

УДК 519.6

О РАЗВИТИИ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК В ДЕФОРМИРОВАННЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ИХ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛАМИ ВРАЩЕНИЯ, ОБРАЗОВАННЫМИ НЕСКОЛЬКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Н. А. Артёмова, О. В. Ушакова
(ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург)

Рассматривается задача о построении сетки в телах вращения, деформированных телами вращения. Тело вращения может быть образовано цилиндрическими, коническими или сферическими поверхностями и формироваться вращением элементов двух видов — отрезков прямых и дуг окружностей. Ранее был предложен нестационарный алгоритм построения сеток в областях с подвижными деформируемыми границами для частных случаев деформации цилиндром, конусом и сферой. В данной работе рассматривается дальнейшее развитие нестационарного алгоритма. Суть алгоритма осталась прежней, усложнилась реализация в связи с усложнением конструкции деформирующей области. Приводятся примеры расчетов сеток.

Ключевые слова: структурированные сетки, область вращения, деформированная область вращения, оптимальные сетки, подвижные сетки.

Введение

В работе [1] предложен алгоритм построения структурированных сеток в телах (областях) вращения, деформированных другими телами вращения. Способ получения таких деформированных тел можно описать следующим образом. Деформация тела вращения осуществляется давлением на него другим телом вращения, в процессе которого деформирующее тело движется (давит) на основное в направлении заданного вектора деформации до нужной степени. В результате такого воздействия основное тело вращения деформируется: его граница в области деформации вдавливаются и принимает форму вспомогательного (деформирующего) тела, при этом форма остальной части основного тела (не подвергшейся воздействию) не изменяется. Под телом вращения понимается тело, которое получается поворотом плоской образующей кривой, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, на 180° . Следует отметить отличие такого тела вращения от классического, получаемого поворотом плоской образующей кривой на 360° . Оно подробно описано в [2].

Предложенный в [1] алгоритм был реализован для частных случаев давления на тело вращения конусом, цилиндром и сферой. Это дало основу для разработки алгоритма в более общем случае. В данной работе описывается дальнейшее развитие алгоритма для случаев, когда давящая поверхность деформирующего тела вращения может состоять из кусков цилиндрических, конических и сферических поверхностей.

Сетки в деформированных областях применяются для математического моделирования задач многокомпонентной гидродинамики [3]. Один из подходов, используемый для построения сеток в деформированных телах вращения, — это метод отображений [4]. Согласно данному методу построение структурированных сеток в области геометрически сложной формы, называемой физической, осуществляется с помощью невырожденного отображения области более простой формы, называемой параметрической. В трехмерном случае параметрическая область — это прямоугольный параллелепипед. Соответственно физическая область представляется в виде криволинейного

шестигранника, а структурированная сетка в физической области является образом равномерной ортогональной сетки в прямоугольном параллелепипеде для этого отображения. Способ представления области в виде криволинейного шестигранника определяет конфигурацию области. Для построения сетки задается фиксированная (стационарная) геометрия деформированной области вращения и ее конфигурация, а отображение, определяющее сетку в заданной области, находится с помощью нестационарного алгоритма.

Используемый способ построения сеток в рассматриваемых областях относится к методам построения подвижных сеток, когда в процессе построения сетка движется, подстраиваясь под нестационарный процесс решаемой физической задачи: либо под ее решение, либо под меняющуюся геометрию области (см. [5–7]). В данном случае искусственно (без связи с физикой решаемой задачи) организуется специальный нестационарный процесс, в котором меняется геометрия области и осуществляется адаптация к ней сетки так, чтобы в конечном итоге были получены заданная (заранее зафиксированная) геометрия области и сетка для нее.

Процесс осуществляется итерационно. На каждой итерации незначительно меняется граница основного тела (физической области) так, чтобы в сетке не возникало самопересечений: деформирующее тело сдвигается, и узлы сетки основного тела, попавшие внутрь деформирующего (деформированные граничные узлы), проецируются на него. Другими словами, деформированные граничные узлы перемещаются на деформирующую поверхность. Затем выполняется оптимизация сетки вариационным методом [8]. Такой процесс осуществляется до тех пор, пока деформация основного тела не достигнет нужной степени и не будет получено деформированное тело, в котором требуется построить структурированную сетку.

Выбранный подход представляется наиболее естественным, так как технология построения сеток в телах вращения уже создана [9]. Для областей вращения в работах [2, 8, 10, 11] предложен метод построения структурированных сеток, в котором созданы средства описания геометрий и конфигураций областей вращения, алгоритмы построения начальных сеток и их оптимизации.

Отметим, что аналогичный нестационарный алгоритм может быть применен и для построения неструктурированных сеток в деформированных телах вращения. В этом случае этап деформации совпадает по своей сути с этапом деформации для структурированных сеток, а для этапа оптимизации должен применяться алгоритм построения сеток, удовлетворяющих требуемым критериям качества применительно к неструктурированным сеткам.

Разработка нестационарных алгоритмов построения подвижных сеток всегда являлась сложной задачей, так как в ней, помимо организации самого нестационарного процесса, в данном случае изменения геометрии области, необходимо на каждом его шаге обеспечить построение невырожденной сетки [12], удовлетворяющей заданным критериям качества (равномерность, ортогональность) [8].

В разд. 1 приводится постановка задачи о построении сетки в области вращения, деформированной другой областью вращения. В разд. 2 описывается нестационарный алгоритм построения сеток в деформированных областях. В разд. 3 приводятся примеры расчетов сеток.

1. Постановка задачи

Для удобства и полноты описания повторим постановку задачи из [1].

В декартовой системе координат X с осями x^1, x^2, x^3 задана односвязная область U_x с границей (образующей) ∂U_x , состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, называемых (см. [2, 10, 13, 14]) элементами образующей. При повороте образующей ∂U_x на угол $\varphi = \pi$ вокруг оси x^3 получается область G_x с границей ∂G_x . В декартовой системе координат Ξ с осями ξ^1, ξ^2, ξ^3 задана образующая ∂W_ξ , также состоящая из элементов (отрезков прямых и дуг окружностей), которая при повороте вокруг оси ξ^3 на угол $\varphi = \pi$ формирует поверхность вращения ∂Q_ξ . Двумерная область U_x определяет трехмерную область вращения G_x (рис. 1, а), которую далее будем называть основной, а двумерная область W_ξ — область вращения Q_ξ (рис. 1, б), которую далее будем называть деформирующей или вспомогательной.

Заданы также координаты точки $O_{\Xi X} = (x_O^1, x_O^2, x_O^3)$ начала координат системы Ξ в системе координат X и матрица C перехода от системы координат Ξ к системе координат X . Столбцы матрицы

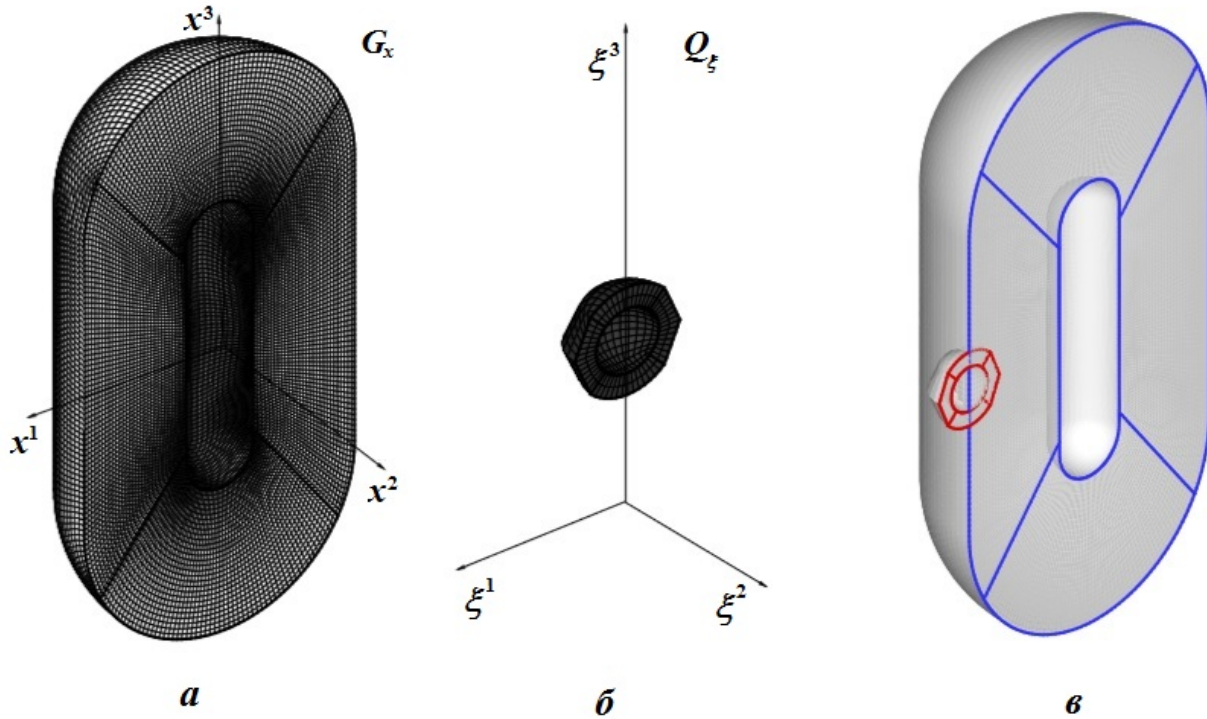


Рис. 1. Построение деформированной сетки: *a* — сетка в области G_x ; *б* — область Q_x ; *в* — области Q_x и G_x в системе координат X

C — координаты ортов $\vec{\xi}^1, \vec{\xi}^2, \vec{\xi}^3$ в системе координат X . Задан вектор деформации \vec{V}_X в системе координат X , указывающий направление вдавливания деформирующего тела в основное. Точка $O_{\Xi X}$ и матрица C задаются таким образом, чтобы после преобразования координат деформирующее тело Q_x приняло окончательное положение внутри основного (рис. 1, *в*).

В основном теле G_x по алгоритмам [10, 14] построена структурированная трехмерная сетка $T \left\{ \left(x_{ijk}^1, x_{ijk}^2, x_{ijk}^3 \right) \right\}$, $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, M - 1$, $k = 0, \dots, L - 1$. Задача состоит в построении структурированной сетки \bar{T} в деформированной области $D = G_x \setminus (G_x \cap Q_x)$ таким образом, чтобы узлы деформированной части границы сетки T переместились на деформирующую поверхность ∂Q_x .

2. Нестационарный алгоритм построения сеток в деформированных телах вращения

Выполнение нестационарного алгоритма, как и в [1], начинается с подготовительного этапа, на котором также определяются параметры деформирующего тела и осуществляется выдвигание основного тела из деформирующего. Но если в [1] параметром деформирующего тела был его вид (цилиндр, конус или сфера), то в новом алгоритме необходимо определить количество и вид элементов образующей, формирующих деформирующее тело (подразд. 2.1).

Заданная форма основного тела деформируется постепенно, итерационно, пока деформация не достигнет необходимой степени (деформирующее тело Q_x примет окончательное положение внутри основного тела (см. рис. 1, *в*)). Так же, как в [1], итерационный процесс состоит из двух этапов — деформации сетки в основной области (подразд. 2.2) и оптимизации деформированной сетки (подразд. 2.3). Снова на этапе деформации выбирается такая скорость (шаг) деформации, чтобы деформация не затронула внутренние узлы сетки. При этом граничные узлы, подвергшиеся деформации, проецируются на деформирующую поверхность. Но в отличие от [1], так как в новом алгоритме деформирующая поверхность может состоять из нескольких поверхностей вращения, нужно определить, на какую из поверхностей будет проецироваться каждый из узлов, подвергшихся деформации.

На этапе оптимизации сетка перестраивается в соответствии с заданными критериями качества, как и в [1].

2.1. Подготовительный этап. Все рассматриваемые тела вращения (основные и вспомогательные) можно условно разделить (см. [10, 14]) на три типа: *полное тело вращения*, *оболочка* и *срезанная оболочка*. Тип тела вращения определяется типом образующей (рис. 2). Образующая в зависимости от типа делится на определенное количество блоков (см. [10]) — участков, концы которых называются далее вершинами. Так, образующая полного тела вращения делится на 4 блока (на рис. 2, а это блоки между вершинами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1), образующая оболочки — на 6 блоков (см. рис. 2, б). Каждый из блоков может состоять из одного или нескольких элементов — отрезков прямых или дуг окружностей. На подготовительном этапе сначала в зависимости от типа тела вращения определяются номера и количество блоков и элементов образующей, формирующих деформирующую (давящую) поверхность.

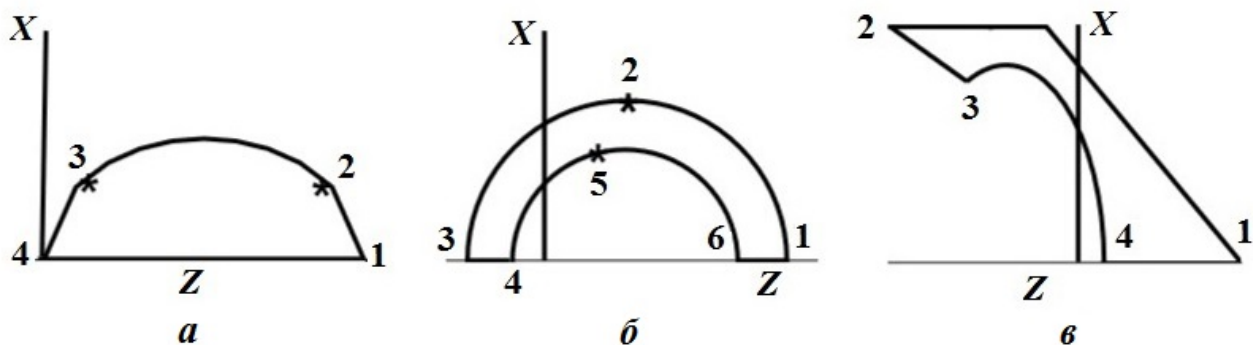


Рис. 2. Типы образующих: а — для полного тела вращения; б — для тела типа *оболочка*; в — для тела типа *срезанная оболочка*

В то же время от типа образующей зависит, какие блоки формируют давящую (деформирующую) поверхность, а какие — внутреннюю (не влияющую на деформацию). Для полного тела вращения деформирующую поверхность формируют три блока (на рис. 2, а это блоки между вершинами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4), для оболочки — два блока (на рис. 2, б — блоки между вершинами 1 и 2, 2 и 3), для срезанной оболочки — один блок (на рис. 2, в блок между вершинами 1 и 2).

На рис. 3 изображена образующая для тела вращения типа *оболочка*. Здесь деформирующую поверхность формируют два блока: DBA и AB_1D_1 . Каждый из этих блоков состоит из двух элементов (DB и BA ; AB_1 и B_1D_1).

Определение деформирующей поверхности в зависимости от образующей AB приведено в работе [1]. Имеют место формулы:

— для прямого кругового цилиндра

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leq R^2, \quad \xi^3 \in [\xi_{\min}^3, \xi_{\max}^3], \quad R = \xi_A^1 = \xi_B^1 \quad (1)$$

(здесь и далее $\xi_{\min}^3 = \min(\xi_A^3, \xi_B^3)$; $\xi_{\max}^3 = \max(\xi_A^3, \xi_B^3)$);

— для сферы с центром в точке $(0, 0, 0)$

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \leq R^2; \quad (2)$$

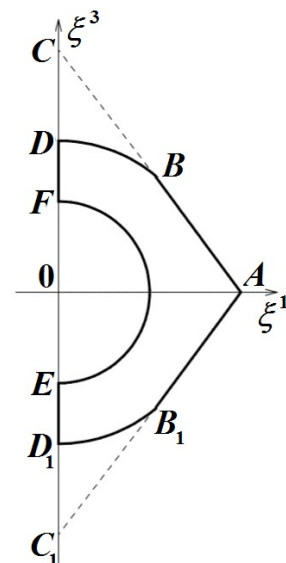


Рис. 3. Образующая для тела вращения

– для конуса

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \leq t^2 (\xi^3 - \xi_v^3)^2, \quad \xi^3 \in [\xi_{\min}^3, \xi_{\max}^3], \quad t = \frac{\xi_B^1 - \xi_A^1}{\xi_B^3 - \xi_A^3}, \quad (3)$$

где ξ_v^3 — координата вершины конуса.

Заметим, что в работе [1] для конуса одна из координат ξ_A^1 или ξ_B^1 должна равняться нулю. Другими словами, один из концов отрезка AB должен был являться вершиной конуса, т. е. усеченный конус не рассматривался. В данной работе это ограничение снято.

Таким образом, в работе [1] вершина конуса выбиралась из точек A и B в зависимости от угла наклона прямой, проходящей через эти точки, к оси ξ^3 :

$$\xi_v^3 = \begin{cases} \xi_{\min}^3, & \text{если } t > 0; \\ \xi_{\max}^3, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

На рис. 4, слева, $t > 0$, следовательно, $\xi_v^3 = \xi_{\min}^3 = \xi_A^3$.

В новой версии программы конус может быть усеченным, а координата вершины конуса вычисляется по формуле

$$\xi_v^3 = \xi_{\min}^3 - \frac{\xi_{\max}^3 - \xi_{\min}^3}{\xi_{\max}^1 - \xi_{\min}^1} \xi_{\min}^1. \quad (4)$$

Для случая, показанного на рис. 4, слева $\xi_{\min}^1 = \xi_A^1 = 0 \Rightarrow \xi_v^3 = \xi_{\min}^3 = \xi_A^3$ ($t > 0$). При $t < 0$ и $\xi_{\max}^1 = 0 \Rightarrow \xi_v^3 = \xi_{\max}^3$. Формула (4) получена из формулы прямой, проходящей через две точки $(\xi_{\min}^1, \xi_{\min}^3)$ и $(\xi_{\max}^1, \xi_{\max}^3)$:

$$\frac{\xi^1 - \xi_{\min}^1}{\xi_{\max}^1 - \xi_{\min}^1} = \frac{\xi^3 - \xi_{\min}^3}{\xi_{\max}^3 - \xi_{\min}^3}$$

при условии $\xi^2 = 0$.

На рис. 3 представлена образующая $DBAB_1D_1EFD$ для тела вращения, изображенного на рис. 1, б. При вращении участков BA и AB_1 получаются усеченные конусы. Вершины этих конусов находятся соответственно в точках C и C_1 .

В работе [1] рассмотрены три вида деформирующего тела — цилиндр, конус и сфера. Вид деформирующего тела определялся по первому элементу образующей. В данной работе рассматривается случай деформации телом, давящая поверхность которого состоит из нескольких поверхностей вращения. Она может состоять из кусков конических, цилиндрических и сферических поверхностей и формируется вращением плоской образующей, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей.

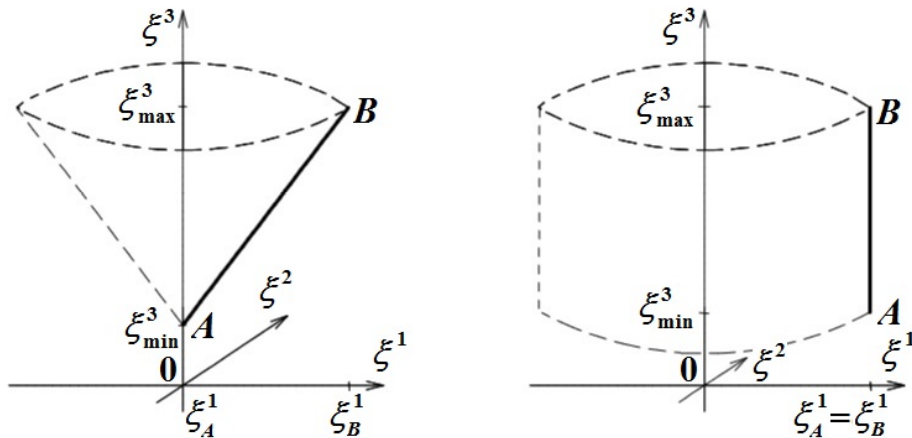


Рис. 4. Конус и цилиндр, полученные вращением отрезка AB

Таким образом, каждый элемент образующей формирует соответствующую поверхность вращения и принадлежность узлов сетки деформирующему телу будет проверяться с помощью условий (1)–(3).

Так как при осуществлении процесса деформации узлы основного тела попадают внутрь деформирующего, заданного в системе координат Ξ , и их принадлежность телу должна проверяться, для упрощения реализации алгоритма наиболее естественным представляется все расчеты проводить в системе координат Ξ , а не X , чтобы иметь возможность воспользоваться формулами (1)–(3). При такой реализации (проверке условий (1)–(3)) деформирующее тело должно оставаться неподвижным (координаты деформирующей поверхности ∂Q_ξ не должны меняться в процессе деформации), вместо этого должно сдвигаться основное тело. Для этого все величины, заданные в системе координат основного тела (начало координат, вектор деформации, а также координаты всех узлов основной области G_x) необходимо перевести в систему координат Ξ по формулам, приведенным в [1].

В результате этих преобразований основное тело примет свое конечное положение (деформирующее тело окажется внутри основного, см. рис. 1, в). Чтобы выдвинуть основное тело так, чтобы не было пересечения (касание допускается) с деформирующим телом перед началом деформации, используется алгоритм, подробно описанный в работе [1]. После этого можно начать деформировать основное тело.

2.2. Этап деформации. Так же, как и в [1], для выполнения алгоритма деформации требуется определить ее скорость (шаг деформации). Первоначально шаг полагается равным среднему расстоянию между узлами сетки T . Все узлы сетки сдвигаются в направлении вектора \vec{V}_Ξ на этот шаг.

Суть алгоритма осталась та же, что и в [1]. Нужно основное тело сдвинуть в направлении деформирующего так, чтобы при деформации в сетке основного тела не возникло самопересечений. Это можно реализовать следующим образом: сдвиг должен быть таким, чтобы основное тело пересекало деформирующее только своей границей, а поверхность, образованная приграничными узлами, деформирующее тело не пересекала. В [1] деформирующая поверхность формировалась вращением только одного элемента и проверка пересечения, а затем проецирование граничных узлов основного тела на деформирующую поверхность осуществлялись только для этого элемента. В более общем случае, так как деформирующая поверхность состоит из нескольких поверхностей вращения, реализация алгоритма усложнилась.

В новом алгоритме организуется процесс перебора элементов, причем он выполняется по крайней мере дважды. При переборе элементов проверяется одно из условий (1), (2) или (3) в зависимости от вида элемента. В первый раз этот процесс осуществляется для проверки пересечения каждой поверхности вращения деформирующей поверхности с приграничной поверхностью основного тела. Если приграничная поверхность основного тела G_ξ пересекла деформирующую поверхность ∂Q_ξ (для какого-либо узла выполнилось одно из условий (1), (2) или (3)), то шаг делится пополам. Узлы сетки \bar{T} сдвигаются с этим меньшим шагом, и снова проверяется наличие пересечения. Если поверхности не пересекаются, то приемлемый шаг выбран, координаты всех узлов сетки \bar{T} основного тела изменяются на значение выбранного шага и процесс перебора элементов осуществляется снова. Теперь поверхности вращения, составляющие деформирующую поверхность, проверяются на пересечение с границей основного тела. Узлы основного тела, для которых выполнилось условие (1), (2) или (3), проецируются на соответствующую поверхность вращения. Проецирование узлов осуществляется по алгоритму О. В. Ушаковой, подробное описание которого представлено в [2, 11, 13].

После проецирования всех узлов, подвергшихся деформации, на деформирующую поверхность, сетка оптимизируется. Для этого осуществляется обратное преобразование координат в систему координат X .

2.3. Этап оптимизации. Алгоритм оптимизации сетки подробно описан в [1]. Оптимизация сетки осуществляется вариационным методом [8, 13], где в качестве критериев оптимальности рассматриваются критерии близости сетки к равномерной и ортогональной. Оптимизация может выполняться как в деформированном фрагменте, так и во всей области.

3. Примеры расчетов сеток

Для тестирования предложенного нестационарного алгоритма использовались различные вспомогательные тела и направления деформации.

Расчет 1. Рассматривается деформация, представленная на рис. 1; образующая изображена на рис. 3. Деформация областью, составленной из сегментов сфер и конусов, вместе с построенной сеткой показана на рис. 5. Для расчета потребовалось 76 шагов деформации, по 100 итераций оптимизации на каждом шаге. Оптимизация осуществлялась во фрагменте.

Расчеты 2 и 3. Деформация осуществлялась тем же телом, что и в расчете 1, но было изменено ее направление. В расчете 2 тело деформировалось справа (рис. 6, *а*), при этом деформирующее тело повернуто на 90° , а в расчете 3 — сзади (рис. 6, *б*). В этих расчетах на каждом шаге деформации выполнялось по 100 итераций оптимизации, причем на 100-м шаге оптимизация проводилась во всей области, на остальных шагах — только в деформированном фрагменте. Для полной деформации сетки в расчете 2 потребовалось 103 шага, в расчете 3 — 156 шагов.

Расчет 4. Деформация выполнялась сзади телом, составленным из цилиндра и конуса (рис. 7). Для расчета потребовалось 97 шагов деформации, по 200 итераций оптимизации на каждом шаге. На 50-м шаге сетка оптимизировалась во всей области, на остальных шагах — во фрагменте.

Расчет 5. Деформация выполнялась сзади телом, составленным из цилиндра и двух конусов (рис. 8). Потребовалось 143 шага деформации. Параметры расчета следующие: 80 итераций оптимизации, оптимизация во всей области проводилась на 100-м шаге.

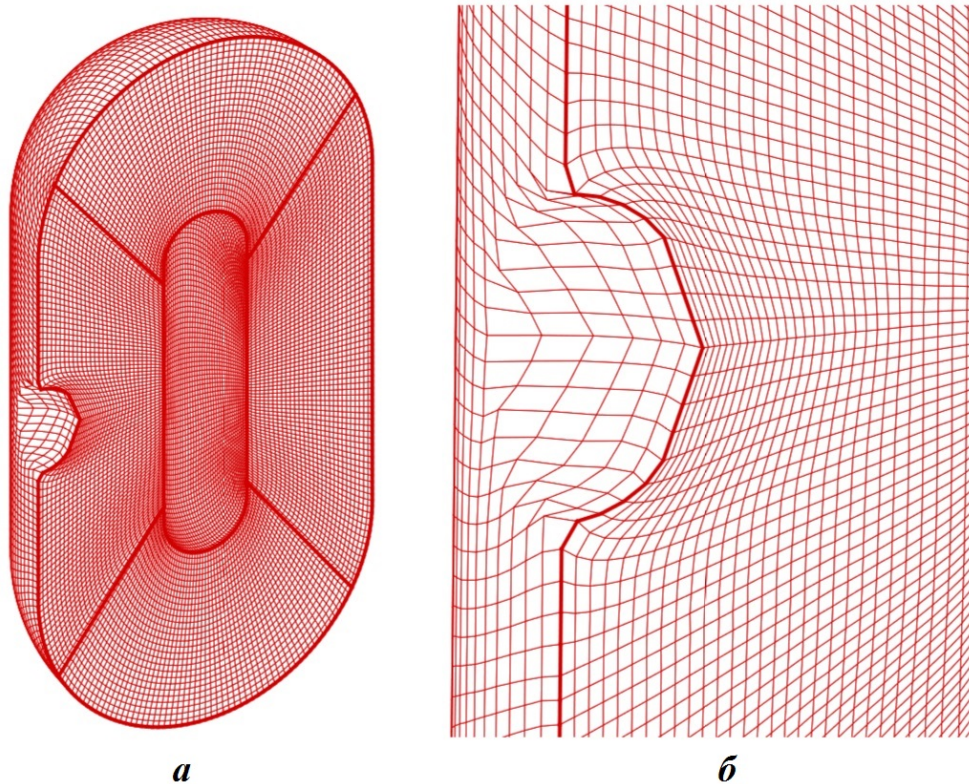


Рис. 5. Расчет 1: сетка на деформированном теле (*а*) и в деформированном фрагменте в увеличенном масштабе (*б*)

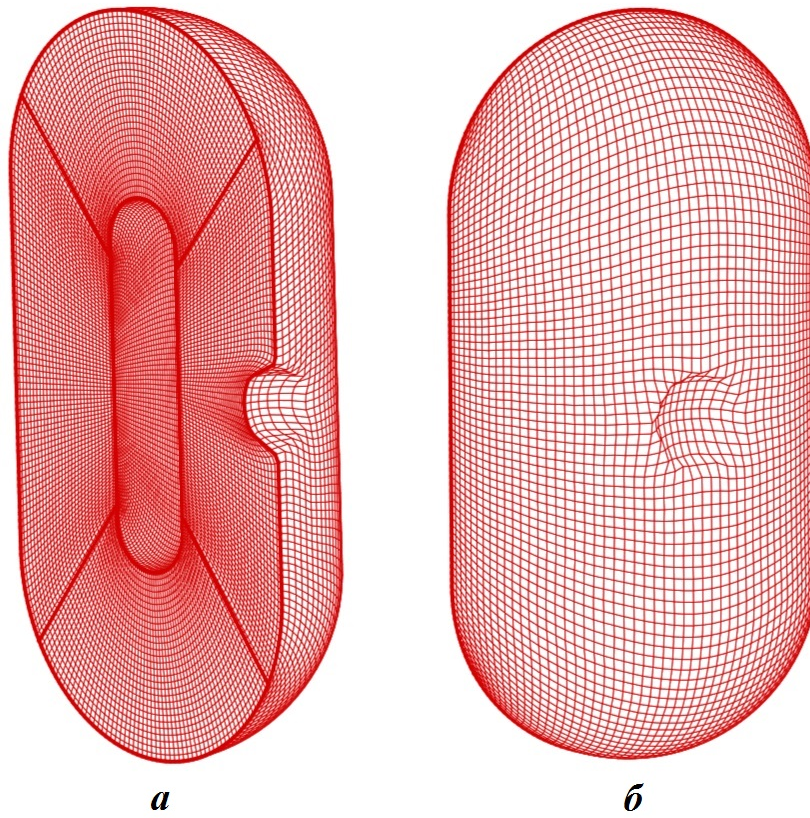


Рис. 6. Сетки на деформированном теле в расчетах 2 (а) и 3 (б)

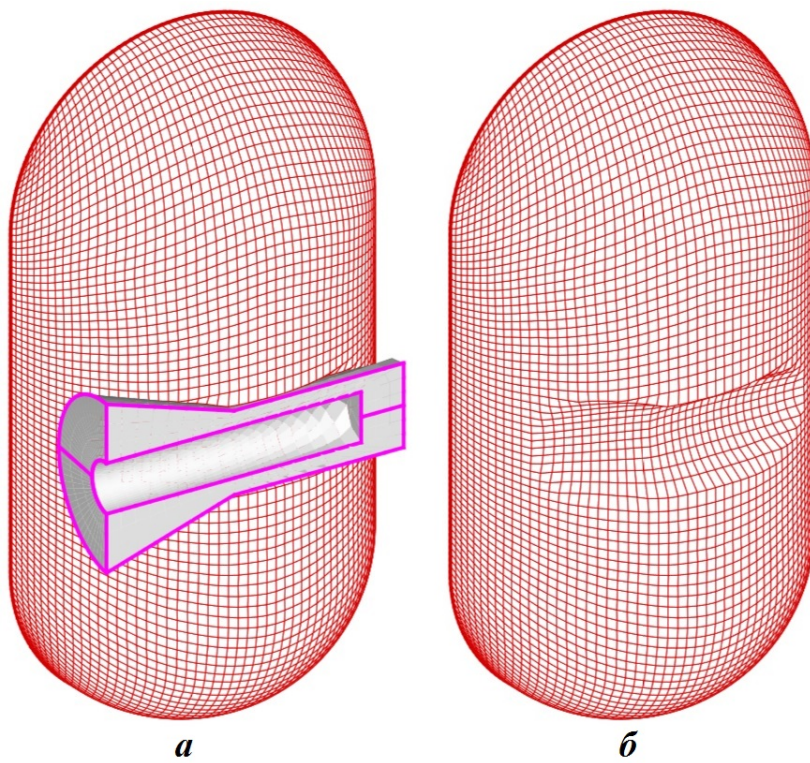


Рис. 7. Расчет 4: деформация телом вращения (а) и сетка на деформированном теле (б)

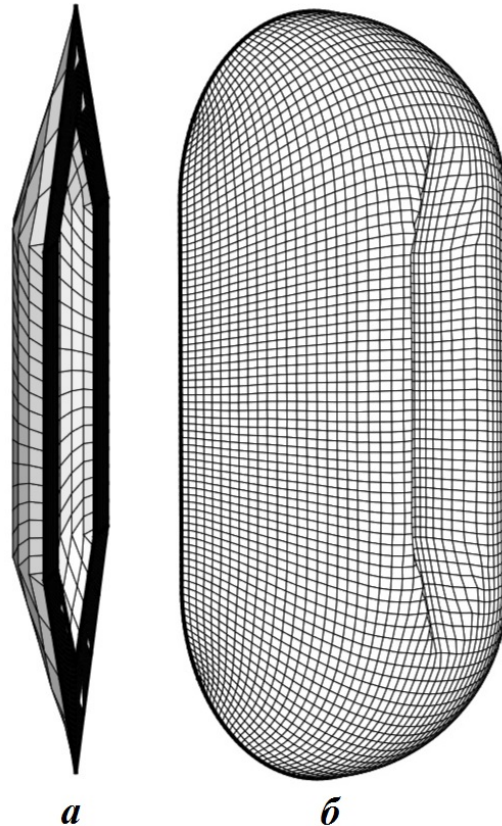


Рис. 8. Расчет 5: вспомогательное (а) и деформированное (б) тела

Заключение

В данной статье рассмотрена деформация телом вращения, образованным цилиндрическими, коническими и сферическими поверхностями, которые можно получить, вращая отрезки прямых линий и дуги окружностей. Проведенные тестовые расчеты по созданным алгоритмам показали работоспособность программ и целесообразность их дальнейшего развития с целью расширения класса деформирующих областей.

Далее планируется реализация алгоритма для класса деформирующих областей, ограниченных поверхностями вращения второго порядка с параллельными осями вращения [15]. Об алгоритмах построения начальных сеток в таких областях написано в работах [9, 16].

Список литературы

1. Артёмова Н. А. Нестационарный алгоритм построения структурированных сеток в деформированных областях // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 4. С. 76–86.
Artyomova N. A. Nestatsionarny algoritm postroeniya strukturirovannykh setok v deformirovannykh oblastiakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 4. S. 76–86.
2. Ушакова О. В. Алгоритм коррекции сетки к области вращения // Там же. 2016. Вып. 1. С. 16–27.
Ushakova O. V. Algoritm korrektsii setki k oblasti vrashcheniya // Tam zhe. 2016. Vyp. 1. S. 16–27.

3. *Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A., Es'kov N. S., Ilyutina O. S., Kozyrev O. M.* Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. N.-Y.: Novascience Publishers, 2007. P. 337–380.
4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki. M.: Nauka, 1976.
5. *Zegeling P. A.* Moving grid techniques // *Handbook of Grid Generation* / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. P. 37-1–37-22.
6. *Staten M. L., Owen S. J., Shontz S. M., Salinger A. G., Coffey T. S.* A Comparison of mesh morphing methods for 3D shape optimization // *Proc. 20th Int. Meshing Roundtable* / Ed. by W. R. Quadros. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. P. 293–311.
7. *Прокопов Г. П.* Вариационные методы расчета двумерных сеток при решении нестационарных задач: Препринт № 4. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, РАН. 2003.
Prokopov G. P. Variatsionnye metody rascheta dvumernykh setok pri reshenii nestatsionarnykh zadach: Preprint № 4. M.: IPM im. M. V. Keldysha, RAN. 2003.
8. *Ушакова О. В.* Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики.* 2008. Т. 14. № 1. С. 150–180.
Ushakova O. V. Algoritmy optimizatsii trekhmernykh setok dlya oblastey vrashcheniya // *Trudy instituta matematiki i mekhaniki.* 2008. T. 14. № 1. S. 150–180.
9. *Anuchina A. I., Artyomova N. A., Gordeychuk V. A., Ushakova O. V.* A Technology for grid generation in volumes bounded by the surfaces of revolutions // *Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing. Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* 2019. Vol. 131. P. 281–292.
10. *Бронина Т. Н.* Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // *Труды института математики и механики.* 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.
Bronina T. N. Algoritmy postroeniya nachalnykh trekhmernykh strukturirovannykh setok dlya oblastey vrashcheniya // *Trudy instituta matematiki i mekhaniki.* 2008. T. 14, № 1. S. 3–10.
11. *Ушакова О. В.* Применение алгоритма коррекции сетки к области вращения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2016. Вып. 2. С. 31–37.
Ushakova O. V. Primenenie algoritma korrektsii setki k oblasti vrashcheniya // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2016. Vyp. 2. S. 31–37.
12. *Ушакова О. В.* О невырожденности трехмерных сеток // *Труды института математики и механики,* 2004. Т. 11, № 1. С. 78–100.
Ushakova O. V. O nevyrozhdennosti trekhmernykh setok // *Trudy instituta matematiki i mekhaniki,* 2004. T. 11, № 1. S. 78–100.
13. *Ушакова О. В.* Алгоритм коррекции сетки к деформированной области вращения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2017. Вып. 2. С. 53–65.
Ushakova O. V. Algoritm korrektsii setki k deformirovannoy oblasti vrashcheniya // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2017. Vyp. 2. S. 53–65.
14. *Bronina T. N., Ushakova O. V.* Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation* / Ed. by O. V. Ushakova. N.-Y.: Novascience Publishers, 2007. P. 283–320.
15. *Ушакова О. В.* Алгоритм коррекции сетки к области, образованной поверхностями вращения с параллельными осями вращения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое*

моделирование физических процессов. 2018. Вып. 1. С. 30—41.

Ushakova O. V. Algoritm korrektsii setki k oblasti, obrazovannoy poverkhnostyami vrashcheniya s parallelnymi osyami vrashcheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Вып. 1. С. 30—41.

16. *Ушакова О. В., Артёмова Н. А., Бронина Т. Н., Анучина А. И., Гордейчук В. И.* Построение сеток в деформированных объемах вращения // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики — 2015: Межд. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Г. И. Марчука. Новосибирск, 19—23 октября 2015 г. Новосибирск: Абвей, 2015. С. 782—788.
- Ushakova O. V., Artyomova N. A., Bronina T. N., Anuchina A. I., Gordeychuk V. I.* Postroenie setok v deformirovannykh obemakh vrashcheniya // Aktualnye problemy vychislitelnoy i prikladnoy matematiki — 2015: Mezhd. konf., posvyashch. 90-letiyu so dnya rozhd. akad. G. I. Marchuka. Novosibirsk, 19—23 oktyabrya 2015 g. Novosibirsk: Abvey, 2015. S. 782—788.

Статья поступила в редакцию 12.02.20.

ON THE DEVELOPMENT OF A GRID GENERATION ALGORITHM FOR DEFORMED SOLIDS OF REVOLUTION FORMED BY SEVERAL SURFACES / N. A. Artyomova, O. V. Ushakova (IMM UB RAS, Ekaterinburg).

A problem of grid generation in solids of revolution deformed by solids of revolution is under consideration. The solid of revolution can be generated by cylindrical, conical or spherical surfaces and formed by rotating two types of elements — segments of straight lines and arcs of circles. A nonstationary algorithm of grid generation in the domains with moving deforming boundaries has been offered earlier for special cases of deformation by a cylinder, a cone and a sphere. This work describes an extension of this nonstationary algorithm. The idea of the algorithm is the same, but its implementation has become more complicated as a result of the increased structural complexity of the deforming domain. Some examples of grids are provided.

Keywords: structured grids, domain of revolution, deformed domain of revolution, optimal grids, moving grids.
