

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОСЕТОЧНОГО РЕШАТЕЛЯ СЛАУ

Ю. Н. Дерюгин, П. А. Машенькин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассматривается применимость технологии решения системы линейных алгебраических уравнений многосеточным методом для задач подземной гидродинамики. Приведена методика решения задач однофазной фильтрации в неоднородной и анизотропной пористой среде на неструктурированной сетке, состоящей из выпуклых несамопересекающихся ячеек. Экспериментально показано, что эффективность использования алгебраического многосеточного метода растет с увеличением характера неоднородности породы в пластах и увеличением размера расчетной сетки в задаче. Проведено сравнение решателя крыловского типа PCG и алгебраического многосеточного решателя по сходимости невязки и затраченному времени решения.

Ключевые слова: СЛАУ, алгебраический многосеточный решатель, подземная гидродинамика, аппроксимация на неструктурированной сетке.

Введение

Эксплуатация и обеспечение безопасности подземной среды требуют создания методов математического моделирования комплекса природных и техногенных процессов, протекающих в геологических объектах. В ряде случаев решения и оценки должны учитывать процессы фильтрации жидкости в многослойных неоднородных системах, имеющих сложную геологическую структуру. Такие задачи возникают при прогнозе воздействия на подземную среду в ходе эксплуатации ядерно опасных объектов, химических, горнопромышленных и нефтегазодобывающих предприятий, в результате возникновения на них аварий и чрезвычайных ситуаций, когда для адекватного моделирования прогноза необходимо создание моделей регионального масштаба. Построение подробных моделей подземной среды предполагает использование неструктурированных сеток, адаптированных к геологическим структурам пласта с возможностью детальной дискретизации особенностей его строения, неявной аппроксимации уравнений фильтрации.

Поскольку основная вычислительная нагрузка приходится на решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), то весьма важной задачей является сокращение времени их решения. Как известно, прямые методы непригодны для решения задач на сетках с большим количеством ячеек [1]. Полное решение системы требует большого количества вычислительных операций. Кроме того, прямые методы являются сильно затратными по памяти ЭВМ. Применение итерационных методов CG, BiCGStab и др. (решатели в пространствах Крылова) для плохо обусловленных матриц требует выполнения операции предобуславливания, занимающей большую часть времени решения СЛАУ. Другой подход состоит в применении геометрических (GMG) или алгебраических (AMG) многосеточных итерационных методов, в которых неизвестный вектор находится в результате решения порождаемой последовательности СЛАУ уменьшающегося размера. Возможно также предобуславливание AMG в итерационном решателе первого типа. Сложность алгоритмов многосеточных методов решения оценивается как $O(N)$, где N — число неизвестных. То есть количество арифметических операций растет пропорционально увеличению количества неизвестных. Этот факт позволяет рассматривать многосеточные методы как потенциально наилучшие методы решения СЛАУ

в области высокопроизводительных вычислений. Как отмечается в литературе [2], GMG-метод не столь автоматизирован как AMG. AMG уступает GMG-методу по скорости, а его преимуществом является применимость в задачах с неструктурированными сетками.

В настоящее время существует много реализаций многосеточных методов, как зарубежных (AmgX [3], Trilinos/ML [4], hupre/BoomerAMG [5]), так и отечественных (например, PMLP/ParSol [6]). В пакете НИМФА [7] опробованы многосеточные предобусловливатели из библиотек hupre и PMLP/ParSol.

В данной работе рассмотрены реализация и применение агрегативного алгебраического многосеточного решателя (AgAMG) пакета программ ЛОГОС [8] для решения задач фильтрации жидкости в пористых средах. В первом разделе статьи представлена математическая модель фильтрации жидкости. Во втором — описан метод дискретизации уравнений на произвольной неструктурированной сетке. В третьем — приводится краткое описание многосеточного алгебраического метода. Четвертый, заключительный, раздел содержит примеры решения задач и сравнение методов решения СЛАУ.

1. Математическая модель однофазной фильтрации

Однофазная изотермическая фильтрация жидкости в пористой среде описывается двумя основными соотношениями: сохранения массы жидкости и закона Дарси [9]:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = q; \quad (1)$$

$$\vec{V} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}). \quad (2)$$

Здесь используются общепринятые обозначения: t — время; m — пористость; ρ — плотность; V — скорость флюида; \mathbf{K} — тензор проницаемости; μ — вязкость флюида; P — давление; \vec{g} — вектор ускорения свободного падения; q — источник массы флюида. В общем случае тензор проницаемости распределен неравномерно по пространству (направляющие тензора могут резко менять направления, и сами значения могут быть разрывными).

В дальнейшем будем рассматривать фильтрацию несжимаемой жидкости в пористой среде. В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$\nabla \cdot \vec{V} = Q, \quad Q = \frac{q}{\rho}. \quad (3)$$

Подставив (2) в (3), получим эллиптическое уравнение относительно давления:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right) = Q. \quad (4)$$

Для определения однозначного решения уравнение (4) должно быть дополнено граничными условиями первого, второго или третьего рода.

2. Дискретизация уравнений на произвольной неструктурированной сетке

В настоящее время для решения краевых задач широкое распространение получил метод контрольного объема, также известный как интегро-интерполяционный метод. В его основе лежит использование интегрального аналога дифференциальных уравнений, отражающего физическую сущность явления (закон сохранения) [10]. В данной работе метод контрольного объема применяется для построения алгоритма расчета на неструктурированной сетке уравнения изотермической фильтрации несжимаемой жидкости в анизотропной пористой среде.

Пусть расчетная область Ω с границей $\partial\Omega$ покрывается N выпуклыми контрольными объемами Ω_i без зазоров и наложений ($\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \forall (i, j) : i \neq j$). Контрольные объемы (ячейки сетки) являются произвольными многогранниками. Каждый многогранник ограничен произвольным числом граней.

Для составления разностных уравнений проинтегрируем уравнение (4) по объему ячейки неструктурированной сетки:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right] d\Omega = - \int_{\Omega_i} Q d\Omega, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса, объемный интеграл в левой части (5) заменяем интегралом по поверхности ячейки:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right] d\Omega = \oint_{\partial\Omega_i} \left[\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P - \rho \vec{g}) \right] \cdot \vec{n} ds = - \int_{\Omega_i} Q d\Omega. \quad (6)$$

Для составления дискретного аналога (6) введем функцию высоты $h(\vec{r})$. Значение функции h зависит от направления вектора \vec{g} и определяется с точностью до константы $h_0 = h(\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0))$. Формально h выражается следующим образом:

$$h(\vec{r}) = h_0 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}. \quad (7)$$

Используя функцию высоты (7), выражение для скорости фильтрации (2) можно представить в виде

$$\vec{V} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} (\nabla P + \rho |g| \nabla h),$$

а поток жидкости через грань как

$$\vec{V} \cdot \vec{n}_f = -\frac{1}{\mu} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla P) - \frac{\rho |g|}{\mu} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla h).$$

Воспользуемся теоремой о среднем и будем аппроксимировать интегралы с помощью квадратурной формулы прямоугольников. В качестве среднего значения функции по объему ячейки G примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани f — ее значение в центре грани. В этом случае получим следующий полудискретный аналог уравнения (6):

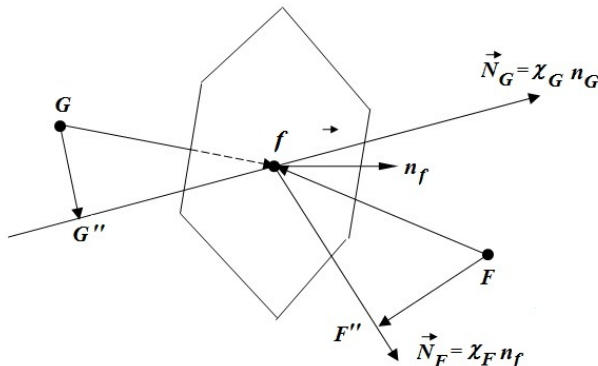


Рис. 1. Схема аппроксимации потока через грань

$$\begin{aligned} - \sum_f \frac{1}{\mu_f} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla P + \rho |g| \mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla h)_f \Delta S_f &= \\ &= Q_G \Delta V_G. \end{aligned}$$

Для аппроксимации потока рассмотрим грань f , разделяющую две ячейки G и F с различными тензорами абсолютной проницаемости. При рассмотрении ячейки G считается, что нормаль грани f направлена в сторону ячейки F (рис. 1). Определим два кономальных вектора \vec{N}_G и \vec{N}_F :

$$\vec{N}_G = \mathbf{K}_G^T \vec{n}_f; \quad \vec{N}_F = \mathbf{K}_F^T \vec{n}_f.$$

Для каждого из этих векторов определим единичные векторы \vec{n}_G и \vec{n}_F , удовлетворяющие соотношениям

$$\chi_G \vec{n}_G = \mathbf{K}_G^T \vec{n}_f, \quad \chi_G = |\mathbf{K}_G^T \vec{n}_f|; \quad \chi_F \vec{n}_F = \mathbf{K}_F^T \vec{n}_f, \quad \chi_F = |\mathbf{K}_F^T \vec{n}_f|.$$

Проведем через центры G и F ячеек плоскости, перпендикулярные векторам \vec{n}_G и \vec{n}_F . Определим точки G'' и F'' (см. рис. 1) пересечения этих плоскостей с прямыми линиями, проходящими через центр грани f параллельно векторам \vec{N}_G и \vec{N}_F соответственно.

В предположении, что в точках G'' , F'' и центре грани известны значения давления и функции высоты, потоки от перепада давления и высоты будут определяться следующим образом:

$$\frac{1}{\mu} (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla P) \Delta S_f = \frac{\chi_f}{\mu_f} \frac{P_{F''} - P_{G''}}{|\Delta \vec{R}_{F''f}| + |\Delta \vec{R}_{G''f}|} \Delta S_f; \quad (8)$$

$$\frac{\rho}{\mu} |g| (\mathbf{K}^T \vec{n}_f \cdot \nabla h) \Delta S_f = \rho_f |g| \frac{\chi_f}{\mu_f} \frac{h_{F''} - h_{G''}}{|\Delta \vec{R}_{F''f}| + |\Delta \vec{R}_{G''f}|} \Delta S_f, \quad (9)$$

где значение эффективного коэффициента χ_f в центре грани будем определять неким средним значением.

Предположим, что давление и потоки слева и справа от грани непрерывны. Так как осреднение должно применяться для произвольной грани, рассмотрим такую грань, у которой проекция силы тяжести нулевая. Определим удельные потоки через грань f со стороны ячейки G и со стороны ячейки F через значение давления на грани P_f :

$$Flux_G = \frac{\chi_G P_{F''} - P_f}{\mu_f |\Delta \vec{R}_{F''f}|}; \quad Flux_F = \frac{\chi_F P_f - P_{F''}}{\mu_f |\Delta \vec{R}_{F''f}|}.$$

Приравнявая эти потоки и исключая давление на грани P_f , получаем взвешенное среднее гармоническое усреднение:

$$\chi_f = \frac{\chi_G \chi_F \left(|\Delta \vec{R}_{G''f}| + |\Delta \vec{R}_{F''f}| \right)}{\chi_G |\Delta \vec{R}_{F''f}| + \chi_F |\Delta \vec{R}_{G''f}|}.$$

Отметим, что значения функции высоты в (9) непосредственно определяются в точках G'' и F'' . Значения давления в этих точках вычисляются по формулам

$$P_{G''} = P_G + (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{GG''}; \quad P_{F''} = P_F + (\nabla P)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF''} \quad (10)$$

с использованием значений градиента давления, вычисленных в центрах ячеек, например, по формуле Гаусса—Грина [11]. При подстановке (10) в (8) получим окончательное выражение для фильтрационного потока через внутреннюю грань двух смежных ячеек:

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -\lambda_f \left(P_F - P_G + (\nabla P)_F \cdot \Delta \vec{R}_{FF''} - (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{GG''} \right) - \rho_f |g| \lambda_f (h_{F''} - h_{G''}), \quad (11)$$

где коэффициент λ_f определяется по формуле

$$\lambda_f = \frac{\chi_G \chi_F}{\mu_f \left(|\Delta \vec{R}_{F''f}| \chi_G + |\Delta \vec{R}_{G''f}| \chi_F \right)} \Delta S_f.$$

Аппроксимация граничных условий зависит от их типа.

Пусть на внешней грани f задано давление. В этом случае поток через внешнюю грань будет определяться следующим образом:

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -\lambda_f \left(P_f - P_G - (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{GG''} \right) - \rho_f |g| \lambda_f (h_f - h_{G''}), \quad (12)$$

где

$$\lambda_f = \frac{\chi_G \Delta S_f}{\mu_f |\Delta \vec{R}_{G''f}|}.$$

Если внешняя грань ячейки принадлежит поверхности, где задан фильтрационный поток, то выражение для потока через внешнюю грань запишется в виде

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -q_f \Delta S_f. \quad (13)$$

Если грань принадлежит участку поверхности, где поставлено граничное условие третьего рода для напора, то выражение для потока через внешнюю грань приобретает вид

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n}_f \Delta S_f = -\alpha \left(P_G + (\nabla P)_G \cdot \Delta \vec{R}_{Gf} - P_f \right) \Delta S_f. \quad (14)$$

Запишем систему разностных уравнений (11), дополненную аппроксимациями граничных условий (12)–(14), для каждой внутренней точки в виде СЛАУ

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где A — разреженная матрица с размерами $N \times N$; \mathbf{x} — искомый вектор размерности N ; \mathbf{b} — вектор правых частей размерности N . Отметим, что для уменьшения количества коэффициентов матрицы значения градиентов давления при аппроксимации потоков в формулах (11)–(13) берутся с предыдущей итерации и добавляются в вектор правой части.

3. Решение СЛАУ

При решении задач подземной гидродинамики широкое распространение для решения СЛАУ получили итерационные методы крыловского типа [12]. Решение систем небольшого размера такими методами совместно с одноуровневым предобусловливанием (например, PCG — комбинация предобусловливателя Эйзенштата [13] с решателем CG) сходится за умеренное число итераций. Однако при увеличении размера СЛАУ увеличивается число итераций, что приводит к нелинейному росту затрат машинного времени на ее решение. В то же время для решения СЛАУ в различных задачах механики сплошных сред широко используется альтернативный подход — применение многосеточных (многоуровневых) решателей, первоначально предложенный в виде геометрического многосеточного метода в работе [14]. В частности, агрегативный многосеточный алгебраический решатель AgAMG применяется в пакете программ ЛОГОС при решении задач аэро- и гидродинамики неявными методами [8].

Как правило, конструкция многосеточного решателя состоит из операторов сглаживания, построения огрубленных сеточных уровней вспомогательных СЛАУ, операторов ограничения и пролонгации. Существенно отличаются как по построению уровней грубых сеток, так и по операторам ограничения и пролонгации селективный и агрегативный виды многосеточных решателей [2]. Многосеточный решатель в пакете программ ЛОГОС основан на построении набора СЛАУ меньшего размера.

На рис. 2 схематично изложена концепция AgAMG. Для построения СЛАУ на грубом уровне множество ячеек разбивается на агрегаты, которые состоят из смежных ячеек и являются виртуальными ячейками конечной грубой СЛАУ или служат для построения следующей более грубой СЛАУ. При этом учитывается сила связи ячеек, определенная через коэффициенты матрицы. Фактически именно это отличает AgAMG от GMG-подхода, в котором используется геометрическая информация для построения сеток на грубом уровне. После разбиения ячеек на агрегаты предполагается, что в ячейках из одного агрегата искомые величины равны. Строки матриц таких ячеек суммируются, и получается матрица меньшей размерности. Оператор, соответствующий этому переходу, называется оператором ограничения. Оператор пролонгации выполняет обратную процедуру. Ячейкам, состоящим в агрегате, присваивается решение, полученное в этом агрегате.

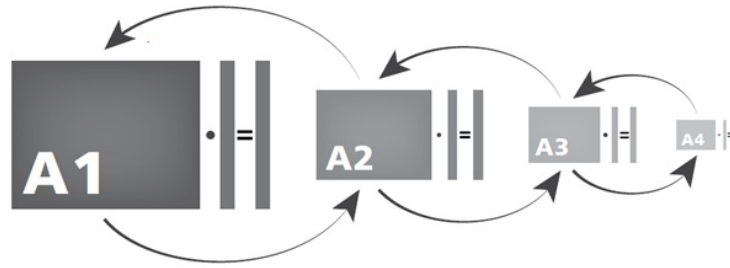


Рис. 2. Концепция AgAMG пакета программ ЛОГОС

Сглаживанием называют процедуру решения системы уравнений классическими методами Якоби, Гаусса—Зейделя, SOR [12]. AgAMG отличается от селективного AMG тем, что вводит новые неизвестные на следующем грубом уровне вместо того, чтобы перевести часть неизвестных текущего уровня на следующий грубый уровень. Это, как правило, приводит к меньшему числу неизвестных во всей иерархии грубых СЛАУ и уменьшению вычислительной сложности построения иерархии СЛАУ и выполнения одной итерации решателя (при однократном и одинаковом сглаживании на каждом уровне).

4. Примеры решения задач однофазной фильтрации с использованием агрегативного AMG-решателя СЛАУ

Задачи подземной гидродинамики существенно отличаются от классической гидродинамики наличием большого количества зон неоднородности. Кроме того, существенно изменяются характерные пространственные размеры, обусловленные строением пластов. Месторождения подземных вод могут тянуться на многие километры, в то время как толщина их может измеряться метрами. Различные выклинивания пластов и их изломы усложняют строение подземных толщ. Эти особенности приводят к увеличению числа обусловленности матрицы СЛАУ, полученной после дискретизации задачи. Далее приведены результаты решения модельных задач, отражающих отмеченные особенности пластовых систем, полученные с использованием решателя AgAMG. Отметим, что при решении методом AgAMG авторами был использован так называемый W -цикл с тремя итерациями сглаживания после применения очередного оператора пролонгации. В качестве сглаживателя был использован метод DILU — ограниченное неполное разложение ILU0 без модификации внедиагональных коэффициентов матрицы. На этих задачах проверялась также эффективность многосеточного решателя AgAMG по сравнению с итерационным решателем PCG.

Задача 1. Рассматривается одномерная фильтрация в пористой среде с проницаемостью 1 мкм^2 . На левом и правом концах отрезка длиной 100 м заданы давления с разностью 10 атм .

Количество ячеек счетной сетки — 10^6 . СЛАУ решается до понижения нормы невязки на 10 порядков. Для предобуславливания в PCG использовался предобуславливатель Эйзенштата [14].

Решение методом PCG было получено за одну итерацию.

Решение с использованием AgAMG было получено примерно за 200 итераций. Для иллюстрации процесса сходимости решения на рис. 3 приведен график зависимости невязки* от числа шагов для AgAMG-решателя.

Видно, что в случае простых одномерных задач выгоднее использовать PCG-решатель.

Задача 2. Постановка задачи аналогична задаче 1, но в отличие от нее коэффициент абсолютной проницаемости задан по логнормальному распределению для каждой ячейки сетки. Параметры логнормального распределения: $\mu = 0$; $\sigma = 1$.

В этой задаче СЛАУ решается до понижения нормы невязки на 10 порядков. Для задачи с количеством ячеек 10^6 решение с использованием PCG-решателя было получено за одну итерацию. Решатель AgAMG показал результат, аналогичный задаче 1.

*Здесь и всюду далее на рисунках оценка невязки приводится в норме L_1 .

На рис. 4 приведен график зависимости невязки от числа итераций при использовании AgAMG-решателя. Невязка понизилась на 9 порядков, и далее решение перестало изменяться по невязке. Решение с использованием AgAMG было получено примерно за 150 итераций.

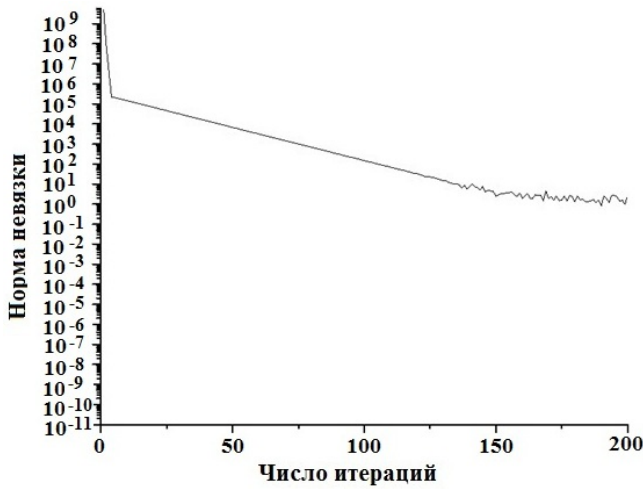


Рис. 3. Зависимость нормы невязки от итераций для модельной задачи 1

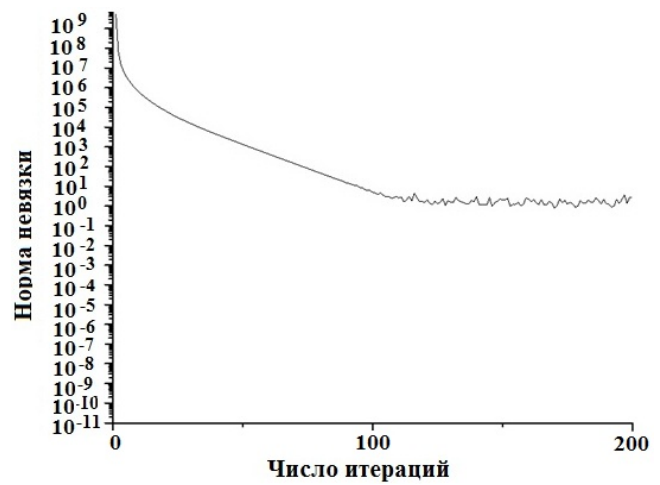


Рис. 4. Зависимость нормы невязки от итераций для модельной задачи 2

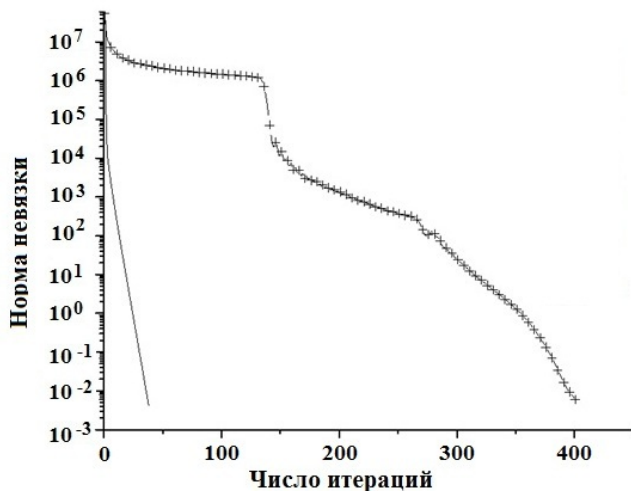


Рис. 5. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 3: — — AgAMG; +++ — PCG

Задача 3. Рассматривается фильтрация в однородной пористой среде с проницаемостью 1 мкм^2 . Решается двумерная задача в квадратной расчетной области с длиной стороны 320 м с заданными давлениями слева и справа. Фильтрация воды происходит при перепаде давления в 10 атм: на левой границе оно задавалось равным 10 атм, на правой — равным нулю. Нижняя и верхняя границы области непроницаемы. Для решения построена квадратная сетка с разбиением 320×320 ячеек.

На рис. 5 приведены зависимости невязки от числа итераций для методов решения СЛАУ. Видно, что метод AgAMG имеет существенное преимущество перед решателем PCG. Невязка при решении методом AgAMG уменьшилась на 10 порядков менее чем за 50 итераций, в то время как решение методом PCG было получено за 400 итераций.

Задача 4. Рассматривается фильтрация в неоднородной пористой среде. Постановка задачи аналогична задаче 3. Коэффициент проницаемости задан по логнормальному распределению с параметрами $\mu = 0$; $\sigma = 1$.

При решении задачи методом AgAMG было построено 16 уровней СЛАУ. Агрегаты на последнем уровне показаны на рис. 6.

Анализ сходимости решения по невязкам для неоднородного случая выявил преимущества AgAMG-решателя перед PCG при решении СЛАУ для этого класса задач. Из рис. 7 видно, что для уменьшения невязки на 10 порядков PCG потребовалось более 500 итераций, в то время как при использовании AgAMG-решателя решение было получено примерно за 50 итераций.

Задача 5. Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном установки скважин при однородной проницаемости. Рассматривается двумерная (квадратная) об-

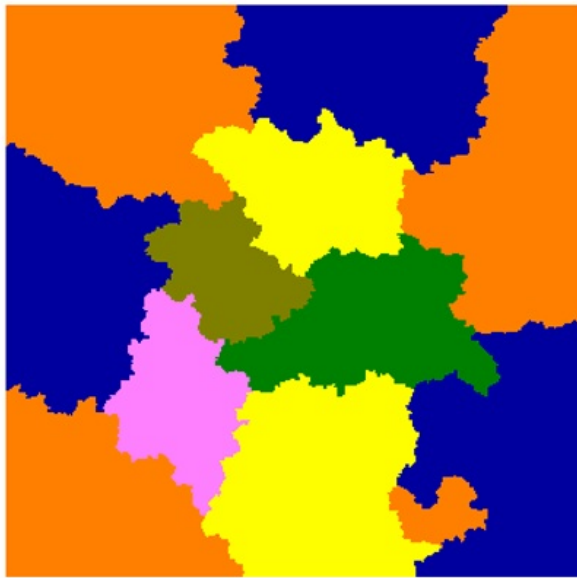


Рис. 6. Агрегаты на 16-м уровне для модельной задачи 4

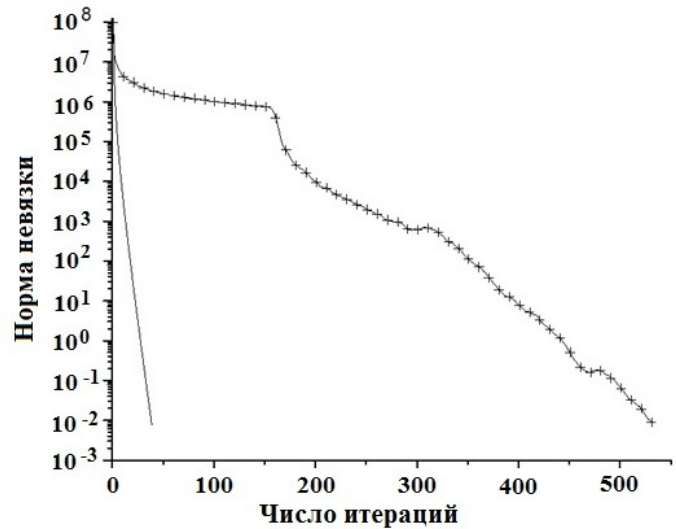


Рис. 7. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 4: — — AgAMG; +++ — PCG

ласть. В левом нижнем и правом верхнем углах области $320 \times 320 \times 1$ м находятся нагнетательная и добывающая скважины с заданным потоком воды $2560 \text{ м}^3/\text{сут}$. Пористость равна единице. Число ячеек в задаче — 320×320 . В этой задаче определялся также перенос пассивной примеси фильтрационным потоком. Решение уравнения переноса примеси проводилось по неявной схеме UD. Задача определения фильтрационных потоков (распределение давления) решалась в данном случае один раз в начале счета.

Численный фильтрационный поток в данной задаче с использованием решателя AgAMG был получен приблизительно за 50 итераций, а при использовании PCG-решателя — более чем за 450 итераций. На рис. 8 показаны зависимости невязки решения от числа итераций для этих решателей.

На рис. 9 приводятся распределения концентраций пассивной примеси на последовательные моменты времени $t = 20$ и 30 сут, полученные с использованием PCG-решателя. Поля концентраций,

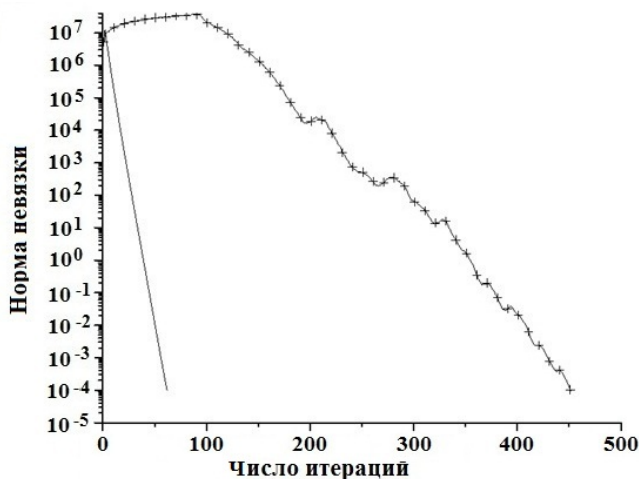


Рис. 8. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 5: — — AgAMG; +++ — PCG

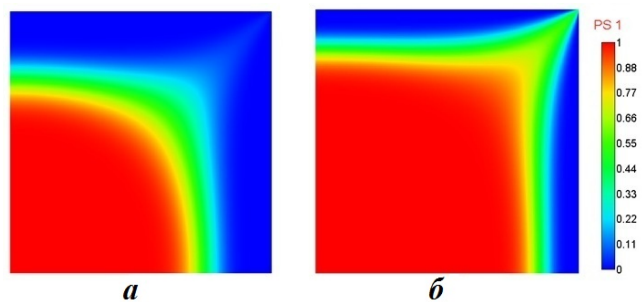


Рис. 9. Поля концентраций пассивной примеси для модельной задачи 5 (PCG-решатель, $dt = 1$ сут): а — $t = 20$ сут; б — $t = 30$ сут

полученные с использованием AgAMG-решателя, аналогичны. При этом потоки через грани совпадают с точностью до $10^{-8} \text{ м}^3/\text{сут}$.

Задача 6. Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном установки скважин при логнормальном распределении абсолютной проницаемости. Параметры логнормального распределения: $\mu = 0$; $\sigma = 1$. Постановка задачи аналогична задаче 5.

В этой задаче число итераций для определения решения с использованием PCG-решателя существенно возросло и составило более 750 итераций. В то же время решатель AgAMG справился с задачей приблизительно за 50 итераций. Характеры зависимостей невязки от числа итераций для этих решателей показаны на рис. 10.

На рис. 11 приводятся расчетные поля пассивной примеси в фильтрационных потоках, полученные при $t = 20$ и 30 сут с использованием PCG-решателя.

Потоки через грани, полученные с помощью методов PCG и AMG решения СЛАУ, как и в задаче 5, совпадают с точностью до $10^{-8} \text{ м}^3/\text{сут}$.

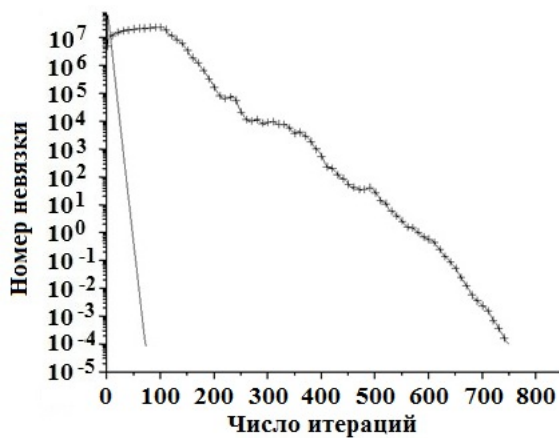


Рис. 10. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 6: — — AgAMG; +++ — PCG

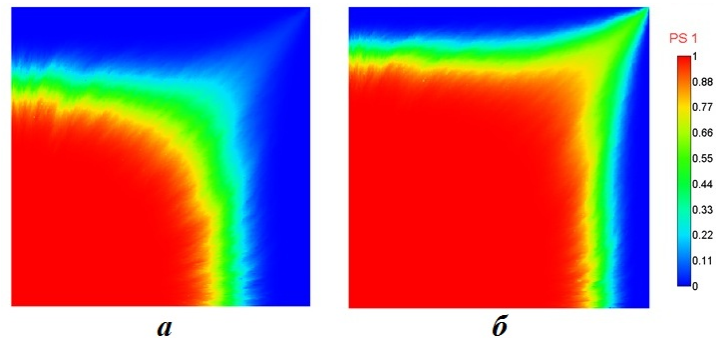


Рис. 11. Поля концентраций пассивной примеси для модельной задачи 6 (PCG-решатель, $dt = 1$ сут): а — $t = 20$ сут; б — $t = 30$ сут

Задача 7. Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном установки скважин при однородной проницаемости (число ячеек — $1\,000 \times 1\,000 \times 1$). В левом нижнем и правом верхнем углах двумерной (квадратной) области $1\,000 \text{ м} \times 1\,000 \text{ м} \times 1 \text{ м}$ находятся нагнетательная и добывающая скважины с заданным потоком воды $25\,000 \text{ м}^3/\text{сут}$. Пористость равна единице. Поведение полей концентрации и давления аналогично задаче 5. Существенным отличием является большой размер матрицы СЛАУ.

На рис. 12 приводятся зависимости невязки от числа итераций в расчетах с решателями AgAMG и PCG. Из сравнения результатов с задачей 5 следует, что при увеличении числа ячеек увеличивается количество итераций в расчете задачи с PCG-решателем, а в расчете с AgAMG-решателем количество итераций остается прежним.

Задача 8. Рассчитывается поле давления в области заводнения с пятиточечным шаблоном установки скважин при логнормальном распределении абсолютной проницаемости (число ячеек — $1\,000 \times 1\,000 \times 1$). Постановка задачи аналогична задаче 6. Логнормальное распределение коэффициента проницаемости задано с параметрами $\mu = 0$; $\sigma = 1$.

На рис. 13 приводятся зависимости невязки от числа итераций в расчетах с решателями AgAMG и PCG. Для сходимости невязки до заданной точности при использовании метода AgAMG было выполнено 68 итераций, в то время как при использовании PCG для сходимости решения потребовалось 2 242 итерации.

Несмотря на то что время выполнения одной итерации для AgAMG-решателя больше, чем для PCG, общее время решения СЛАУ (до невязки $\varepsilon = 0,01$) методом AgAMG оказалось в два раза меньше из-за существенно меньшего количества итераций.

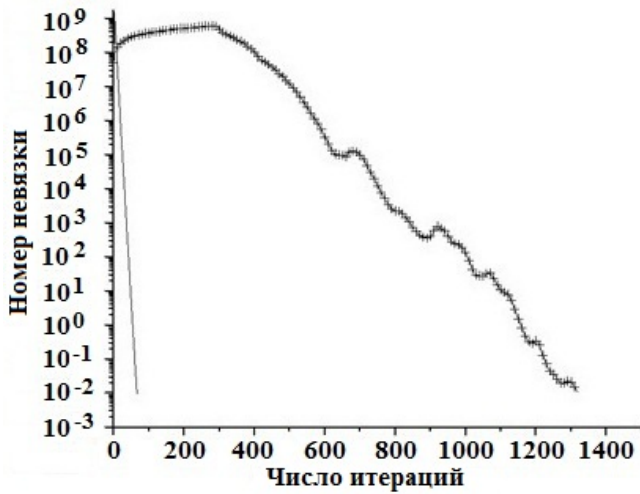


Рис. 12. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 7: — — AgAMG; +++ — PCG

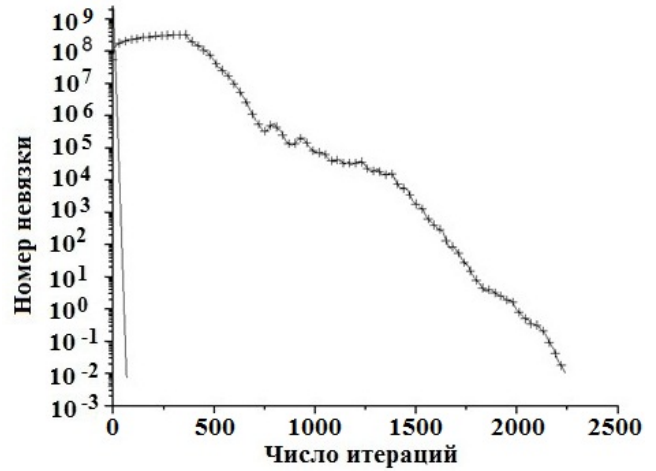


Рис. 13. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 8: — — AgAMG; +++ — PCG

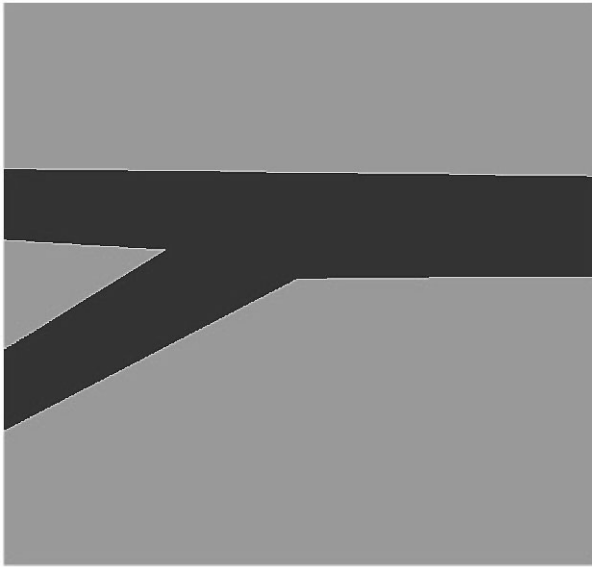


Рис. 14. Зоны неоднородности для модельной задачи 9

Задача 9. Рассчитывается поле давления в неоднородной области вблизи двух источников (рек) с заданным давлением. Рассматривается псевдотрехмерная область. Расчетная область $100\text{ м} \times 100\text{ м} \times 1\text{ м}$ (вертикальный разрез пласта) покрыта сеткой с размерами $1000 \times 1000 \times 1$. Зоны неоднородных включений заданы согласно рис. 14. Слабопроницаемая перемычка (темного цвета) имеет проницаемость 10^{-4} мкм^2 , вне перемычки проницаемость составляет 1 мкм^2 .

Сила тяжести направлена вниз. Начальное давление — 100 бар. В левом и правом верхних углах заданы источники/стоки (с номерами 1 и 2), которые моделируют взаимодействие геологических объектов с пористой средой:

$$Q_1 = \text{Cond}_1(P_1 - P); \quad Q_2 = \text{Cond}_2(P_2 - P),$$

где Q_i ($i = 1, 2$) — массовый поток из источника i в область; Cond_i — коэффициент взаимодействия источника i с пористой средой; P_i — давление в i -м источнике.

Например, были использованы следующие параметры источников:

$$\text{Cond}_1 = \text{Cond}_2 = 1\,000\,000 \frac{\text{кг}}{\text{сут} \cdot \text{бар}}; \quad P_1 = 20 \text{ бар}; \quad P_2 = 30 \text{ бар}.$$

Решение СЛАУ методом AgAMG заняло 57,99 с, а методом PCG — 73,57 с. Поле давления, полученное с использованием решателя AgAMG, приведено на рис. 15. Максимальная по модулю компонента вектора невязки при решении СЛАУ равнялась $1,7 \cdot 10^{-6}$. При решении СЛАУ методом PCG получается такой же результат, поэтому для PCG-метода рисунки не приводятся.

На рис. 16 приводятся зависимости невязки от числа итераций в расчетах с AgAMG- и PCG-решателями. Для сходимости невязки до заданной точности при использовании AgAMG было выполнено 214 итераций, в то время как при использовании метода PCG для сходимости решения потребовалось 2617 итераций.

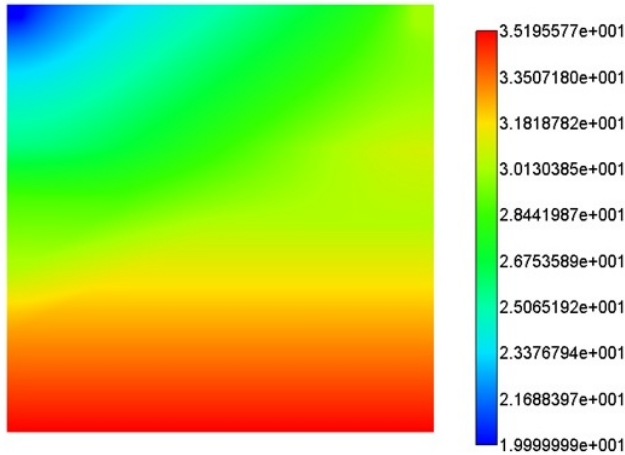


Рис. 15. Стационарное распределение давления (в бар) для модельной задачи 9

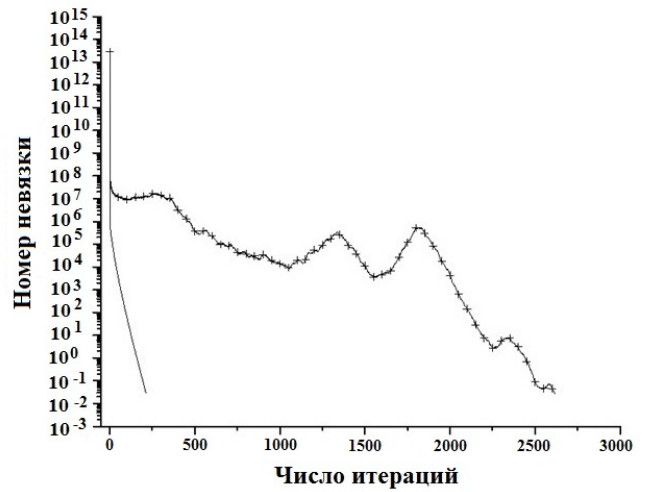


Рис. 16. Зависимости нормы невязки от итераций для модельной задачи 9: — — AgAMG; +++ — PCG

Задача 10. Рассчитывается поле давления в неоднородной области вблизи двух источников (рек) с заданным давлением. Рассматривается трехмерная область малой толщины. Зоны неоднородных включений заданы, как на рис. 14.

Постановка аналогична задаче 9. Расчетная область $100\text{ м} \times 100\text{ м} \times 1\text{ м}$ (вертикальный разрез пласта) покрыта сеткой, состоящей из 2 832 708 тетраэдров (рис. 17).

Коэффициент сглаживания по нелинейности для давления был принят равным 0,5. Это означает, что после каждого решения СЛАУ только половина от вектора приращения суммируется с предыдущим давлением. Критерием окончания итераций служила сходимость системы нелинейных уравнений по невязке (в норме L_1): $\varepsilon_{abs} < 0,01$. Критерием остановки решения для СЛАУ также являлась абсолютная величина невязки $\varepsilon_{abs} < 0,01$. Решение всей задачи с использованием AgAMG-решателя заняло 2 445 с, с использованием PCG-решателя — 4 741 с. Давления, полученные на последней итерации, в обоих случаях идентичны. Поле давления, полученное с помощью AgAMG, приведено на рис. 18.

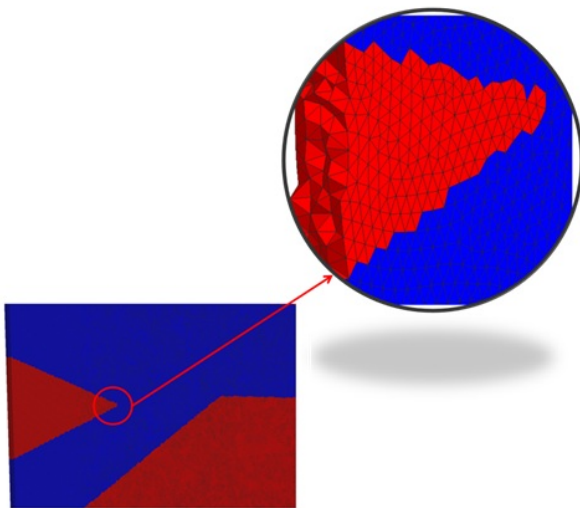


Рис. 17. Сетка, построенная из тетраэдров в модельной задаче 10

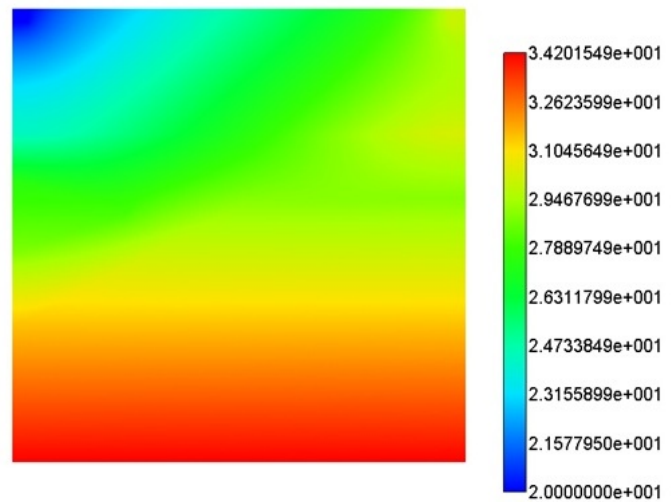


Рис. 18. Стационарное распределение давления (в бар) для модельной задачи 10

Таким образом, решение с использованием многосеточного решателя было получено в 1,94 раза быстрее.

На рис. 19 приведено время расчета потока СЛАУ. Видно, что сначала, при большой невязке (рис. 20), решение методом AgAMG намного опережает PCG. Именно этим фактом и обусловлена конечная разница во времени решения всей задачи. Судя по рис. 20, можно также сказать, что с большой вероятностью характер сходимости по нелинейности для обоих методов был одинаковым.

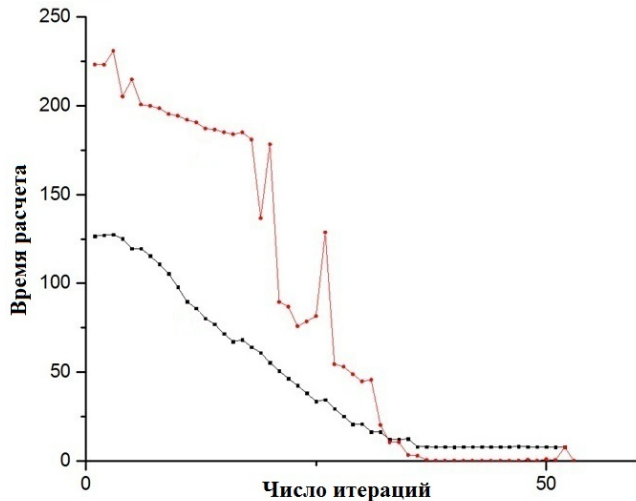


Рис. 19. Время расчета потока СЛАУ для модельной задачи 10: —■— AgAMG; —●— PCG

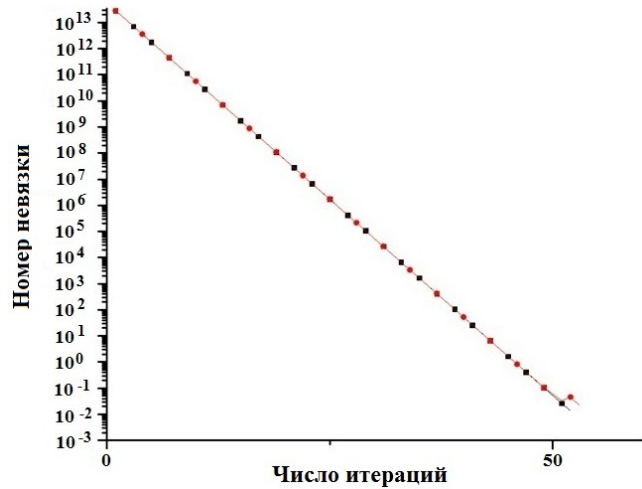


Рис. 20. Норма невязки при решении нелинейной СЛАУ для модельной задачи 10: —■— AgAMG; —●— PCG

Кроме того, на данной задаче были проведены сравнения разных реализаций многосеточного метода из библиотеки PMLP/ParSol, используемой в пакете НИМФА. Рассматривались следующие варианты:

- 1) решатель AgAMG, сглаживатель DILU. Число итераций предварительного сглаживания равно нулю, заключительного сглаживания — 3. Огрубление по двум ячейкам, максимальное число ячеек на грубом уровне равно 5. Тип цикла у AgAMG — W ;
- 2) CG-решатель с селективным AMG в качестве предобусловливателя, сила связи 0,0125. В качестве сглаживателя — решатель Якоби;
- 3) BiCGStab-решатель с AgAMG в качестве предобусловливателя, сглаживатель SGS. Число итераций предварительного сглаживания равно нулю, заключительного сглаживания — 1. Огрубление по двум ячейкам. Тип цикла у AgAMG — V ;
- 4) BiCGStab-решатель с AgAMG в качестве предобусловливателя, сглаживатель DILU. Число итераций предварительного сглаживания равно нулю, заключительного сглаживания — 3. Огрубление по двум ячейкам. Тип цикла у AgAMG — W .

Сравнивалось время решения первых десяти СЛАУ и 24-й СЛАУ. В таблице для указанных вариантов приведено время работы и число итераций (в скобках) решателей с критерием сходимости (в ЛОГОС и PMLP/ParSol) по L_2 -норме вектора невязки.

Из таблицы видно, что использование CG-решателя с селективным AMG в качестве предобусловливателя (вариант 2) больше всего ускоряет решение задачи. Но при этом, как известно, увеличиваются затраты по оперативной памяти по сравнению с использованием AgAMG в качестве решателя.

Время (в с) и число итераций решателей для модельной задачи 10

Номер СЛАУ	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	103,0 (21)	35,3 (102)	187,1 (156)	110 (10)
4	79,5 (16)	31,8 (99)	175,9 (149)	89,2 (8)
7	64,9 (13)	30,8 (96)	67,4 (56)	67,9 (6)
10	50,7 (10)	30,3 (92)	64,6 (54)	62,6 (6)
24	8,2 (2)	4,5 (9)	3,0 (1)	14,7 (1)

Выводы

В ходе работы была реализована методика решения задач фильтрации в неоднородной пористой среде. Для решения СЛАУ используется метод AMG. Проведено исследование применимости решателя AgAMG для задач подземной гидродинамики. На модельных примерах показано, что на задачах с большим числом ячеек и существенной неоднородностью породы решатель AgAMG дает значительный выигрыш в скорости счета (более чем в 2 раза) по сравнению с PCG. При этом выигрыш растет с повышением неоднородности задачи и увеличением размеров сетки. Кроме того, число итераций метода AgAMG до достижения заданной точности невязки не зависит от числа неизвестных СЛАУ. Поэтому скорость решения "больших" задач фильтрации и гидродинамики с применением AgAMG является максимальной. Различные методы использования AMG-подхода, а также изменение параметров и настроек решателя также могут способствовать увеличению скорости счета задач, как это показано при решении потока СЛАУ задачи 10, где различные варианты AMG использовались в качестве предобуславливателей решателей крыловского типа. При использовании сеток небольшого размера СЛАУ обычно считаются быстрее с использованием PCG.

Авторы выражают благодарность Ю. Г. Бартеневу и А. Н. Стаканову за помощь в проведении численных экспериментов с использованием библиотеки PMLP/ParSol, а также обсуждения полученных результатов.

Список литературы

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копчёнова Н. В. Вычислительные методы. С.-Пб.: Лань, 2014.
Amosov A. A., Dubinskiy Yu. A., Kopchenova N. V. Vychislitelnye metody. S.-Pb.: Lan, 2014.
2. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков А. С., Тетерина И. В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2013.
Volkov K. N., Deryugin Yu. N., Emelyanov V. N., Karpenko A. G., Kozelkov A. S., Teterina I. V. Metody uskoreniya gazodinamicheskikh raschetov na nestrukturirovannykh setkakh. M.: Fizmatlit, 2013.
3. Naumov M., Arsaev M., Castonguay P., Cohen J., Demouth J., Eaton J., Layton S., Markovskiy N., Reguly I., Sakharlykh N., Sellappan V., Strzodka R. AmgX: A library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods // SIAM J. Sci. Comp. 2015. Vol. 37, No 5. P. S602–S626.
4. Gee M. W., Siefert C. M., Hu J. J., Tuminaro R. S., Sala M. G. ML 5.0 Smoothed Aggregation User's Guide. Sandia National Laboratories, 2006.
5. Falgout R. D., Jones J. E., Yang U. M. The design and implementation of hypre, a library of parallel high performance preconditioners // Numerical Solution of Partial Differential Equations of Parallel Computers. 2006. Vol. 51. P. 267–294.
6. Бартенев Ю. Г., Ерзунов В. А., Карпов А. П., Петров Д. А., Пищулин И. А., Стаканов А. Н., Щаникова Е. Б., Капорин И. Е., Миллюкова О. Ю., Харченков С. А., Коньшин И. Н., Мее-

- ров И. Б., Сысоев А. В. Комплекс библиотек параллельных решателей СЛАУ LPARSOL версии 3 // Тр. XV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. С. 89–101.
- Bartenev Yu. G., Erzunov V. A., Karpov A. P., Petrov D. A., Pishchulin I. A., Stakanov A. N., Shchanikova E. B., Kaporin I. E., Milyukova O. Yu., Kharchenkov S. A., Konshin I. N., Meerov I. B., Sysoev A. V.* Kompleks bibliotek paralelnykh reshateley SLAU LPARSOL versii 3 // Tr. XV Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2015. S. 89–101.
7. *Алейников А. Ю., Бардина М. Н., Горев В. В., Горев И. В., Глазунов В. А., Губкова Г. Н., Кузьмина О. И., Новиков И. Г., Панов А. И., Полищук С. Н., Резяпов А. А., Рябов Е. И., Чистякова И. Н.* Параллельная версия комплекса программ НИМФА // Тр. XIII Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. С. 40–49.
- Aleynikov A. Yu., Bardina M. N., Gorev V. V., Gorev I. V., Glazunov V. A., Gubkova G. N., Kuzmina O. I., Novikov I. G., Panov A. I., Polishchuk S. N., Rezyapov A. A., Ryabov E. I., Chistyakova I. N.* Parallelnaya versiya kompleksa programm NIMFA // Tr. XIII Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2012. S. 40–49.
8. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Лашкин С. В., Силаев Д. П., Симонов П. Г., Тятюшкينا Е. С.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 44–56.
- Kozelkov A. S., Deryugin Yu. N., Lashkin S. V., Silaev D. P., Simonov P. G., Tyatyushkina E. S.* Realizatsiya metoda rascheta vyazkoy neshhimaemoy zhidkosti s ispolzovaniem mnogosetochnogo metoda na osnove algoritma SIMPLE v pakete programm LOGOS // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 4. S. 44–56.
9. *Азис Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- Azis Kh., Settari E.* Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem. M.-Izhevsk: Institut komputernykh issledovaniy, 2004.
10. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005.
- Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P.* Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. M.: Fizmatlit, 2005.
11. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, 2002.
12. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Minneapolis, University of Minnesota, 2000.
13. *Eisenstat S. C.* Efficient implementation of a class of preconditioned conjugate gradient methods // SIAM J. Sci. Comp. 1981. Vol. 2, No 1. P. 1–4.
14. *Федоренко Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
- Fedorenko R. P.* Relaksatsionny metod resheniya raznostnykh ellipticheskikh uravneniy // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1961. T. 1, № 5. S. 922–927.

Статья поступила в редакцию 15.02.19.

SINGLE-PHASE FLOW SIMULATIONS USING AN ALGEBRAIC MULTIGRID SOLVER FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS / Yu. N. Deryugin, P. A. Mashenkin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

Usability of an algebraic multigrid solver for systems of linear algebraic equations in underground hydrodynamic simulations is considered. A methodology for solving the problems of single-phase flow in non-uniform and anisotropic porous media on unstructured meshes composed of convex non-self-intersecting cells is presented. It is shown experimentally that the efficiency of using the algebraic multigrid solver grows with increasing non-uniformity of bed rock and increasing problem mesh size. The algebraic multigrid solver is compared with the Krylov-type PCG solver in error convergence and computing time.

Keywords: SLAE (system of linear algebraic equations), algebraic multigrid solver, underground hydrodynamics, approximation on unstructured mesh.
