

УДК 519.6

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ДРОБЯЩИХСЯ ЯЧЕЙКАХ СЕТКИ

А. М. Стенин\*

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлен алгоритм решения систем линейных разностных уравнений на адаптивно встраиваемых дробящихся ячейках сетки, основанный на использовании метода решения систем линейных алгебраических уравнений на графах и допускающий распараллеливание вычислений. Алгоритм метода изложен в применении к разностной схеме расщепления для решения трехмерного уравнения теплопроводности, но может быть использован для решения уравнений, описывающих другие физические процессы на дробящихся пространственных сетках.

*Ключевые слова:* трехмерная теплопроводность, разностные схемы расщепления, дробящиеся сетки, линейные разностные уравнения на графах, распараллеливание прогонки.

### Введение

Создание в конце 1960-х — начале 1970-х годов многопроцессорных ЭВМ и применение их для решения задач математической физики естественным образом приводит к созданию и бурному развитию численных методов и алгоритмов, допускающих параллельные вычисления. Такие алгоритмы позволяют проводить вычисления некоторой части искомых величин одновременно с другими величинами. В итоге календарное время решения конкретной задачи может быть значительно сокращено. Именно это обстоятельство является основным фактором, побуждающим к созданию новых, все более совершенных алгоритмов распараллеливания вычислений.

В настоящее время практически все численные методы решения задач математической физики имеют версию программной реализации для параллельных вычислений или вариант программы, пригодный как для последовательных, так и параллельных вычислений.

Для распараллеливания явных разностных схем, часто применяемых, например, для численного решения уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах, можно использовать простой прием разбиения счетной области на подобласти, в каждой из которых вычисление величин производится одновременно с вычислением величин, относящихся к другим подобластям. Для разностных схем на неструктурированных пространственных сетках основные трудности при такой организации параллельных вычислений могут быть связаны с разбиением на подобласти, а также с вычислениями на границах подобластей.

В обзорной статье [1] широко представлены работы по распараллеливанию операций линейной алгебры, а также методов решения систем линейных алгебраических уравнений, относящиеся в основном к периоду 1967—1977 годов. Так, например, в [2] рассматривается модификация метода

\* Стенин Александр Михайлович, ведущий научный сотрудник,  
e-mail: mighty.stenin@yandex.ru

Зейделя, которая предусматривает параллельное выполнение операций. В работе [3] предложен метод распараллеливания прогонки. Алгоритмы решения линейных разностных уравнений на графах представлены в работах [4–6].

В данной работе представлен алгоритм решения систем линейных разностных уравнений на адаптивно встраиваемых дробящихся ячейках сетки, таких как, например, в методике ЭГАК-3D [7], а также на блочно-структурированных кратных сетках методики ЛЭГАК-3D [8]. Алгоритм основан на методе решения систем линейных алгебраических уравнений на графах и допускает распараллеливание вычислений. Алгоритм метода изложен в применении к разностной схеме расщепления по пространственным направлениям для решения трехмерного уравнения теплопроводности, но может быть использован для решения уравнений, описывающих другие физические процессы на дробящихся пространственных сетках.

### Базовая неявная разностная схема на прямоугольных дробящихся сетках

Уравнение теплопроводности в пространственной области  $O$ , ограниченной поверхностью  $\Gamma$ , можно записать в виде закона сохранения энергии в элементарном объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dv = \int_S \kappa \operatorname{grad} T \cdot \vec{N} ds = \int_S \kappa \frac{\partial T}{\partial N} ds, \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $\rho$  — плотность вещества;  $E$  — удельная внутренняя энергия единицы массы вещества;  $T$  — температура;  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  — коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры;  $\vec{N}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ ;  $\frac{\partial T}{\partial N}$  — производная температуры по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ ; радиусы-векторы  $\vec{R} = (x, y, z) \in O$  точек пространства задаются в прямоугольных декартовых координатах.

В начальный момент времени  $t = t_0$  задано распределение температуры  $T(x, y, z, t_0) = T^0(x, y, z)$ . Предполагается, что на границе  $\Gamma$  рассматриваемой области  $O$  задано граничное условие одного из двух типов: граничная температура  $T(\Gamma, t) = T_\Gamma(t)$  или граничный поток  $Q(\Gamma, t) = Q_\Gamma(t)$ .

Базовая полностью неявная разностная схема, на основе которой строится схема расщепления, получается из разностного аналога закона сохранения энергии (1) на дробящихся ячейках сетки.

Трехмерные дробящиеся сетки строятся по следующим правилам. Ячейки исходной основной сетки являются прямоугольными параллелепипедами с параллельными координатным плоскостям гранями и называются ячейками нулевого уровня дробления.

На рис. 1 схематично показана ячейка сетки  $\Omega_{i,j,k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_i - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_j - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_k - 1$ , нулевого уровня дробления с глобальной индексацией ее вершин тройными ниж-

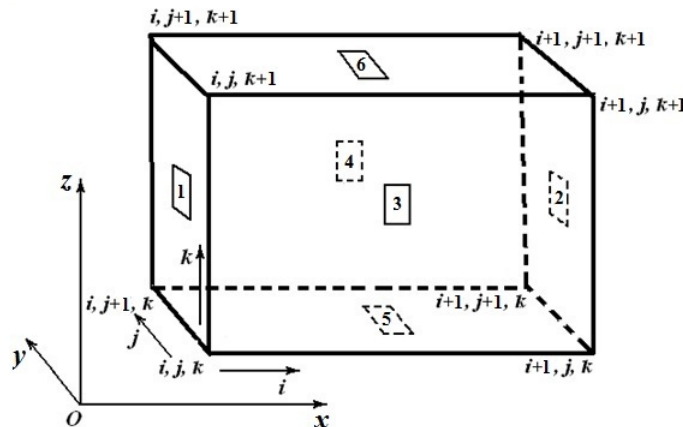


Рис. 1. Ячейка сетки  $\Omega_{i,j,k}$  нулевого уровня дробления

ними индексами:  $\vec{R}_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_i$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_j$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_k$ . В прямоугольниках указаны локальные номера  $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  граней Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6 ячейки  $\Omega_{i,j,k}$ .

Ячейки первого уровня дробления получаются разбиением прямоугольных ячеек нулевого уровня тремя серединными плоскостями, параллельными граням ячейки, на восемь прямоугольных параллелепипедов, имеющих в два раза меньший линейный размер вдоль каждой из осей координат. Каждая ячейка первого уровня, в свою очередь, может быть разбита на восемь ячеек второго уровня дробления, и т. д. При построении дробной сетки требуется, чтобы уровни дробления соседних счетных ячеек сетки отличались не более чем на единицу, что и будем считать всегда выполненным. Количество уровней дробления считаем ограниченным, например, числом 5.

Индексация тройными нижними индексами имеет смысл только для ячеек  $\Omega_{i,j,k}$  исходной структурированной сетки нулевого уровня дробления. По заданным значениям индексов  $i, j, k$  можно получить доступ к любой информации, относящейся к ячейке  $\Omega_{i,j,k}$ .

Предположим, что ячейки сетки  $\Omega_{\text{Я}}$  с уровнем дробления от 1 до 5 снабжаются некими глобальными номерами Я. Термин *глобальный номер* здесь понимается в обобщенном смысле. Например, глобальный номер может быть записан как некоторая последовательность индексов или иных символов, по которым с помощью определенных алгоритмов данного комплекса программ, работающего с дробными ячейками, однозначно отыскивается информация о ячейке сетки  $\Omega_{\text{Я}}$  независимо от ее уровня дробления.

В дальнейшем счетными ячейками сетки называются ячейки  $\Omega_{\text{Я}}$  любого уровня дробления, которые не содержат внутри себя ячеек более высокого уровня дробления. Предполагается, что во всех счетных ячейках заданы значения плотности  $\rho_{\text{Я}}$ , а также температуры  $T_{\text{Я}}$ , удельной внутренней энергии  $E_{\text{Я}}$ , коэффициента теплопроводности  $\kappa_{\text{Я}}$  и других величин, которые используются в процессе решения задачи. Эти величины обозначаются теми же нижними индексами, что и сама ячейка сетки, в которой они определены.

Верхний индекс  $n$  ( $n + 1$ ) при значениях величин, зависящих от времени, указывает момент времени  $t = t^n$  ( $t = t^{n+1}$ ), на который определена соответствующая величина, например,  $E^n = E(t^n)$ ,  $T^n = T(t^n)$ ;  $n$  ( $n + 1$ ) — номер шага по времени. Через  $\tau^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$  обозначается шаг по времени.

Чтобы для некоторой ячейки  $\Omega_{\text{Я}}$  можно было записать уравнение теплового баланса, нужно также иметь информацию о ячейках сетки, которые соседствуют с  $\Omega_{\text{Я}}$  по каждой из ее шести граней.

Для нумерации граней всех счетных ячеек можно использовать принятую здесь ориентацию ячеек сетки, когда все грани параллельны координатным плоскостям декартовой прямоугольной системы координат  $(x, y, z)$ . Любая ячейка сетки  $\Omega_{\text{Я}}$  имеет две грани, параллельные одной из координатных плоскостей (см. рис. 1). На всех трех осях координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  введем ориентацию *левее—правее*. Точки, имеющие меньшую координату на любой из осей, будем считать расположенными левее по отношению к точкам, имеющим большую координату.

Из двух граней ячейки  $\Omega_{\text{Я}}$ , параллельных координатной плоскости  $yOz$ , номер Г1 присвоим той из них, которая расположена левее. Вторая грань, расположенная правее, будет иметь номер Г2. Нормали к этим граням направлены вдоль оси  $Ox$ . Аналогично присвоим номера Г3, Г4 граням, параллельным координатной плоскости  $zOx$  (нормали к этим граням направлены вдоль оси  $Oy$ ), и номера Г5, Г6 — граням, параллельным  $xOy$  (нормали — вдоль оси  $Oz$ ).

Очередную счетную ячейку сетки  $\Omega_{\text{Я}}$ , для которой записан разностный аналог закона сохранения энергии (1), назовем для краткости ячейкой консервативности и присвоим ей локальный номер 0:  $\Omega_0 \equiv \Omega_{\text{Я}}$ . Значения величин, определенные в ячейках консервативности, обозначим нижним индексом 0:  $f_0 \equiv f_{\text{Я}}$ .

Из требования, чтобы уровни дробления соседних счетных ячеек сетки отличались не более чем на единицу, следует, что по каждой из шести граней ячейка консервативности  $\Omega_0 \equiv \Omega_{\text{Я}}$  может иметь либо одну соседнюю ячейку, либо четыре. Возможные типы соседства схематично показаны на рис. 2.

В связи с вышесказанным для каждой ячейки сетки  $\Omega_0 \equiv \Omega_{\text{Я}}$ , рассматриваемой как ячейка консервативности, информация о соседних ячейках по каждой из граней  $\Gamma\gamma$ ,  $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , должна

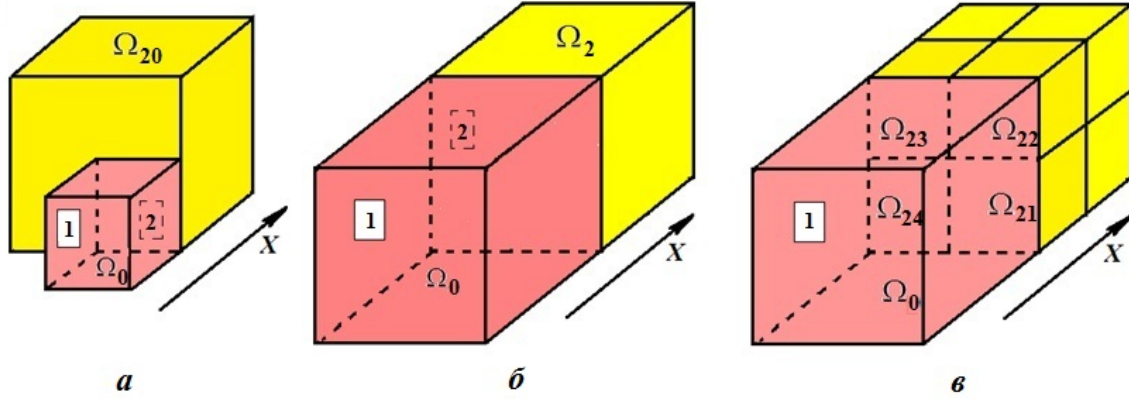


Рис. 2. Типы соседства ячейки консервативности  $\Omega_0$ : а — с ячейкой меньшего уровня дробления; б — с ячейкой того же уровня дробления; в — с ячейками большего уровня дробления

включать количество соседей и их глобальные номера. Будем считать, что в комплексе программ, работающем с дробящимися ячейками, имеется возможность создавать такую информацию о соседях для любой счетной ячейки сетки  $\Omega_0 \equiv \Omega_{\mathcal{Y}}$  в области решения задачи.

Используя в качестве объема интегрирования ячейку сетки  $\Omega_0 \equiv \Omega_{\mathcal{Y}}$ , разностный закон сохранения энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} (E_0^{n+1} - E_0^n) = W_1^{(n+1)} + W_2^{(n+1)} + W_3^{(n+1)} + W_4^{(n+1)} + W_5^{(n+1)} + W_6^{(n+1)}, \quad (2)$$

где  $W_\gamma^{(n+1)}$ ,  $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , — интегральные потоки на гранях ячейки консервативности  $\Omega_0$ .

Зависимость внутренней энергии от температуры в уравнении теплопроводности (1) в общем случае является нелинейной. Поэтому для решения системы разностных уравнений теплового баланса (2) относительно неизвестных значений температуры  $T^{n+1} = \{T_0^{n+1}\}$ , в ячейках сетки  $\Omega_0 \equiv \Omega_{\mathcal{Y}}$ ,  $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{Y}\}$ , используется итерационный метод типа метода Ньютона. Применяется линеаризация путем разложения функции  $E = E(\rho, T)$  в ряд Тейлора по степеням приращения температуры на итерациях:

$$E_0^{(\nu+1)} = E_0^{(\nu)} + K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+1)} - T_0^{(\nu)}) + O(\delta_0^{(\nu)})^2,$$

где  $\nu$  — номер итерации по нелинейности;  $K_0^{(\nu)} = \frac{\partial E}{\partial T}(\rho_0^{(\nu)}, E_0^{(\nu)})$ ;  $\delta_0^{(\nu)} = T_0^{(\nu+1)} - T_0^{(\nu)}$ . Квадратичные по  $\delta_0^{(\nu)}$  слагаемые отбрасываются.

В предположении, что итерации по нелинейности уравнения состояния  $E = E(\rho, T)$  сошлись, имеют место равенства  $T^{n+1} = T^{(\nu+1)}$ ,  $E^{n+1} = E^{(\nu+1)}$ . Тогда приращение удельной внутренней энергии на шаге по времени в ячейке сетки  $\Omega_0$  представляется в виде

$$E_0^{n+1} - E_0^n = E_0^{(\nu+1)} - E_0^n = E_0^{(\nu)} + K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+1)} - T_0^{(\nu)}) - E_0^n = K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+1)} - T_0^{(\nu)}) + E_0^{(\nu)} - E_0^n.$$

Поскольку рассматривается уравнение лучистой теплопроводности, то коэффициенты теплопроводности в ячейках сетки  $\varkappa_0^{n+1} = \varkappa_0(\rho_0, T_0^{n+1})$  зависят от температуры. Для того чтобы избавиться от нелинейности уравнений теплового баланса (2), порожденной зависимостью коэффициентов теплопроводности от температуры на верхнем слое по времени, их можно вычислять по значениям температуры  $T^{(\nu)} = \{T_0^{(\nu)}\}$  на предыдущей итерации по нелинейности уравнения состояния. Условия сходимости такого итерационного процесса исследовались, например, в работе [9].

Иногда в целях экономии времени счета в процессе проведения итераций по нелинейности рекомендуется ограничиться двумя-тремя итерациями по нелинейности коэффициента теплопроводности  $\varkappa = \varkappa(\rho, T)$ . То есть предлагается зафиксировать значения  $\varkappa^{(\nu)} = \{\varkappa_{k,i,l}^{(\nu)}\}$  при  $\nu = 1$  или  $\nu = 2$

и завершать итерационный процесс до сходимости только по нелинейности уравнения состояния. Устойчивость счета тепловых волн при такой организации итерационного процесса исследовалась в работе [10], в которой получены необходимые условия устойчивости.

Таким образом, линеаризованную систему неявных уравнений относительно значений температуры  $T^{(\nu+1)} = \{T_0^{(\nu+1)} \equiv T_{\mathcal{Y}}^{(\nu+1)}\}$ ,  $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{Y}\}$ , на итерациях по нелинейности  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+1)} - T_0^{(\nu)}) = \\ = W_1^{(\nu+1)} + W_2^{(\nu+1)} + W_3^{(\nu+1)} + W_4^{(\nu+1)} + W_5^{(\nu+1)} + W_6^{(\nu+1)} - \frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} (E_0^{(\nu)} - E_0^n). \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения справедливы для всех, без исключения, ячеек сетки  $\Omega_0$  независимо от уровня их дробления. Неявная запись потоков в правой части уравнения (3) обусловлена тем, что они выражаются через температуры на текущей итерации с номером  $\nu + 1$ . В зависимости от типа соседства ячеек (см. рис. 2) они вычисляются по-разному. Для приграничных ячеек консервативности нужно учитывать заданные на их гранях граничные условия.

Система линейных уравнений (3) служит для итерационного вычисления новых значений температуры  $T^{n+1} = \{T_0^{n+1}\}$  и энергии  $E^{n+1} = \{E_0^{n+1} = E(\rho_0, T_0^{n+1})\}$  на шаге по времени. При этом параллельно с вычислением энергии в итерационный процесс в режиме простой итерации вовлекается и вычисление коэффициентов теплопроводности  $\varkappa^{n+1} = \{\varkappa_0^{n+1} = \varkappa(\rho_0, T_0^{n+1})\}$ , зависящих от температуры.

### Разностная схема расщепления на прямоугольных дробящихся сетках

Разностная схема расщепления на прямоугольных дробящихся сетках строится на основе системы линейных уравнений (3). На каждой итерации по нелинейности вместо полностью неявной системы уравнений (3) решаются следующие три системы уравнений, полученные расщеплением потоков по трем пространственным направлениям:

$$\frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+1/3)} - T_0^{(\nu)}) = W_1^{(\nu+1/3)} + W_2^{(\nu+1/3)} - \frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} (E_0^{(\nu)} - E_0^n); \quad (4)$$

$$\frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+2/3)} - T_0^{(\nu+1/3)}) = W_3^{(\nu+2/3)} + W_4^{(\nu+2/3)}; \quad (5)$$

$$\frac{M_0}{\tau^{n+1/2}} K_0^{(\nu)} (T_0^{(\nu+1)} - T_0^{(\nu+2/3)}) = W_5^{(\nu+1)} + W_6^{(\nu+1)}. \quad (6)$$

Отметим, что в уравнениях (4) учитываются тепловые потоки только через грани Г1 и Г2 счетных ячеек независимо от их уровня дробления, в уравнениях (5) — только через грани Г3 и Г4, а в уравнениях (6) — только через грани Г5 и Г6 (см. рис. 1).

Далее будем рассматривать расщепленную систему уравнений (4) записанную относительно неизвестных значений температуры  $\{T^{(\nu+1/3)}\}$  на первой трети итерации по нелинейности. На примере этой системы уравнений будет представлен алгоритм решения разностных уравнений на дробящихся ячейках сетки.

Рассматривается одна строка ячеек сетки нулевого уровня дробления

$$\{\Omega_{i,j_0,k_0}\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_i - 1, \quad \forall j_0, k_0 : 1 \leq j_0 \leq N_j - 1, 1 \leq k_0 \leq N_k - 1,$$

схематично показанная на рис. 3. Предлагаемый метод решения системы уравнений (4) основан на алгоритме решения разностных уравнений на графах [4–6]. Определим в данной строке ячеек аналоги вершин и ребер графов.

*Узловыми ячейками* будем называть те ячейки, которые по своим граням Г1 или Г2 (или по обоим граням сразу) соседствуют с четырьмя ячейками на единицу более высокого уровня дробления. На рис. 3 такие ячейки окрашены в коричневый цвет. К узловым отнесем также приграничные ячейки

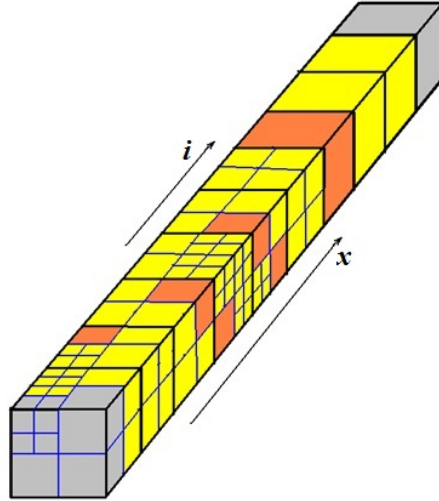


Рис. 3. Строка исходных ячеек нулевого уровня дробления, в которых содержатся дробные ячейки

независимо от их уровня дробления и типа соседства. Эти ячейки окрашены в серый цвет. Узловые ячейки являются аналогами вершин в алгоритмах решения разностных уравнений на графах.

Последовательные ряды ячеек одного и того же уровня дробления (цепочки ячеек), не относящихся к узловым ячейкам, являются аналогами ребер в алгоритмах решения разностных уравнений на графах. Эти цепочки ячеек заключены между узловыми ячейками. На рис. 3 они окрашены в желтый цвет.

Для решения системы разностных уравнений (4) должна быть подготовлена следующая информация об узловых ячейках и цепочках ячеек рассматриваемой строки:

1. Множество узловых ячеек  $\bar{\Omega}_q$ ,  $q = 1, 2, \dots, N_q$ , пронумерованных в произвольном, но фиксированном порядке.
2. Пронумерованные в произвольном порядке цепочки ячеек  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ . Для разных цепочек уровень дробления может быть разным.
3. Ячейки сетки в каждой цепочке пронумерованы в порядке возрастания номеров слева направо:  $\Omega_{j(n)} \in G_n$ ,  $j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1$ .
4. Для каждой цепочки ячеек  $G_n$  с номером  $n$  указан порядковый номер  $ql(n)$  узловой ячейки  $\bar{\Omega}_{ql(n)}$ , соседствующей с крайней левой ячейкой цепочки и порядковый номер  $qp(n)$  узловой ячейки  $\bar{\Omega}_{qp(n)}$ , соседствующей с крайней правой ячейкой цепочки. Таким образом, цепочка ячеек  $G_n$  целиком лежит между узловыми ячейками  $\bar{\Omega}_{ql(n)}$  и  $\bar{\Omega}_{qp(n)}$ . Иногда номер  $n$  рассматриваемой на данный момент цепочки  $G_n$  опускается и тогда предполагается, что  $ql \equiv ql(n)$ ,  $qp \equiv qp(n)$ .
5. Для каждой узловой ячейки  $\bar{\Omega}_q$  указано количество  $KSL(q)$  ячеек, соседствующих с ней слева. При этом  $KSL(q) = 0$  означает, что на ее левой грани задано некоторое граничное условие.

Если  $KSL(q) = 1$ , то ячейка  $\bar{\Omega}_q$  соседствует слева с одной ячейкой, имеющей либо тот же уровень дробления (см. рис. 2, б), либо на единицу меньший (см. рис. 2, а). При этом соседствующая ячейка может быть либо крайней правой ячейкой цепочки ячеек  $G_{nl(q)}$ , примыкающей к узловой ячейке  $\bar{\Omega}_q$  слева, либо еще одной узловой ячейкой  $\bar{\Omega}_{ql(q)}$ . Для того чтобы различать эти две ситуации, нужно, например, иметь пару дополнительных информационных элементов вида  $\{nl(q), ql(q)\}$ . Предполагается, что эти информационные элементы могут принимать следующие значения:  $nl(q) \neq 0$  &  $ql(q) = 0$  — слева к ячейке  $\bar{\Omega}_q$  примыкает цепочка с номером  $nl(q)$ ;  $nl(q) = 0$  &  $ql(q) \neq 0$  — слева от ячейки  $\bar{\Omega}_q$  расположена еще одна узловая ячейка с номером  $ql(q)$ .

Если  $KSL(q) = 4$ , (см. рис. 2, в), то определены четыре пары дополнительных информаци-

онных элементов  $\{nl(q)_\mu, ql(q)_\mu\}$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ , позволяющие различать соседствующие слева от ячейки  $q$  цепочки и узловые ячейки.

6. Для каждой узловой ячейки  $\bar{\Omega}_q$  указано также количество  $KSP(q)$  ячеек, соседствующих с ней справа. При этом  $KSP(q) = 0$  означает, что на ее правой грани задано некоторое граничное условие.

При  $KSP(q) = 1$  и  $KSP(q) = 4$  определяются дополнительные информационные элементы вида  $\{np(q), qp(q)\}$  или  $\{np(q)_\mu, qp(q)_\mu\}$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ , соответственно. Их определение аналогично случаям при наличии у узловой ячейки соседства слева (см. п. 5).

### Первый этап решения разностных уравнений на дробящихся ячейках сетки

Как и в методе Яненко [3], алгоритм решения исходной задачи (4) складывается из трех этапов. На первом этапе рассматриваются цепочки ячеек  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ .

В ячейках каждой цепочки записываются линеаризованные разностные уравнения теплового баланса типа (4). На рис. 4 в виде ряда ячеек одномерной сетки схематично представлена цепочка ячеек  $G_n$ . Незвестные значения температуры  $T_{j(n)}$ ,  $j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 2, N_j(n) - 1$ , относятся к ячейкам сетки  $\Omega_{j(n)}$ , которым присваивается номер левого узла сетки. Координаты граней  $\Gamma_{1j(n)}$   $\Gamma_{2j(n)}$  рассматриваемой ячейки консервативности  $\Omega_0 \equiv \Omega_{j(n)}$  определяются координатами левого  $x_{j(n)}$  и правого  $x_{j(n)+1}$  узлов этой ячейки (см. рис. 4).

Используя введенную индексацию ячеек в цепочках и опуская здесь и далее верхний индекс  $\nu + 1/3$  при неизвестных значениях температуры, преобразуем систему уравнений (4) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{M_{j(n)}}{\tau^{n+1/2}} K_{j(n)}^{(\nu)} (T_{j(n)} - T_{j(n)}^{(\nu)}) = \\ = \frac{S_{1j(n)}}{h_{1j(n)}} \bar{\kappa}_{1j(n)}^{(\nu)} (T_{j(n)-1} - T_{j(n)}) + \frac{S_{2j(n)}}{h_{2j(n)}} \bar{\kappa}_{2j(n)}^{(\nu)} (T_{j(n)+1} - T_{j(n)}) - \frac{M_{j(n)}}{\tau^{n+1/2}} (E_{j(n)}^{(\nu)} - E_{j(n)}^n). \end{aligned} \quad (7)$$

Величины  $S_{1j(n)}$ ,  $S_{2j(n)}$  представляют собой площади граней  $\Gamma_{1j(n)}$   $\Gamma_{2j(n)}$  (см. рис. 4) ячейки  $\Omega_0 \equiv \Omega_{j(n)}$ , для которой записано уравнение (4);  $h_{1j(n)}$ ,  $h_{2j(n)}$  — шаги по пространству, вычисленные как расстояния между центрами ячеек  $\Omega_{j(n)-1}$ ,  $\Omega_{j(n)}$  и центрами ячеек  $\Omega_{j(n)}$ ,  $\Omega_{j(n)+1}$  соответственно.

Значение коэффициента теплопроводности  $\bar{\kappa}_{1j(n)}^{(\nu)}$  на грани  $\Gamma_{1j(n)}$  (см. рис. 4) получается усреднением его значений в ячейках  $\Omega_{j(n)-1}$ ,  $\Omega_{j(n)}$ , значение  $\bar{\kappa}_{2j(n)}^{(\nu)}$  на грани  $\Gamma_{2j(n)}$  — усреднением значений в ячейках  $\Omega_{j(n)}$ ,  $\Omega_{j(n)+1}$ . Исследованию влияния различных способов усреднения на точность результатов расчетов посвящена, например, работа [11]. Здесь эти вопросы не рассматриваются.

Запишем уравнения (7) в виде системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, удобном для решения методом прогонки. При этом в уравнении с номером  $j(n) = 1(n)$  системы (7) значение температуры  $T_{0(n)}$  положим равным значению температуры  $T_{ql(n)}$  в левой соседней узловой ячейке  $\bar{\Omega}_{ql(n)}$ :  $T_{0(n)} \equiv T_{ql(n)}$ . Аналогично, в уравнении с номером  $j(n) = N_j(n) - 1$  значение температуры  $T_{N_j(n)}$  положим равным значению температуры  $T_{qp(n)}$  в правой соседней узловой ячейке  $\bar{\Omega}_{qp(n)}$ :  $T_{N_j(n)} \equiv T_{qp(n)}$ . Будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} -A_{j(n)} T_{j(n)-1} + C_{j(n)} T_{j(n)} - B_{j(n)} T_{j(n)+1} = F_{j(n)}, \\ j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 2, N_j(n) - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

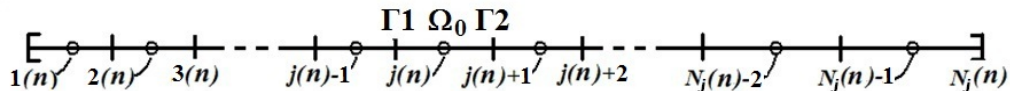


Рис. 4. Одномерная сетка для цепочки ячеек  $G_n$

Из сравнения (7) и (8) получим следующие формулы для коэффициентов системы уравнений (8):

$$\begin{aligned} A_{j(n)} &= \frac{S1_{j(n)} \overline{\varkappa 1}_{j(n)}^{(\nu)}}{h1_{j(n)}}; & C_{j(n)} &= \frac{M_{j(n)}}{\tau^{n+1/2}} K_{j(n)}^{(\nu)} + \frac{S1_{j(n)} \overline{\varkappa 1}_{j(n)}^{(\nu)}}{h1_{j(n)}} + \frac{S2_{j(n)} \overline{\varkappa 2}_{j(n)}^{(\nu)}}{h2_{j(n)}}; \\ B_{j(n)} &= \frac{S2_{j(n)} \overline{\varkappa 2}_{j(n)}^{(\nu)}}{h2_{j(n)}}; & F_{j(n)} &= \frac{M_{j(n)}}{\tau^{n+1/2}} \left[ K_{j(n)}^{(\nu)} T_{j(n)}^{(\nu)} - \left( E_{j(n)}^{(\nu)} - E_{j(n)}^n \right) \right]. \end{aligned}$$

На данном этапе рассматриваются цепочки ячеек  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ , с заданной для каждой из них системой уравнений (8). Значения неизвестной функции  $T_q$  в узловых ячейках  $\overline{\Omega}_q$  примем за параметрические неизвестные и обозначим через  $U = \{U_q\}$ ,  $q = 1, 2, \dots, N_q$ . В каждой цепочке ячеек  $G_n$  решение задачи представляется в виде

$$\begin{aligned} T_{j(n)} &= U_{ql(n)} X_{j(n)} + U_{qp(n)} Y_{j(n)} + Z_{j(n)}, \\ j(n) &= 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 2, N_j(n) - 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Сеточные функции

$$X = \{X_{j(n)}\}, \quad Y = \{Y_{j(n)}\}, \quad Z = \{Z_{j(n)}\}, \quad j(n) = 0(n), 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1, N_j(n),$$

есть решения следующих трех систем линейных уравнений на цепочках ячеек сетки  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ :

$$\begin{cases} X_{0(n)} = 1, & j(n) = 0(n); \\ -A_{j(n)} X_{j(n)-1} + C_{j(n)} X_{j(n)} - B_{j(n)} X_{j(n)+1} = 0, & j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1; \\ X_{N_j(n)} = 0, & j(n) = N_j(n). \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} Y_{0(n)} = 0, & j(n) = 0(n); \\ -A_{j(n)} Y_{j(n)-1} + C_{j(n)} Y_{j(n)} - B_{j(n)} Y_{j(n)+1} = 0, & j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1; \\ Y_{N_j(n)} = 1, & j(n) = N_j(n). \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} Z_{0(n)} = 0, & j(n) = 0(n); \\ -A_{j(n)} Z_{j(n)-1} + C_{j(n)} Z_{j(n)} - B_{j(n)} Z_{j(n)+1} = F_{j(n)} & j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1; \\ Z_{N_j(n)} = 0, & j(n) = N_j(n). \end{cases} \tag{12}$$

Решение каждой из систем уравнений (10)–(12) ищется методом прогонки независимо в каждой цепочке ячеек сетки  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ . Вычисления можно проводить одновременно на разных процессах, т. е. в параллельном режиме.

На этом вычисления первого этапа завершаются.

### Второй этап решения разностных уравнений на дробящихся ячейках сетки

На втором этапе строится система  $N_q$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N_q$  параметрических неизвестных значений функции  $U = \{U_q\}$ ,  $q = 1, 2, \dots, N_q$ , в узловых ячейках сетки. С этой целью для каждой очередной узловой ячейки  $\overline{\Omega}_q$  записывается уравнение теплового баланса вида (4). При этом нужно учитывать тип соседства узловой ячейки по ее граням  $\Gamma 1$  и  $\Gamma 2$ . От этого зависят формулы для тепловых потоков  $W_1^{(\nu+1/3)}$ ,  $W_2^{(\nu+1/3)}$  в уравнении (4).

Рассмотрим типы соседства узловой ячейки  $\overline{\Omega}_q$  по ее грани  $\Gamma 1$ .



Если узловая ячейка является левой приграничной ячейкой (см. рис. 3), то на ее грани  $\Gamma_1$  задано граничное условие (тип соседства  $KSL(q) = 0$ ).

В случае, когда задана граничная температура  $T = T_{\Gamma_1}$ , уравнение теплового баланса (4) можно записать в виде

$$\frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} (T_q - T_q^{(\nu)}) = S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)} \frac{T_{\Gamma_1} - T_q}{h1} + W_2 - \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} (E_q^{(\nu)} - E_q^n),$$

или более компактно,

$$C_q U_q - W_2 = F_q, \quad (13)$$

где

$$C_q = \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} + \frac{S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)}}{h1}; \quad F_q = \frac{S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)}}{h1} T_{\Gamma_1} + \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} \left[ K_q^{(\nu)} T_q^{(\nu)} - (E_q^{(\nu)} - E_q^n) \right]. \quad (14)$$

В случае, если в явном виде задан тепловой поток  $Q = Q_{\Gamma_1}$ , уравнение (4) принимает вид

$$\frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} (T_q - T_q^{(\nu)}) = S1Q_{\Gamma_1} + W_2 - \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} (E_q^{(\nu)} - E_q^n).$$

Записанное в компактном виде, оно отличается от (13) коэффициентом  $C_q$  и правой частью  $F_q$ . Здесь

$$C_q = \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)}; \quad F_q = S1Q_{\Gamma_1} + \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} \left[ K_q^{(\nu)} T_q^{(\nu)} - (E_q^{(\nu)} - E_q^n) \right].$$

Тип соседства  $KSL(q) = 1$  на левой грани  $\Gamma_1$  ячейки консервативности  $\overline{\Omega}_q$  предполагает, что она соседствует слева с одной ячейкой, имеющей либо тот же уровень дробления (см. рис. 2, б), либо на единицу меньший (см. рис. 2, а). При этом используется пара дополнительных информационных элементов  $\{nl(q), ql(q)\}$  с ненулевым номером либо примыкающей слева цепочки ячеек  $G_{nl(q)}$ , либо соседней узловой ячейки  $\overline{\Omega}_{ql(q)}$ .

Если  $ql(q) \neq 0$ , т. е. слева от ячейки  $\overline{\Omega}_q$  располагается еще одна узловая ячейка  $\overline{\Omega}_{ql(q)}$ , то уравнение теплового баланса (4) принимает вид

$$\frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} (T_q - T_q^{(\nu)}) = S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)} \frac{T_{ql(q)} - T_q}{h1} + W_2 - \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} (E_q^{(\nu)} - E_q^n),$$

или

$$-A_q U_{ql(q)} + C_q U_q - W_2 = F_q,$$

где

$$A_q = \frac{S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)}}{h1}; \quad C_q = \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} + \frac{S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)}}{h1}; \quad F_q = \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} \left[ K_q^{(\nu)} T_q^{(\nu)} - (E_q^{(\nu)} - E_q^n) \right].$$

Если же  $nl(q) \equiv nl \neq 0$ , то с узловой ячейкой  $\overline{\Omega}_q$  слева соседствует крайняя правая ячейка цепочки  $G_{nl(q)} \equiv G_{nl}$ , в которой определена температура  $T_{N_j(nl)-1}$ . По этой температуре определяется поток тепла на левой грани в уравнении теплового баланса (4) для ячейки  $\overline{\Omega}_q$ , т. е. имеем

$$\frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} (T_q - T_q^{(\nu)}) = S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)} \frac{T_{N_j(nl)-1} - T_q}{h1} + W_2 + \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} (E_q^{(\nu)} - E_q^n),$$

или в более компактном виде,

$$-A_q T_{N_j(nl)-1} + C_q U_q - W_2 = F_q \quad (15)$$

где

$$A_q = \frac{S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)}}{h1}; \quad C_q = \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} K_q^{(\nu)} + \frac{S1\overline{\varkappa}1^{(\nu)}}{h1}; \quad F_q = \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} \left[ K_q^{(\nu)} T_q^{(\nu)} - (E_q^{(\nu)} - E_q^n) \right].$$

Здесь температура в узловой ячейке  $\bar{\Omega}_q$  уже обозначена через  $U_q$  как искомая параметрическая величина.

Значение температуры  $T_{N_j(nl)-1}$  по формуле вида (9) выражается через значения параметрических величин в узловых ячейках, ограничивающих цепочку  $G_{nl(q)} \equiv G_{nl}$ . В данном случае цепочка ячеек, примыкающая слева к узловой ячейке  $\bar{\Omega}_q$ , ограничена слева узловой ячейкой  $\bar{\Omega}_{ql(nl)}$ , а справа соответственно узловой ячейкой  $\bar{\Omega}_q$ . Тогда для  $T_{N_j(nl)-1}$  имеем

$$T_{N_j(nl)-1} = U_{ql(nl)}X_{N_j(nl)-1} + U_qY_{N_j(nl)-1} + Z_{N_j(nl)-1}.$$

Подставив это выражение в уравнение (15), получим

$$D_{ql(nl)}^{(q)}U_{ql(nl)} + D_q^{(q)}U_q - W_2 = H_q,$$

где

$$D_{ql(nl)}^{(q)} = -A_qX_{N_j(nl)-1}; \quad D_q^{(q)} = C_q - A_qY_{N_j(nl)-1}; \quad H_q = F_q + A_qZ_{N_j(nl)-1}.$$

Здесь верхний индекс  $(q)$  обозначает номер уравнения в системе линейных уравнений для параметрических величин. Нижние индексы равны номерам искоемых параметрических величин.

Тип соседства  $KSL(q) = 4$  на левой грани  $\Gamma_1$  ячейки консервативности  $\bar{\Omega}_q$  означает, что она соседствует слева с четырьмя ячейками  $\Omega_{Я\mu}$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ , имеющими на единицу более высокий уровень дробления (см. рис. 2, в).

Для получения очередного уравнения относительно параметрических неизвестных в узловых ячейках сетки запишем подробно суммарный тепловой поток  $W_1$  на грани  $\Gamma_1$  ячейки  $\bar{\Omega}_q$ , которым она обменивается с соседними ячейками. Тогда уравнение теплового баланса (4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}}K_q^{(\nu)}(T_q - T_q^{(\nu)}) &= \sum_{\alpha} S_{1\alpha}\bar{\varkappa}1_{\alpha}^{(\nu)} \frac{T_{ql(q)\alpha} - T_q}{h1_{\alpha}} + \sum_{\beta} S_{1\beta}\bar{\varkappa}1_{\beta}^{(\nu)} \frac{T_{N_j(nl_{\beta})-1} - T_q}{h1_{\beta}} + \\ &+ \sum_{\gamma} S_{1\gamma}\bar{\varkappa}1_{\gamma}^{(\nu)} \frac{T_{N_j(nl_{\gamma})-1} - T_q}{h1_{\gamma}} + W_2 - \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}}(E_q^{(\nu)} - E_q^n). \end{aligned} \quad (16)$$

Индекс суммирования  $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$  здесь относится к соседним с  $\bar{\Omega}_q$  ячейкам  $\bar{\Omega}_{ql(q)\alpha}$ , также являющимся узловыми ячейками сетки. Значение температуры в этих ячейках записывается в виде  $T_{ql(q)\alpha}$ . Индекс суммирования  $\beta \in \{1, 2, 3, 4\}$  относится к соседним ячейкам, являющимся крайними правыми ячейками цепочек  $G_{nl(q)\beta} \equiv G_{nl_{\beta}}$ , примыкающих к  $\bar{\Omega}_q$  слева, но только таких цепочек, которые имеют различные левые узловые ячейки  $\bar{\Omega}_{ql(nl_{\beta})}$ . Температуры в крайних правых ячейках этих цепочек обозначаются как  $T_{N_j(nl_{\beta})-1}$ . Индекс суммирования  $\gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 4$ , относится к соседним ячейкам, являющимся крайними правыми ячейками цепочек  $G_{nl(q)\gamma} \equiv G_{nl_{\gamma}}$ , примыкающих к  $\bar{\Omega}_q$  слева, но только таких, которые, наоборот, имеют одну и ту же левую узловую ячейку  $\bar{\Omega}_{ql(nl)} \equiv \bar{\Omega}_{ql}$ . Температуры в крайних правых ячейках цепочек  $G_{nl(q)\gamma} \equiv G_{nl_{\gamma}}$  обозначаются через  $T_{N_j(nl_{\gamma})-1}$ .

Запишем уравнение (16) в более удобном для дальнейшего изложения виде

$$-\sum_{\alpha} A_{\alpha}U_{ql(q)\alpha} - \sum_{\beta} A_{\beta}T_{N_j(nl_{\beta})-1} - \sum_{\gamma} A_{\gamma}T_{N_j(nl_{\gamma})-1} + C_qU_q - W_2 = F_q, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &= \frac{S_{1\alpha}\bar{\varkappa}1_{\alpha}^{(\nu)}}{h1_{\alpha}}; \quad A_{\beta} = \frac{S_{1\beta}\bar{\varkappa}1_{\beta}^{(\nu)}}{h1_{\beta}}; \quad A_{\gamma} = \frac{S_{1\gamma}\bar{\varkappa}1_{\gamma}^{(\nu)}}{h1_{\gamma}}; \\ C_q &= \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}}K_q^{(\nu)} + \sum_{\alpha} \frac{S_{1\alpha}\bar{\varkappa}1_{\alpha}^{(\nu)}}{h1_{\alpha}} + \sum_{\beta} \frac{S_{1\beta}\bar{\varkappa}1_{\beta}^{(\nu)}}{h1_{\beta}} + \sum_{\gamma} \frac{S_{1\gamma}\bar{\varkappa}1_{\gamma}^{(\nu)}}{h1_{\gamma}}; \\ F_q &= \frac{M_q}{\tau^{n+1/2}} \left[ K_q^{(\nu)}T_q^{(\nu)} - (E_q^{(\nu)} - E_q^n) \right]. \end{aligned}$$

Здесь температуры в узловых ячейках уже обозначены символом  $U$  как искомые параметрические величины.

Температуры  $T_{N_j(nl_\beta)-1}$  выражаются через параметрические величины в узловых ячейках, ограничивающих цепочки  $G_{nl(q)\beta} \equiv G_{nl_\beta}$ ,  $\beta \in \{1, 2, 3, 4\}$ , по формулам вида (9). В данном случае цепочки ячеек ограничены слева узловыми ячейками  $\bar{\Omega}_{ql(nl_\beta)}$ , а справа — узловой ячейкой консервативности  $\bar{\Omega}_q$ . Тогда

$$T_{N_j(nl_\beta)-1} = U_{ql(nl_\beta)} X_{N_j(nl_\beta)-1} + U_q Y_{N_j(nl_\beta)-1} + Z_{N_j(nl_\beta)-1}. \quad (18)$$

Соответственно температуры  $T_{N_j(nl_\gamma)-1}$  выражаются через параметрические величины в узловых ячейках, ограничивающих цепочки  $G_{nl(q)\gamma} \equiv G_{nl_\gamma}$ . По определению все цепочки ячеек  $G_{nl_\gamma}$ ,  $\gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ , ограничены слева одной и той же узловой ячейкой  $\bar{\Omega}_{ql(nl)} \equiv \bar{\Omega}_{ql}$ , а справа — узловой ячейкой консервативности  $\bar{\Omega}_q$ . Поэтому

$$T_{N_j(nl_\gamma)-1} = U_{ql} X_{N_j(nl_\gamma)-1} + U_q Y_{N_j(nl_\gamma)-1} + Z_{N_j(nl_\gamma)-1}. \quad (19)$$

Подставив выражения (18), (19) в уравнение (17), получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha} A_{\alpha} U_{ql(q)\alpha} - \sum_{\beta} A_{\beta} X_{N_j(nl_\beta)-1} U_{ql(nl_\beta)} - \sum_{\gamma} A_{\gamma} X_{N_j(nl_\gamma)-1} U_{ql} + \\ & + \left( C_q - \sum_{\beta} A_{\beta} Y_{N_j(nl_\beta)-1} - \sum_{\gamma} A_{\gamma} Y_{N_j(nl_\gamma)-1} \right) U_q - W_2 = F_q + \sum_{\beta} A_{\beta} Z_{N_j(nl_\beta)-1} + \sum_{\gamma} A_{\gamma} Z_{N_j(nl_\gamma)-1}, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{\alpha} D_{ql(q)\alpha}^{(q)} U_{ql(q)\alpha} + \sum_{\beta} D_{ql(nl_\beta)}^{(q)} U_{ql(nl_\beta)} + D_{ql}^{(q)} U_{ql} + D_q^{(q)} U_q - W_2 = H_q, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} D_{ql(q)\alpha}^{(q)} &= -A_{\alpha}; & D_{ql(nl_\beta)}^{(q)} &= -A_{\beta} X_{N_j(nl_\beta)-1}; & D_{ql}^{(q)} &= - \sum_{\gamma} A_{\gamma} X_{N_j(nl_\gamma)-1}; \\ D_q^{(q)} &= C_q - \sum_{\beta} A_{\beta} Y_{N_j(nl_\beta)-1} - \sum_{\gamma} A_{\gamma} Y_{N_j(nl_\gamma)-1}; & H_q &= F_q + \sum_{\beta} A_{\beta} Z_{N_j(nl_\beta)-1} + \sum_{\gamma} A_{\gamma} Z_{N_j(nl_\gamma)-1}. \end{aligned}$$

Верхний индекс ( $q$ ) при коэффициентах в (20) обозначает номер уравнения в системе линейных уравнений для параметрических величин. Нижние индексы равны номерам искоемых параметрических величин.

Для отыскания множества всех цепочек ячеек  $G_{nl(q)\gamma} \equiv G_{nl_\gamma}$ ,  $\gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ , имеющих одну и ту же левую узловую ячейку, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Рассматривая поочередно левые узловые ячейки  $\bar{\Omega}_{ql(nl)} \equiv \bar{\Omega}_{ql}$  для всех цепочек  $G_{nl}$ , примыкающих слева к рассматриваемой узловой ячейке  $\bar{\Omega}_q$ , нужно найти такую, которая по своей правой грани  $\Gamma_2$  соседствует с четырьмя ячейками, т. е.  $KSP(ql) = 4$ , и зафиксировать ее номер  $ql_0$ . Если такая ячейка  $\bar{\Omega}_{ql_0}$  найдена, то любая цепочка ячеек, примыкающих к  $\bar{\Omega}_q$ , которая имеет своей левой узловой ячейкой  $\bar{\Omega}_{ql_0}$ , войдет в искомое множество. Если же таковая отсутствует, то искомое множество пусто.

Таким образом, рассмотрены формулы для тепловых потоков  $W_1$  на левой грани  $\Gamma_1$  ячейки консервативности  $\bar{\Omega}_q$  в зависимости от типа соседства  $KSL(q) = 0, 1, 4$ . В итоге получены коэффициенты параметрического уравнения при неизвестных параметрических величинах в узловых ячейках слева от  $\bar{\Omega}_q$ .

Для того чтобы получить параметрическое уравнение в целом, нужно еще учесть тепловые потоки  $W_2$  на правой грани  $\Gamma_2$  ячейки  $\bar{\Omega}_q$ , которые определяют связь температуры в ячейке консервативности  $\bar{\Omega}_q$  с температурами в соседних ячейках, расположенных справа. С учетом зеркальной симметрии направлений потоков формула для  $W_2$  зависит от типа соседства  $KSP(q) = 0, 1, 4$  в

точности так же, как  $W_1$  зависит от  $KSL(q)$ . Поэтому и коэффициенты при искомым значениям параметрических величин в узловых ячейках справа от  $\bar{\Omega}_q$  вычисляются аналогично коэффициентам в ячейках слева от  $\bar{\Omega}_q$ .

По завершении вычислений тепловых потоков на левой и правой гранях всех узловых ячеек консервативности  $\bar{\Omega}_q$  всех уровней дробления будет получена система  $N_q$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N_q$  параметрических неизвестных  $U = \{U_q\}$ ,  $q = 1, 2, \dots, N_q$ , в узловых ячейках сетки.

Вопрос о методах решения системы уравнений для параметрических неизвестных нужно рассматривать отдельно. Здесь можно заметить, что если в задаче реализуется только первый уровень дробления сетки, то система для параметрических неизвестных решается методом прогонки.

Заметим также, что для любого допустимого числа уровней дробления и любого количества узловых ячеек сетки каждое параметрическое уравнение в случае трехмерной разностной схемы расщепления для решения уравнения теплопроводности содержит не более девяти искомым параметрических неизвестных.

### Третий этап решения разностных уравнений на дробящихся ячейках сетки

На третьем этапе алгоритма решения разностных уравнений на дробящихся ячейках сетки вычисляются значения температуры  $T = \{T_{j(n)}\}$  во всех ячейках  $j(n) = 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1$  каждой цепочки ячеек  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ . Для этого используются найденные в результате решения системы уравнений для параметрических неизвестных значения сеточной функции  $U = \{U_q\}$ ,  $q = 1, 2, \dots, N_q$ , во всех узловых ячейках сетки.

В соответствии с (9) значения температуры вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} T_{j(n)} &= U_{ql(n)}X_{j(n)} + U_{qp(n)}Y_{j(n)} + Z_{j(n)}, \\ j(n) &= 1(n), 2(n), \dots, N_j(n) - 1, \quad n = 1, 2, \dots, N_n. \end{aligned}$$

Здесь  $U_{ql(n)}$  и  $U_{qp(n)}$  — значения параметрических переменных в узловых ячейках, соответственно левой  $\bar{\Omega}_{ql(n)}$  и правой  $\bar{\Omega}_{qp(n)}$  относительно цепочки  $G_n$ .

Значения температуры в узловых ячейках сетки по определению равны найденным значениям параметрических переменных:  $T_q = U_q$ ,  $q = 1, 2, \dots, N_q$ .

Вычисление значений температуры в каждой из цепочек ячеек сетки  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_n$ , можно проводить независимо и одновременно на разных процессах, т. е. в параллельном режиме.

### Заключение

Представленный в данной работе алгоритм предназначен для решения системы линейных разностных уравнений, записанных в направлении по строкам (столбцам или листам) исходных ячеек сетки нулевого уровня дробления, которая может содержать дробные ячейки вплоть до пятого уровня дробления.

Надобность в таком алгоритме возникает при решении двумерных и трехмерных задач по неявным схемам расщепления по пространственным направлениям на адаптивно встраиваемых дробных сетках, в частности, при решении трехмерного уравнения теплопроводности.

### Список литературы

1. Фаддеева В. Н., Фаддеев Д. К. Параллельные вычисления в линейной алгебре // Кибернетика. 1977. № 6. С. 28—40.  
*Faddeeva V. N., Faddeev D. K. Parallelnye vychisleniya v lineynoy algebre // Kibernetika. 1977. № 6. S. 28—40.*

2. *Миренков Н. Н.* К решению системы линейных уравнений на ВС // Вычислительные системы. Вып. 30. Новосибирск, 1968. С. 8—11.  
*Mirenkov N. N.* K resheniyu sistemy lineynykh uravneniy na VS // Vychislitelnye sistemy. Vyp. 30. Novosibirsk, 1968. S. 8—11.
3. *Яненко Н. Н., Коновалов А. Н., Бугров А. Н., Шустов Г. В.* Об организации параллельных вычислений и "распараллеливании" прогонки // Числ. методы мех. спл. среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 139—146.  
*Yanenko N. N., Konovalov A. N., Bugrov A. N., Shustov G. V.* Ob organizatsii parallelnykh vychisleniy i "rasparallelivanii" progonki // Chisl. metody spl. sredy. 1978. T. 9, № 7. S. 139—146.
4. *Фрязин И. В.* Алгоритм решения разностных задач на графах // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1970. Т. 10, № 2. С. 474—477.  
*Fryazinov I. V.* Algoritm resheniya raznostnykh zadach na grafakh // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1970. T. 10, № 2. S. 474—477.
5. *Воеводин А. Ф.* Метод прогонки для разностных уравнений, определенных на комплексе // Там же. 1973. Т. 13, № 2. С. 494—497.  
*Voevodin A. F.* Metod progonki dlya raznostnykh uravneniy, opredelyennykh na komplekse // Tam zhe. 1973. T. 13, № 2. S. 494—497.
6. *Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.* Метод параллельной прогонки для систем разностных уравнений, определенных на графах // Числ. методы мех. спл. среды. 1980. Т. 11, № 7. С. 23—39.  
*Voevodin A. F., Shugrin S. M.* Metod parallelnoy progonki dlya system raznostnykh uravneniy, opredelyennykh na grafakh // Chisl. metody mekh. spl. sredy. 1980. T. 11, № 7. S. 23—39.
7. *Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Городничев А. В., Воронов Е. Г., Гужова А. Р., Дегтяренко Л. И., Жарова Г. В., Кучерова П. А., Стадник А. Л., Ховрин Н. А.* Комплекс программ ЭГАК++ для моделирования на адаптивно встраиваемой дробной счетной сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 1. С. 20—28.  
*Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P., Gorodnichev A. V., Voronov E. G., Guzhova A. R., Degtyarenko L. I., Zharova G. V., Kucherova P. A., Stadnik A. L., Khovrin N. A.* Kompleks program EGAK++ dlya modelirovaniya na adaptivno vstraivayushcheysya drobnoy schyetroy setke // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsesov. 2003. Vyp. 1. S. 20—28.
8. *Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф., Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бакулина Е. А., Безрукова И. Ю., Борляев В. В., Володина Н. А., Наумов А. О., Огнева Н. Э., Резвова Т. В., Резяпов А. А., Стародубов С. В., Тарадай И. Ю., Тихонова А. П., Циберев К. В., Шанин А. А., Ширшова М. О., Шувалова Е. В.* Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Там же. 2004. Вып. 4. С. 41—50.  
*Bakhrakh S. M., Velichko S. V., Spiridonov V. F., Avdeyev P. A., Artamonov M. V., Bakulina E. A., Bezrukova I. Yu., Borlyayev V. V., Volodina N. A., Naumov A. O., Ogneva N. E., Rezvova T. V., Rezyrov A. A., Starodubov S. V., Taraday I. Yu., Tikhonova A. P., Tsiberev K. V., Shanin A. A., Shirshova M. O., Shuvalova E. V.* Metodika LEGAK-3D raschyeta tryekhmernykh nestatsionarnykh techeniy mnogokomponentnoy sploshnoy sredy i printsipy ee organizatsii na mnogoprotseornykh EVM s raspredelennoy pam'yatyu // Tam zhe. 2004. Vyp. 4. S. 41—50.
9. *Волчинская М. И.* Об итерационной схеме решения квазилинейного уравнения теплопроводности // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1971. Т. 11, № 2. С. 518—520.  
*Volchinskaya M. I.* Ob iteratsionnoy scheme resheniya kvazilineynogo uravneniya teploprovodnosti // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 1971. T. 11, № 2. S. 518—520.
10. *Бондаренко Ю. А., Горбунов А. А.* Практические условия устойчивости для счета тепловых волн в неявных разностных схемах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 4. С. 3—12.

*Bondarenko Yu. A., Gorbunov A. A.* Prakticheskie usloviya ustoychivosti dlya schyeta teplovykh voln v neyavnykh raznostnykh skhemakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsesov. 2008. Вып. 4. S. 3–12.

11. *Авдошина Е. В., Бондаренко Ю. А., Горбунов А. А., Дмитриева Ю. С., Наумов А. О., Проневич С. Н., Рудько Н. М., Тихомиров Б. П.* Исследование точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении уравнения теплопроводности // Там же. 2014. Вып. 3. С. 32–46.  
*Avdoshina E. V., Bondarenko Yu. A., Gorbunov A. A., Dmitrieva Yu. S., Naumov A. O., Pronovich S. N., Rudko N. M., Tikhomirov B. P.* Issledovanie tochnosti razlichnykh metodov usredneniya koeffitsienta teploprovodnosti na storone yacheyki integrirovaniya pri chislennom reshenii uravneniya teploprovodnosti // Tam zhe. 2014. Вып. 3. S. 32–46.

Статья поступила в редакцию 18.08.20.

AN ALGORITHM OF SOLVING LINEAR DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS ON REFINED GRID CELLS / A. M. Stenin\* (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper presents an algorithm of solving linear difference equation systems on adaptively refined grid cells, which is based on the method used to solve linear algebraic equation systems on graphs and allows paralleling computations. The algorithm of the method is described as applied to the difference splitting scheme for solving the 3D heat conduction equation, however, it can be used to solve equations describing some other physical processes on refined spatial grids, as well.

*Keywords:* three-dimensional heat conduction, difference splitting schemes, refined grids, linear difference equations on graphs, paralleling of the sweep.

---

\*Stenin Aleksandr Mikhaylovich, leading scientist,  
*e-mail:* mighty.stenin@yandex.ru