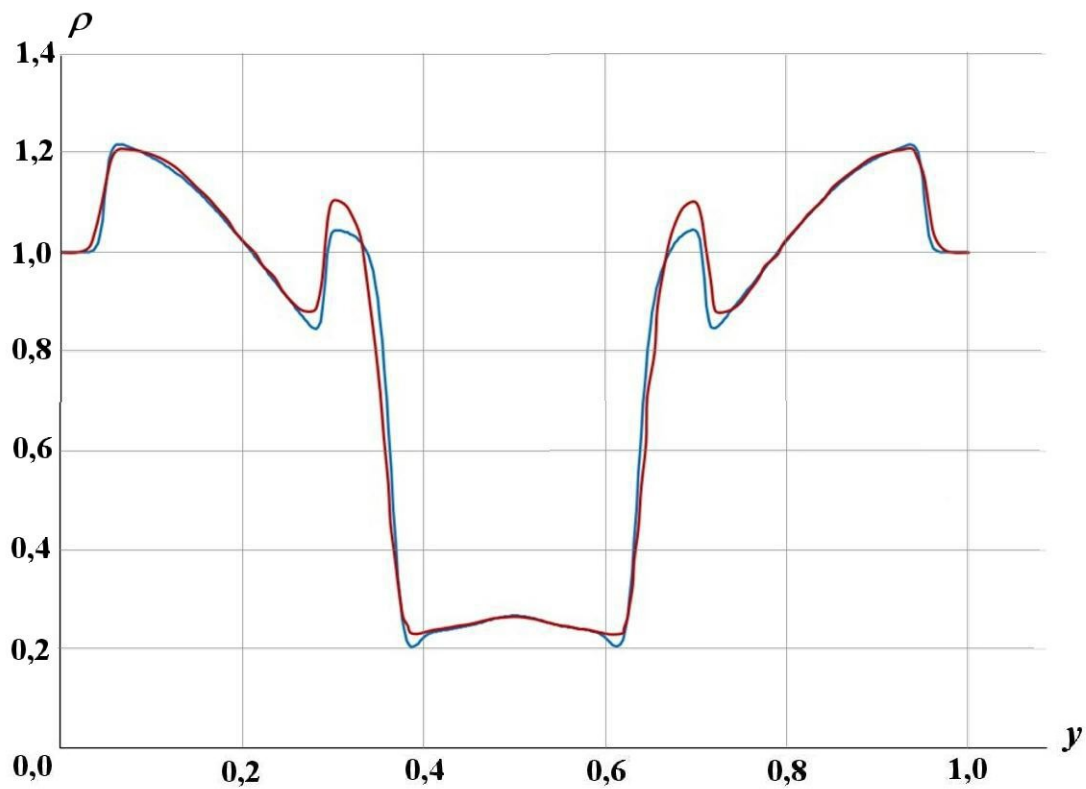


Рис. 12. Профили плотности вдоль прямой $x = 0,5$ в момент времени $t = 0,01$ в тесте "MHD blast wave": — расчет; — из работы [19]

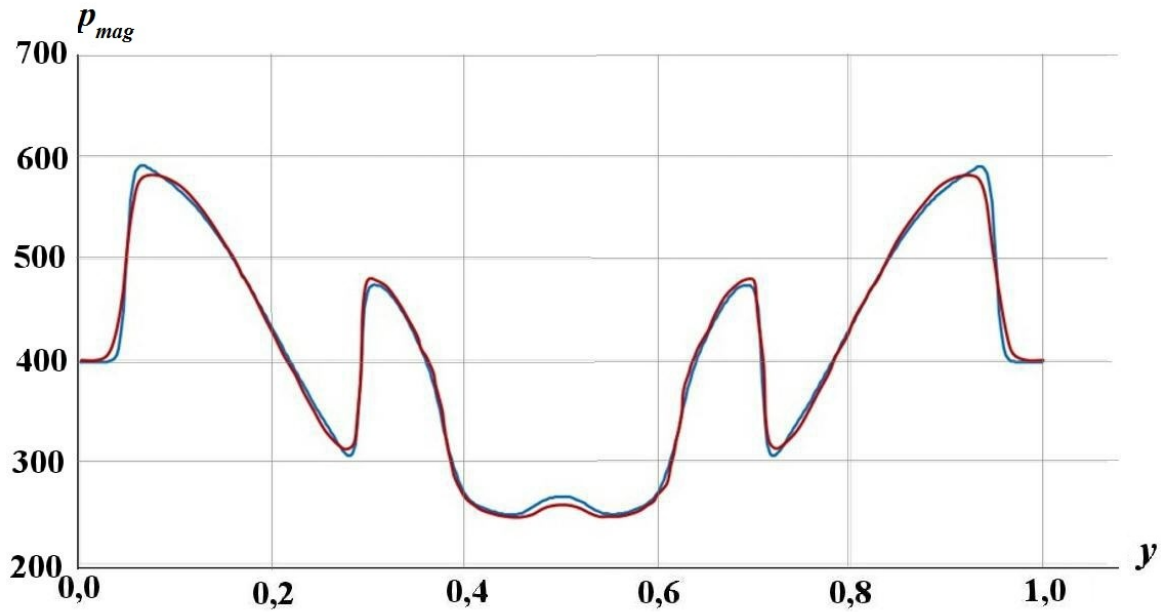


Рис. 13. Профили магнитного давления вдоль прямой $x = 0,5$ в момент времени $t = 0,01$ в тесте "MHD blast wave": — расчет; — из работы [19]

6. Тестовые расчеты уравнения Максвелла

6.1. Задача о ТЕ-волне в однородной среде. Постановка задачи и ее аналитическое решение взяты из работы [14]. Счетная сетка получена полистовым заполнением из двумерной шестиугольной сетки, показанной на рис. 14. Число ячеек по направлению z равнялось 1, а по направлениям x, y число ячеек N бралось из множества $\{100, 200, 400\}$.

На рис. 15—17 показаны зависимости погрешностей компонент E_x, E_y и H_z от времени для различного числа ячеек. Погрешности вычислялись так же, как в разд. 5.

В табл. 3 представлены максимальные погрешности указанных компонент при $t > 2$ и локальные порядки их сходимости в норме L_1 .

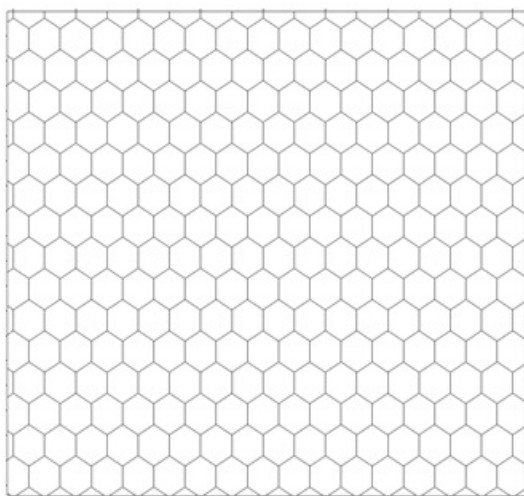


Рис. 14. Двумерная сетка в плоскости Oxy для задачи о ТЕ-волне

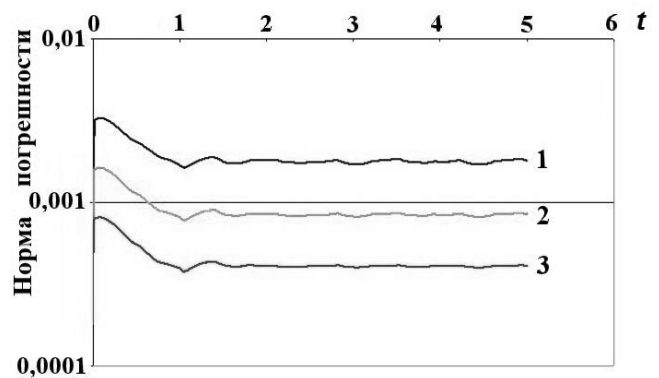


Рис. 15. Зависимости погрешности компоненты E_x от времени в задаче о ТЕ-волне: 1 — $N = 100$; 2 — $N = 200$; 3 — $N = 400$

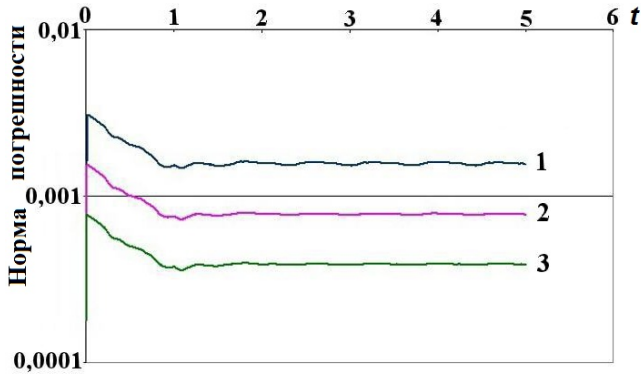


Рис. 16. Зависимости погрешности компоненты E_y от времени в задаче о ТЕ-волне: 1 — $N = 100$; 2 — $N = 200$; 3 — $N = 400$

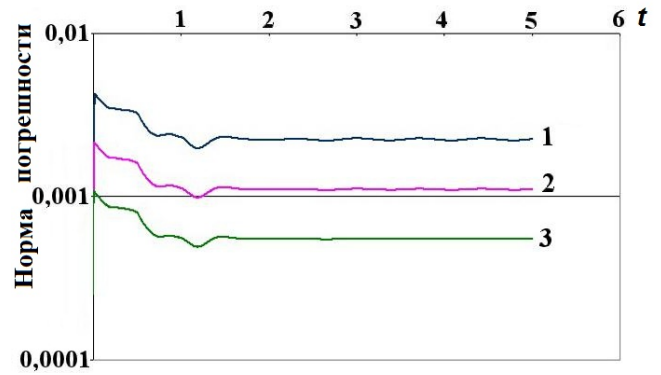


Рис. 17. Зависимости погрешности компоненты H_z от времени в задаче о ТЕ-волне: 1 — $N = 100$; 2 — $N = 200$; 3 — $N = 400$

Таблица 3

Максимальные погрешности при $t > 2$ и порядки сходимости в задаче о ТЕ-волне

N	E_x		E_y		H_z	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,00184	1,1	0,0016	1	0,00229	1
200	0,000856	1,1	0,000788	1	0,00112	1
400	0,000413		0,000391		0,000555	

6.2. Задача о ТМ-волне в неоднородной среде. Постановка задачи и ее аналитическое решение взяты из работы [14]. Счетная сетка получена листовым заполнением из двумерной шестиугольной сетки, показанной на рис. 18. Число ячеек по направлению z равнялось 1, а по направлениям x, y число ячеек N бралось из множества $\{100, 200, 400\}$.

На рис. 19–21 показаны зависимости погрешностей компонент E_z, H_x и H_y от времени для различного числа ячеек сетки.

В табл. 4 представлены максимальные погрешности этих компонент при $t > 2$ и локальные порядки их сходимости в норме L_1 .

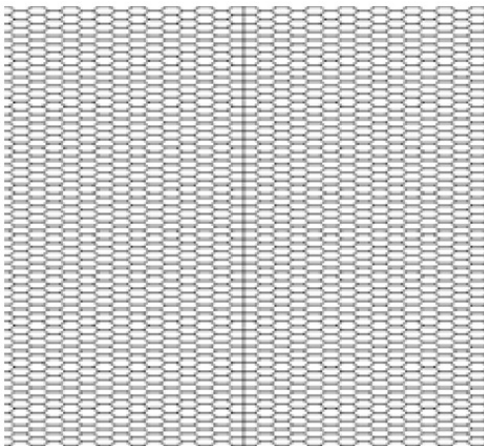


Рис. 18. Фрагмент двумерной сетки в плоскости Oxy в задаче о ТМ-волне

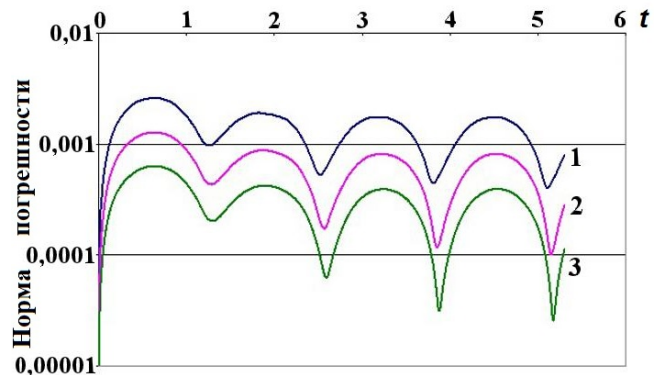


Рис. 19. Зависимости погрешности компоненты E_z от времени в задаче о ТМ-волне: 1 — $N = 100$; 2 — $N = 200$; 3 — $N = 400$

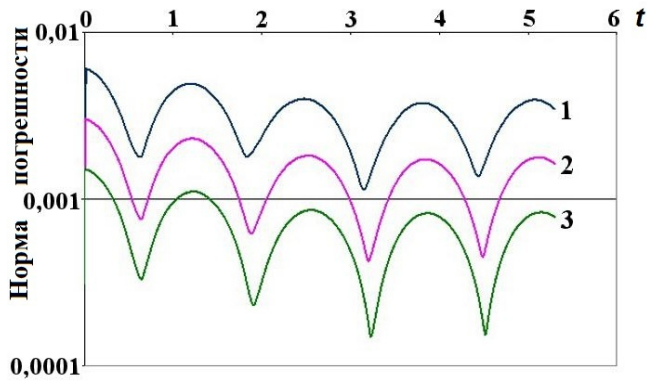


Рис. 20. Зависимости погрешности компоненты H_x от времени в задаче о ТМ-волне: 1 — $N = 100$; 2 — $N = 200$; 3 — $N = 400$

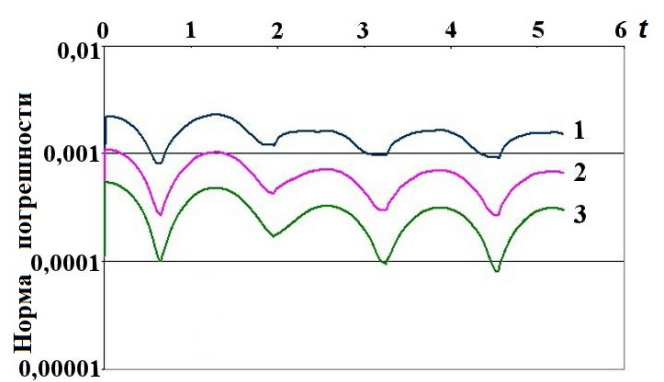


Рис. 21. Зависимости погрешности компоненты H_y от времени в задаче о ТМ-волне: 1 — $N = 100$; 2 — $N = 200$; 3 — $N = 400$

Таблица 4

Максимальные погрешности при $t > 2$ и порядок сходимости в задаче о ТМ-волне

N	E_z		H_x		H_y	
	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость	погрешность	сходимость
100	0,00175	1,1	0,00395	1,1	0,00166	1,2
200	0,000819	1,1	0,00178	1,1	0,000705	1,1
400	0,000395		0,000832		0,000318	

Заключение

В работе рассмотрено численное решение уравнений идеальной МГД и уравнений Максвелла на неструктурированных сетках.

Представлена реализация трех наиболее часто встречающихся разностных схем идеальной МГД, основанных на приближенном решении задачи Римана: HLL, HLLC и схемы Роу. Расчеты одномерных задач показали, что схема Роу обеспечивает более быструю сходимость, а схемы HLL и HLLC различаются только описанием контактного разрыва. Также рассмотрен вопрос об исключении численного магнитного заряда. Описан метод, в точности сохраняющий численную дивергенцию.

Разностная схема для уравнений Максвелла основана на точном решении задачи Римана. Тестовые расчеты показали сходимость численных решений к аналитическим.

Список литературы

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.
Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskie voprosy chislennoogo resheniya giperbolicheskikh uravneniy. M.: Fizmatlit, 2001.
2. Janhunen P. A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods // J. Comp. Phys. 2000. Vol. 160. P. 649–661.
3. Gurski K. An HLLC-type approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics // SIAM J. Sci. Comp. 2004. Vol. 25. P. 2165–2187.
4. Powell K. G., Roe P. L., Linde T. J., Gombosi T. I., De Zeeuw D. L. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 154, No 2. P. 284–309.

5. *Brackbill J. U., Barnes D. C.* The effect of nonzero on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations // *J. Comp. Phys.* 1980. Vol. 35. P. 426.
6. *Dedner A., Kemm F., Kroner D., Munz C.-D., Schnitzer T., Wesenberg M.* Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations // *Ibid.* 2002. Vol. 175. P. 645–673.
7. *Dai W., Woodward P. R.* A simple finite-difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations // *Ibid.* 1998. Vol. 142, No 2. P. 331–369.
8. *Ryu D., Miniati F., Jones T. W., Frank A.* A divergence-free upwind code for multidimensional magnetohydrodynamic flows // *Astrophys. J.* 1998. Vol. 509. P. 244.
9. *Balsara D. S., Spicer D. S.* A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations // *J. Comp. Phys.* 1999. Vol. 149. P. 270–292.
10. *Toth G.* The constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes // *Ibid.* 2000. Vol. 161. P. 605–652.
11. *Галанин М. П., Лукин В. В.* Обеспечение бездивергентности магнитного поля при решении системы уравнений МГД методом RKDG // *Журнал вычислит. мат. и мат. физ.* 2015. Т. 55, № 8. С. 1329–1340.
Galanin M. P., Lukin V. V. Obespechenie bezdivergentnosti magnitnogo polya pri reshenii sistemy uravneniy MGD metodom RKDG // *Zhurnal vychislit. mat. i mat. fiz.* 2015. Т. 55, № 8. С. 1329–1340.
12. *Torrilhon M.* Locally divergence-preserving upwind finite volume schemes for magnetohydrodynamic equations // *SIAM J. Sci. Comp.* 2005. Vol. 26, No 4. P. 1166–1191.
13. *Shankar V., Hall W. F., Mohammadian A. H.* A CFD-based finite-volume procedure for computational electromagnetics – interdisciplinary applications of CFD methods // *AIAA.* 1989. Paper 89-1987.
14. *Лебедев А. С., Федорук М. П., Штырина О. В.* Решение нестационарных уравнений Максвелла для сред с неоднородными свойствами методом конечных объемов // *Вычислительные технологии.* 2005. Т. 10, № 2. С. 60–73.
Lebedev A. S., Fedoruk M. P., Shtyrina O. V. Reshenie nestatsionarnykh uravneniy Maksvella dlya sred s neodnorodnymi svoystvami metodom konechnykh ob'omov // *Vychislitelnye tekhnologii.* 2005. Т. 10, № 2. С. 60–73.
15. *Toro E.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 2009.
16. *Taflove A.* Computational Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House, 1998.
17. *Dai W., Woodward P. R.* An approximate Riemann solver for ideal magneto hydrodynamics // *J. Comp. Phys.* 1994. Vol. 111. P. 354–372.
18. *Brio M., Wu C. C.* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magneto hydrodynamics // *Ibid.* 1988. Vol. 75. P. 400–422.
19. *Han J., Tang H.* An adaptive moving mesh method for two-dimensional ideal magnetohydrodynamics // *Ibid.* 2007. Vol. 220. P. 645–673.

Статья поступила в редакцию 04.03.19.

A METHOD FOR MULTI-DIMENSIONAL ELECTRODYNAMIC SIMULATIONS ON UNSTRUCTURED MESHES / I. V. Sobolev (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhny Novgorod Region).

The paper describes numerical simulations of electrodynamic equations on unstructured polyhedral meshes by a second-order Godunov-type method. For ideal magnetohydrodynamics we use three difference schemes based on an approximate Riemann solver. We also discuss exclusion of the numerical magnetic charge by the CT method. The difference scheme for Maxwell's equations employs an exact Riemann solver. Test simulations are presented and compared with published data.

Keywords: equations of ideal magnetohydrodynamics, Maxwell's equations, Godunov method, unstructured meshes.
