

УДК 519.6

## ПОВЫШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ $ES_n$ -КВАДРАТУРЫ

М. П. Пепеляев, Е. А. Ириничев  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

При решении задач переноса частиц в кинетическом приближении разностными методами возникает задача построения квадратурных формул на сфере (по угловым переменным). Одна из часто используемых квадратур —  $ES_n$ -квадратура с равными весами. Равенство весов уменьшает погрешность квадратурной формулы. Однако  $ES_n$ -квадратура обладает сравнительно невысоким алгебраическим порядком точности.

Авторами разработан способ повышения точности квадратуры  $ES_n$  по угловым переменным для решения уравнения переноса частиц. Равные веса квадратуры сохраняются, а направляющие косинусы полярного угла корректируются таким образом, чтобы выполнялись четные моментные соотношения. Система уравнений для вычисления направлений полета линейризуется методом Ньютона и решается итерационно, с применением метода Гаусса на каждой итерации. Полученная угловая квадратура  $ESM_n$  обладает повышенным алгебраическим порядком точности по сравнению с  $ES_n$ -квадратурой. Это подтверждается результатами проведенных численных исследований — расчетов интегралов от заданной функции по поверхности сферы, модельной задачи с анизотропным источником, симметричного теста К. Кобаяши.

*Ключевые слова:* угловая квадратура, алгебраический порядок точности, равные веса, метод дискретных ординат, четные моментные соотношения, трехмерное уравнение переноса, декартова система координат.

### Введение

При решении многих прикладных задач переноса частиц в кинетическом приближении разностными методами возникает вопрос выбора способа дискретизации по угловым переменным, который бы обеспечил приемлемую точность и экономичность по числу направлений угловой сетки.

Для численного моделирования двумерных и трехмерных задач переноса часто используется угловая  $ES_n$ -квадратура [1–3] порядка  $n = N$ , где  $N = 2, 4, \dots$ , содержащая  $N(N+2)$  узлов на сфере.  $ES_n$ -квадратура имеет одинаковые веса. Октант единичной сферы разбивается на  $N(N+2)/8$  частей одинаковой площади  $4\pi/[N(N+2)]$  параллелями  $\mu_i = \text{const}$  и меридианальными дугами  $\varphi_i = \text{const}$ . Центральные значения образуемых интервалов по  $\mu$  и по  $\varphi$  вычисляются через граничные значения этих интервалов таким образом, чтобы выполнялся диффузионный предел [4] (более подробно построение  $ES_n$ -квадратуры описано в [3, 4]).

Точность квадратурных формул можно характеризовать алгебраическим порядком точности, равным максимальной степени сферических гармоник  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , для которых квадратурная формула остается точной.  $ES_n$ -квадратура обладает сравнительно невысоким алгебраическим порядком точности ( $l \leq 3$ ). В задачах с сильной анизотропией целесообразно использовать угловые квадратуры с более высокой точностью, например Чебышева–Лежандра —  $P_n T_n$  [5]. Эти квадратуры получены как произведение одномерных квадратур Гаусса–Чебышева (узлы и веса для азимутального угла) и Гаусса–Лежандра (узлы и веса для косинуса полярного угла). Отметим, что в квадратурах Чебышева–Лежандра в отличие от  $ES_n$ -квадратуры используются неравные веса. При численном

интегрировании равенство весов предпочтительно, поскольку уменьшает погрешность квадратурной формулы (за счет минимизации вероятной ошибки, если значение функции имеет нормально распределенную случайную ошибку) [6]. Квадратурные формулы с равными весами рассматриваются, например, в [7].

Важно отметить, что  $ES_n$ -квадратура не обладает симметрией относительно вращения системы координат вокруг осей на  $90^\circ$ . Таким свойством обладают, например, квадратуры  $CB_n$  [4] и  $LQ_n$  [8] (последняя с ограничением  $N < 22$ ). В практических расчетах используются квадратуры, обладающие достаточной точностью и не имеющие ограничения на порядок  $N$ , даже если существует незначительная асимметрия (например, квадратуры Чебышева–Лежандра [5]).

В данной статье авторы предлагают способ повышения алгебраического порядка точности  $ES_n$ -квадратуры. Равные веса квадратуры сохраняются, а направляющие косинусы полярного угла корректируются таким образом, чтобы выполнялись четные моментные соотношения [3] (изменения касаются только расчета  $\mu$ , значения  $\varphi$  не корректируются, а используются, как в  $ES_n$ -квадратуре). Полученная угловая квадратура  $ESM_n$  обладает повышенным алгебраическим порядком точности по сравнению с  $ES_n$ -квадратурой. Вследствие этого угловая квадратура  $ESM_n$  позволяет, например, точно вычислять интегралы от полиномов Лежандра до  $N$ -го порядка, применяемые при расчете источника рассеяния в  $P_n$ -приближении [9].

### Построение $ESM_n$ -квадратуры

Трехмерное стационарное одногрупповое уравнение переноса частиц в декартовой системе координат можно записать в следующем виде:

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \alpha N = \frac{\beta}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \psi d\varphi + Q,$$

где  $\psi = \psi(x, y, z, \mu, \varphi)$  — плотность потока частиц в точке  $(x, y, z)$ , летящих в направлении единичного вектора  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ ;  $\mu = \cos \theta$ ,  $\mu \in [-1, 1]$ ;  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ;  $\theta, \varphi$  — соответственно полярный и азимутальный углы (рис. 1);  $\alpha = \alpha(x, y, z)$  — коэффициент поглощения частиц;  $\beta = \beta(x, y, z)$  — коэффициент размножения частиц;  $Q = Q(x, y, z, \mu, \varphi)$  — независимый источник частиц.

Для решения уравнения переноса частиц может использоваться метод дискретных ординат, в котором применяется дискретизация по угловым переменным. Для этого вводится угловая квадратура  $\{\omega_m, \vec{\Omega}_m\}$ , где  $\omega_m$  — вес;  $\vec{\Omega}_m = \vec{\Omega}_m(\mu, \varphi)$  —  $m$ -е направление полета частиц.

Направление единичного вектора  $\vec{\Omega}$  (для упрощения записи индекс  $m$  опускается) может быть задано направляющими косинусами  $\mu, \eta, \xi$  и представлено точкой на поверхности единичной сферы, с которой связана некоторая площадь поверхности  $\omega$ , отнормированная на  $4\pi$ :

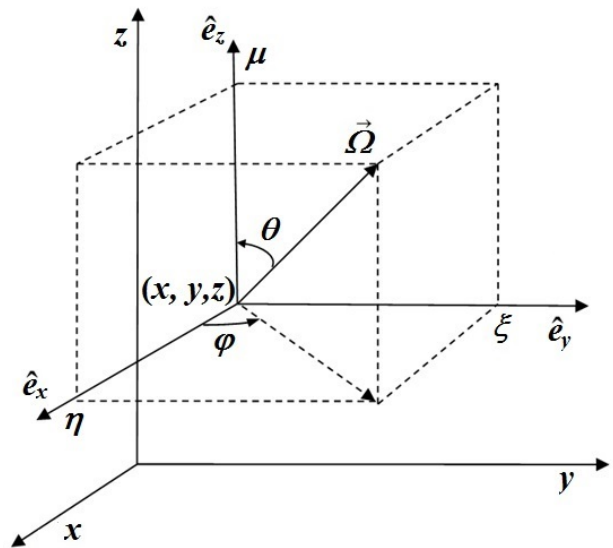


Рис. 1. Направление полета частицы из точки  $(x, y, z)$

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{e}_x \Omega_x + \vec{e}_y \Omega_y + \vec{e}_z \Omega_z \Rightarrow \begin{cases} \Omega_x \equiv \vec{e}_x \cdot \vec{\Omega} = \sin \theta \cos \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \equiv \eta; \\ \Omega_y \equiv \vec{e}_y \cdot \vec{\Omega} = \sin \theta \sin \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \equiv \xi; \\ \Omega_z \equiv \vec{e}_z \cdot \vec{\Omega} = \cos \theta \equiv \mu, \end{cases}$$

где  $\mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Отметим, что для сферы справедливы следующие соотношения ( $M = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mu^{2M} d\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \right)^{2M} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \right)^{2M} d\varphi = \frac{1}{2M + 1}; \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \mu^{2M-1} d\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \right)^{2M-1} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \right)^{2M-1} d\varphi = 0. \end{aligned}$$

При использовании метода дискретных ординат выполнение этих соотношений на сфере будет зависеть от квадратурного набора. Моментные соотношения будут иметь следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \omega_i \mu_i^{2M} &= \sum_{i=1}^L \omega_i \eta_i^{2M} = \sum_{i=1}^L \omega_i \xi_i^{2M} = \frac{1}{2M + 1} \quad \text{— четные моментные соотношения;} \\ \sum_{i=1}^L \omega_i \mu_i^{2M-1} &= \sum_{i=1}^L \omega_i \eta_i^{2M-1} = \sum_{i=1}^L \omega_i \xi_i^{2M-1} = 0 \quad \text{— нечетные моментные соотношения;} \\ \sum_{i=1}^L \omega_i &= 1, \end{aligned}$$

где  $M = 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  — порядок угловой квадратуры;  $L$  — число направлений полета частиц.

Приведенные выше соотношения справедливы при интегрировании по поверхности всей сферы.

Для оценки точности квадратур также будем рассматривать справедливость выполнения следующих нечетных моментных соотношений:

$$\sum_{i=1}^L \omega_i |\mu_i|^{2M-1} = \sum_{i=1}^L \omega_i |\eta_i|^{2M-1} = \sum_{i=1}^L \omega_i |\xi_i|^{2M-1} = \frac{1}{2M},$$

соответствующих интегралам

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} |\mu|^{2M-1} d\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \right|^{2M-1} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \right|^{2M-1} d\varphi = \frac{1}{2M}. \end{aligned}$$

Рассмотрим моментные соотношения для косинуса полярного угла. Моментные соотношения выполняются для  $ES_n$ -квадратуры [1–3] только до 3-го порядка (квадратура точно интегрирует

полином до 3-го порядка). Повысим алгебраический порядок точности  $ES_n$ -квadrатуры, изменив значения косинусов полярного угла  $\mu_i$  так, чтобы для квадратуры выполнялись четные моментные соотношения. Значения весов  $\omega_i$  менять не будем. Квадратура (узлы и веса) по  $\varphi$  также остается неизменной. Полученную модифицированную квадратуру назовем  $ESM_n$ .

Таким образом, для  $ESM_n$ -квadrатуры должны выполняться следующие соотношения для октанта сферы:

$$\frac{8}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \mu^{2M} d\mu = \int_0^1 \mu^{2M} d\mu = \frac{1}{2M+1} = \sum_{i=1}^{N/2} W_i \mu_i^{2M}, \quad M = 1, 2, \dots, N/2.$$

Отметим, что если соотношения выполняются для октанта, то они будут справедливы и для всей сферы.

Для каждого  $\mu_i$  соответствующий вес  $W_i$  оставим, как в квадратуре  $ES_n$ :  $W_1 = \omega_0$ ;  $W_2 = 2\omega_0$ ;  $W_3 = 3\omega_0, \dots$ , где  $\omega_0 = \frac{8}{N(N+2)}$ . При этом для октанта  $\sum_{i=1}^{N/2} W_i = 1$ .

Решим полученную систему из нелинейных  $N/2$  уравнений (где  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N/2}$  — неизвестные косинусы полярного угла):

$$\begin{aligned} W_1\mu_1^2 + W_2\mu_2^2 + \dots + W_{N/2}\mu_{N/2}^2 &= \frac{1}{3} \quad (M = 1); \\ W_1\mu_1^4 + W_2\mu_2^4 + \dots + W_{N/2}\mu_{N/2}^4 &= \frac{1}{5} \quad (M = 2); \\ \dots & \dots \\ W_1\mu_1^N + W_2\mu_2^N + \dots + W_{N/2}\mu_{N/2}^N &= \frac{1}{N+1} \quad (M = N/2). \end{aligned}$$

Данную систему можно численно решить, линеаризовав методом Ньютона. Полученная система линейных уравнений (с невырожденной матрицей) решается методом итераций (на каждой итерации система решается, например, методом Гаусса с выделением главного элемента столбца).

В качестве критерия сходимости итерационного процесса для каждого уравнения использовалось следующее условие:  $\left| \left( W_1\mu_1^{2M} + W_2\mu_2^{2M} + \dots + W_{N/2}\mu_{N/2}^{2M} \right) - \frac{1}{2M+1} \right| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Численное решение данной системы можно получить за несколько итераций. Авторам удалось построить квадратуры до 40-го порядка (ограничения связаны, скорее всего, с машинной вычислительной точностью).

В табл. 1, 2 приведены значения относительных погрешностей в моментных соотношениях для угловых квадратур  $ES_{12}$ ,  $ES_{32}$  и их модификаций  $ESM_{12}$ ,  $ESM_{32}$  в сравнении с точными решениями.

Из табл. 1, 2 видно, что для  $ESM_{12}$ - и  $ESM_{32}$ -квadrатур выполняются четные моментные соотношения (при  $N > 2$  для  $ESM_{12}$ -квadrатуры максимальная относительная погрешность составляет  $4,2 \cdot 10^{-5}$ , для  $ESM_{32}$  выполняются как четные моментные соотношения с максимальной погрешностью  $1,5 \cdot 10^{-7}$ , так и нечетные с максимальной погрешностью  $7,0 \cdot 10^{-6}$ ). В расчетах при использовании данных квадратур можно ожидать большей точности по сравнению с  $ES_n$ -квadrатурой, для которой эти соотношения выполняются с невысокой точностью.

В табл. 3 для сравнения приведены значения направляющего косинуса  $\mu \in [0, 1]$  полярного угла  $ES_n$ -квadrатуры ( $n = 8; 12; 24; 32$ ), а также вычисленные по описанному выше алгоритму значения  $\mu$  для квадратуры  $ESM_n$  ( $n = 8; 12; 24; 32$ ).

Таблица 1

Относительные погрешности в моментных соотношениях для квадратур  $ES_{12}$  и  $ESM_{12}$

$N$	$\frac{1}{N+1}$	$ES_{12}$			$ESM_{12}$		
		$\sum_{i=1}^N \omega_i  \mu_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \eta_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \xi_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \mu_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \eta_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \xi_i ^N$
1	0,500000	$6,01 \cdot 10^{-3}$	$6,98 \cdot 10^{-3}$	$6,98 \cdot 10^{-3}$	$7,34 \cdot 10^{-3}$	$7,61 \cdot 10^{-3}$	$7,61 \cdot 10^{-3}$
2	0,333333	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
3	0,250000	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$4,10 \cdot 10^{-4}$	$4,10 \cdot 10^{-4}$	$2,42 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-4}$
4	0,200000	$3,70 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$4,20 \cdot 10^{-5}$	$4,20 \cdot 10^{-5}$
5	0,166666	$5,58 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,05 \cdot 10^{-5}$	$8,16 \cdot 10^{-6}$	$8,16 \cdot 10^{-6}$
6	0,142857	$7,37 \cdot 10^{-3}$	$2,56 \cdot 10^{-3}$	$2,56 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$3,29 \cdot 10^{-6}$	$3,29 \cdot 10^{-6}$
7	0,125000	$9,13 \cdot 10^{-3}$	$3,07 \cdot 10^{-3}$	$3,07 \cdot 10^{-3}$	$3,92 \cdot 10^{-6}$	$8,40 \cdot 10^{-6}$	$8,40 \cdot 10^{-6}$
8	0,111111	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$	$3,54 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$6,48 \cdot 10^{-6}$	$6,48 \cdot 10^{-6}$
9	0,100000	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$3,99 \cdot 10^{-3}$	$3,99 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-6}$	$4,30 \cdot 10^{-6}$	$4,30 \cdot 10^{-6}$
10	0,090909	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$4,40 \cdot 10^{-3}$	$4,40 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$3,41 \cdot 10^{-6}$	$3,41 \cdot 10^{-6}$
11	0,083333	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$4,78 \cdot 10^{-3}$	$4,78 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-6}$	$3,24 \cdot 10^{-6}$	$3,24 \cdot 10^{-6}$
12	0,076923	$1,74 \cdot 10^{-2}$	$5,13 \cdot 10^{-3}$	$5,13 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$3,77 \cdot 10^{-6}$	$3,77 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Относительные погрешности в моментных соотношениях для квадратур  $ES_{32}$  и  $ESM_{32}$

$N$	$\frac{1}{N+1}$	$ES_{32}$			$ESM_{32}$		
		$\sum_{i=1}^N \omega_i  \mu_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \eta_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \xi_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \mu_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \eta_i ^N$	$\sum_{i=1}^N \omega_i  \xi_i ^N$
1	0,500000	$9,20 \cdot 10^{-4}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,21 \cdot 10^{-3}$	$1,21 \cdot 10^{-3}$
2	0,333333	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
3	0,250000	$2,97 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$6,12 \cdot 10^{-6}$	$7,00 \cdot 10^{-6}$	$7,00 \cdot 10^{-6}$
4	0,200000	$6,07 \cdot 10^{-4}$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$2,27 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$1,50 \cdot 10^{-7}$	$1,50 \cdot 10^{-7}$
5	0,166667	$9,10 \cdot 10^{-4}$	$3,26 \cdot 10^{-4}$	$3,26 \cdot 10^{-4}$	$6,00 \cdot 10^{-8}$	$6,00 \cdot 10^{-8}$	$6,00 \cdot 10^{-8}$
6	0,142857	$1,21 \cdot 10^{-3}$	$4,18 \cdot 10^{-4}$	$4,18 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
7	0,125000	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$5,03 \cdot 10^{-4}$	$5,03 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
8	0,111111	$1,82 \cdot 10^{-3}$	$5,84 \cdot 10^{-4}$	$5,84 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
9	0,100000	$2,12 \cdot 10^{-3}$	$6,60 \cdot 10^{-4}$	$6,60 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
10	0,090909	$2,41 \cdot 10^{-3}$	$7,33 \cdot 10^{-4}$	$7,33 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
11	0,083333	$2,71 \cdot 10^{-3}$	$8,02 \cdot 10^{-4}$	$8,02 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
12	0,076923	$3,01 \cdot 10^{-3}$	$8,69 \cdot 10^{-4}$	$8,69 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
13	0,071429	$3,31 \cdot 10^{-3}$	$9,33 \cdot 10^{-4}$	$9,33 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
14	0,066667	$3,60 \cdot 10^{-3}$	$9,95 \cdot 10^{-4}$	$9,95 \cdot 10^{-4}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
15	0,062500	$3,90 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
16	0,058824	$4,19 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
17	0,055556	$4,49 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
18	0,052632	$4,78 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
19	0,050000	$5,07 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
20	0,047619	$5,36 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
21	0,045455	$5,66 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
22	0,043478	$5,95 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
23	0,041667	$6,23 \cdot 10^{-3}$	$1,48 \cdot 10^{-3}$	$1,48 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
24	0,040000	$6,52 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
25	0,038462	$6,81 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
26	0,037037	$7,10 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
27	0,035714	$7,38 \cdot 10^{-3}$	$1,66 \cdot 10^{-3}$	$1,66 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
28	0,034483	$7,67 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
29	0,033333	$7,95 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
30	0,032258	$8,24 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
31	0,031250	$8,52 \cdot 10^{-3}$	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$
32	0,030303	$8,80 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-3}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$	$< 1,0 \cdot 10^{-8}$

Значения  $\mu$  для квадратур  $ES_n$  и  $ESM_n$

$ES_8$	$ESM_8$	$ES_{12}$	$ESM_{12}$	$ES_{24}$	$ESM_{24}$	$ES_{32}$	$ESM_{32}$
0,202548	0,205101	0,143715	0,145325	0,077047	0,077614	0,058878	0,059227
0,557007	0,560093	0,407193	0,409498	0,224719	0,225601	0,172953	0,173499
0,810191	0,806796	0,622766	0,622406	0,359551	0,359914	0,279669	0,279960
0,962102	0,960269	0,790433	0,790261	0,481542	0,481955	0,379025	0,379347
		0,910196	0,908106	0,590691	0,590693	0,471021	0,471143
		0,982054	0,981038	0,686999	0,687091	0,555658	0,555823
				0,770466	0,770166	0,632935	0,632896
				0,841093	0,840953	0,702852	0,702897
				0,898878	0,898357	0,765410	0,765231
				0,943821	0,943530	0,820608	0,820562
				0,975924	0,975257	0,868446	0,868156
				0,995186	0,994896	0,908924	0,908808
						0,942043	0,941681
						0,967802	0,967632
						0,986201	0,985796
						0,997241	0,997080

### Численные исследования точности $ESM_n$ -квадратуры

**Численное интегрирование по поверхности сферы.** Для оценки точности квадратурных формул рассчитаем интеграл от заданной функции по поверхности сферы:

$$S = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) d\mu d\varphi. \quad (1)$$

В качестве функции возьмем  $F(x, y, z)$  из работы [10] в трех вариантах:

$$F_1(x, y, z) = 1 + x + y^2 + x^2y + x^4 + y^5 + x^2y^2z^2;$$

$$F_2(x, y, z) = 1 + y + z^2 + y^2z + y^4 + z^5 + x^2y^2z^2;$$

$$F_3(x, y, z) = 1 + z + x^2 + z^2x + z^4 + x^5 + x^2y^2z^2.$$

Данная функция раскладывается в конечный ряд по полиномам Лежандра. Связь между координатами  $x, y, z$  и  $\mu, \varphi$  имеет следующий вид:

$$x = \sin \theta \cos \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi; \quad y = \sin \theta \sin \varphi = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi; \quad z = \cos \theta = \mu; \\ \mu \in [-1, 1]; \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Точное значение интеграла (1) для трех вариантов функции составляет:  $I = 216\pi/35$ .

Будем оценивать относительное отклонение  $E = |S - I|/I$  численного значения данного интеграла от точного при использовании разных квадратурных наборов.

На рис. 2 приведены значения  $E$  в зависимости от числа направлений для квадратур  $ES_n$ ,  $ESM_n$  и  $P_nT_n$ . Видно, что  $ES_n$ -квадратуры уступают по точности квадратурам  $ESM_n$  и  $P_nT_n$ . Точность квадратур  $ESM_n$  и  $P_nT_n$  выше для всех трех вариантов функции  $F(x, y, z)$ .

**Расчет модельной задачи, имеющей точное решение.** Для сравнения точности угловых квадратур были выполнены численные исследования решения трехмерного одногруппового уравнения переноса в декартовой системе координат при использовании квадратур  $ES_n$  и  $ESM_n$  на

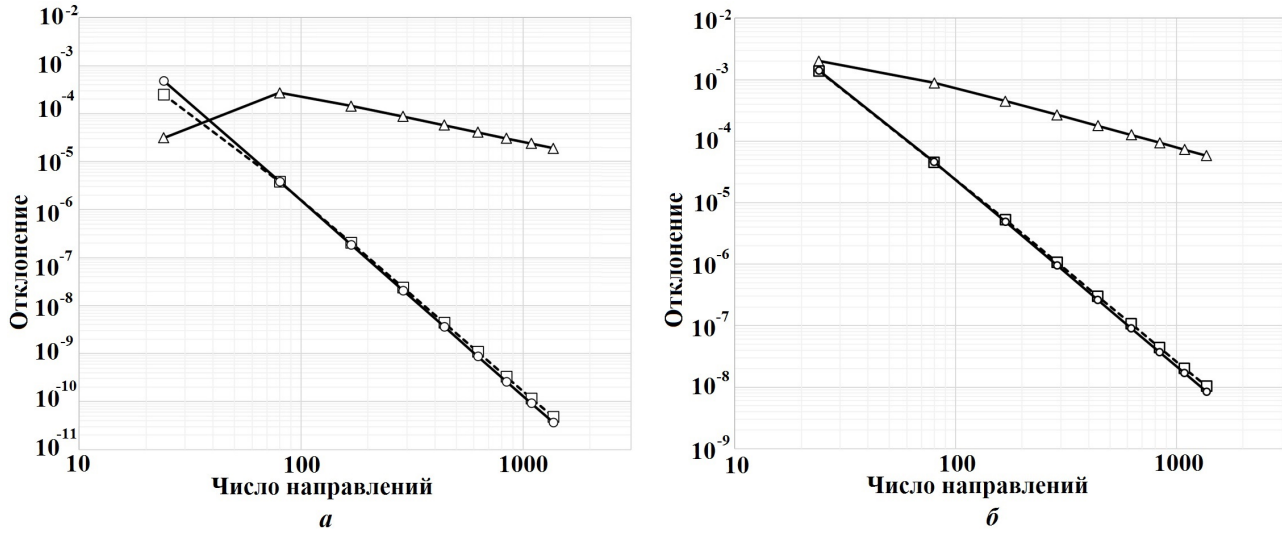


Рис. 2. Отклонение численного решения от точного значения в зависимости от числа направлений:  $a$  — для  $F_1(x, y, z)$  и  $F_2(x, y, z)$ ;  $b$  — для  $F_3(x, y, z)$ ; — $\triangle$ — —  $ES_n$ ; -- $\square$ -- —  $ESM_n$ ; — $\circ$ — —  $P_nT_n$

модельной задаче, имеющей точное решение. За основу была взята задача из работы [11], которая была модифицирована (введены переменные  $P$  и  $T$ ) и обобщена на трехмерный случай.

Рассмотрим куб с ребром 1 см с пространственной сеткой, имеющей  $11 \times 11 \times 11$  ячеек. Будем решать трехмерное одногрупповое уравнение переноса со следующими параметрами:  $\alpha = 50$ ;  $c = \beta/\alpha = 0,99$ .

Источник зададим в следующем виде:

$$Q(x, y, z, \mu, \varphi) = \begin{cases} (\eta y z + \xi x z + \mu x y + \alpha x y z)P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta > 0; \xi > 0; \mu > 0; \\ \left[ \eta y(1-z) + \xi x(1-z) + (-1)\mu x y + \alpha x y(1-z) \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta > 0; \xi > 0; \mu < 0; \\ \left[ \eta(1-y)z + (-1)\xi x z + \mu x(1-y) + \alpha x(1-y)z \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta > 0; \xi < 0; \mu > 0; \\ \left[ \eta(1-y)(1-z) + (-1)\xi x(1-z) + (-1)\mu x(1-y) + \right. \\ \quad \left. + \alpha x(1-y)(1-z) \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta > 0; \xi < 0; \mu < 0; \\ \left[ (-1)\eta y z + \xi(1-x)z + \mu(1-x)y + \alpha(1-x)yz \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta < 0; \xi > 0; \mu > 0; \\ \left[ (-1)\eta y(1-z) + \xi(1-x)(1-z) + (-1)\mu(1-x)y + \right. \\ \quad \left. + \alpha(1-x)y(1-z) \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta < 0; \xi > 0; \mu < 0; \\ \left[ (-1)\eta(1-y)z + (-1)\xi(1-x)z + \mu(1-x)(1-y) + \right. \\ \quad \left. + \alpha(1-x)(1-y)z \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta < 0; \xi < 0; \mu > 0; \\ \left[ (-1)\eta(1-y)(1-z) + (-1)\xi(1-x)(1-z) + \right. \\ \quad \left. + (-1)\mu(1-x)(1-y) + \alpha(1-x)(1-y)(1-z) \right] P - \frac{\alpha c}{8}T, & \eta < 0; \xi < 0; \mu < 0. \end{cases}$$

Будем решать задачу с двумя вариантами задания функции  $P$ . Выбор функции  $P$  позволяет исследовать точность решения при использовании разных квадратур в случае, когда функция распределения имеет вид многочлена, и в более сложном случае, когда функция распределения является, например, косинусом  $\mu$ .

В первом варианте в качестве  $P$  используется полином от  $\mu$  степени  $K$ :  $P = \sum_{n=0}^{K/2} \mu^{2n}$ , при этом  $T = \sum_{n=0}^{K/2} \frac{1}{2n+1}$ , во втором варианте — функция косинуса  $P = \cos\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)$ , при этом  $T = 2/\pi$  (в обоих случаях в качестве  $P$  используются четные функции). Тогда решение трехмерного одногруппового уравнения переноса будет иметь следующий вид:

$$\psi(x, y, z, \mu, \varphi) = \begin{cases} xyzP, & \eta > 0; \xi > 0; \mu > 0; \\ xy(1-z)P, & \eta > 0; \xi > 0; \mu < 0; \\ x(1-y)zP, & \eta > 0; \xi < 0; \mu > 0; \\ x(1-y)(1-z)P, & \eta > 0; \xi < 0; \mu < 0; \\ (1-x)yzP, & \eta < 0; \xi > 0; \mu > 0; \\ (1-x)y(1-z)P, & \eta < 0; \xi > 0; \mu < 0; \\ (1-x)(1-y)zP, & \eta < 0; \xi < 0; \mu > 0; \\ (1-x)(1-y)(1-z)P, & \eta < 0; \xi < 0; \mu < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим  $n^{(0)}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi d\mu d\varphi$ ; для данной задачи точное решение  $n^{(0)}(x, y, z) = \pi T/2$ .

Трехмерное одногрупповое уравнение переноса частиц решается методом простой итерации по правой части. Решение для данной задачи симметрично по пространству. Точность решения уравнения зависит от свойств используемой квадратуры по угловой переменной.

Были выполнены расчеты данной задачи с использованием квадратур  $ES_n$  и  $ESM_n$ . Отметим, что угловые сетки заданного порядка строятся один раз перед проведением расчета.

На рис. 3 приведено пространственное распределение плотности потока частиц после решения уравнения переноса с использованием грубой  $ES_8$ -квadrатуры для расчета варианта 1 (при  $K = 6$ ). Видно, что решение, полученное с использованием  $ES_8$ -квadrатуры, неоднородно по пространству. Отличие значений пространственного распределения плотности потока частиц в центре от числен-

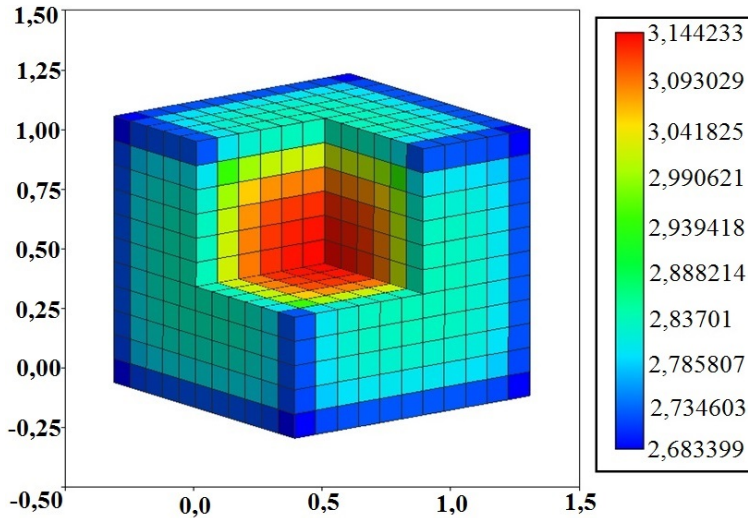


Рис. 3. Пространственное распределение плотности потока частиц с  $ES_8$ -квadrатурой в расчете варианта 1



ных решений на периферии куба составляет почти 15 %, а минимальные численные значения выше на 2 %, чем точное значение плотности потока  $n^{(0)}(x, y, z) \approx 2,633$ , которое в рассмотренной задаче является константой для всех пространственных точек. При использовании  $ESM_8$ -квадратуры решение становится однородным, пространственное распределение плотности потока частиц практически совпадает с точным решением с минимальными отличиями из-за точности сведения итераций при решении кинетического уравнения.

На рис. 4 приведена плотность потока частиц вдоль главной диагонали куба, рассчитанная для вариантов 1 и 2 с квадратурами  $ES_n$  и  $ESM_n$ . На грубых сетках решение с использованием  $ES_n$ -квадратуры заметно отличается от точного решения, тем не менее с увеличением порядка квадратуры оно приближается к точному.

В расчете первого варианта (см. рис. 4, а) для  $ES_8$  максимальное отличие составляет 19,4 %, для  $ES_{16}$  — 6,1 %, для  $ES_{32}$  — 1,7 %, для  $ES_{64}$  — 0,4 %. В расчете второго варианта (см. рис. 4, б) для  $ES_8$  максимальное отличие составляет 4,7 %, для  $ES_{16}$  — 1,5 %, для  $ES_{32}$  — 0,4 %, для  $ES_{64}$  — 0,1 %. Решение с использованием  $ESM_n$ -квадратуры даже на грубых сетках совпадает с точным решением в обоих вариантах.

**Расчет симметричного теста Кобаяши.** Исследования точности  $ESM_n$ -квадратуры проводились на примере одной из модельных задач — симметричном тесте К. Кобаяши. Постановка взята из [12]. В задаче моделируется распространение частиц от источника в оптически прозрачных средах. Расчеты проводились на пространственных сетках, состоящих из прямоугольных параллелепипедов (в данном случае кубов) в декартовой системе координат. Оценивалось численное значение потока частиц, выходящего через свободную поверхность.

Задача представляет собой систему из вложенных друг в друга трех кубов размерами (в см)  $10 \times 10 \times 10$ ,  $50 \times 50 \times 50$  и  $100 \times 100 \times 100$ . На рис. 5 приведена трехмерная геометрия задачи.

В веществе (области) 1 задан постоянный равномерно распределенный по пространству источник частиц с общей интенсивностью  $1000 \text{ с}^{-1}$ . Моделировалось распространение частиц с 50 %-ным рассеянием средой.

На трех гранях внешнего куба, совмещенных с координатными плоскостями  $OXY$ ,  $OXZ$  и  $OYZ$ , заданы *зеркальные* граничные условия, на остальных гранях —  $A$ ,  $B$  и  $C$  (см. рис. 5) — условие *свободной поверхности*.

Области 1, 2, 3 (см. рис. 5) обладают различными физическими свойствами (табл. 4).

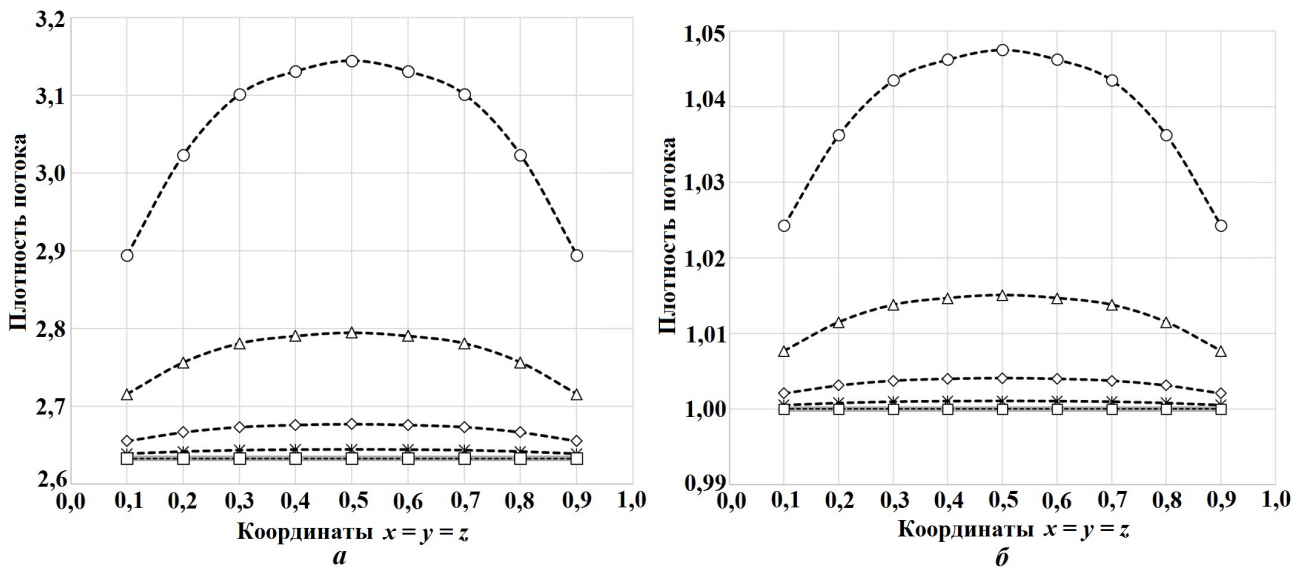


Рис. 4. Плотность потока частиц вдоль диагонали куба: а — вариант 1; б — вариант 2; — — точное решение; --○-- —  $ES_8$ ; --△-- —  $ES_{16}$ ; --◇-- —  $ES_{32}$ ; --\*-- —  $ES_{64}$ ; --□-- —  $ESM_8$

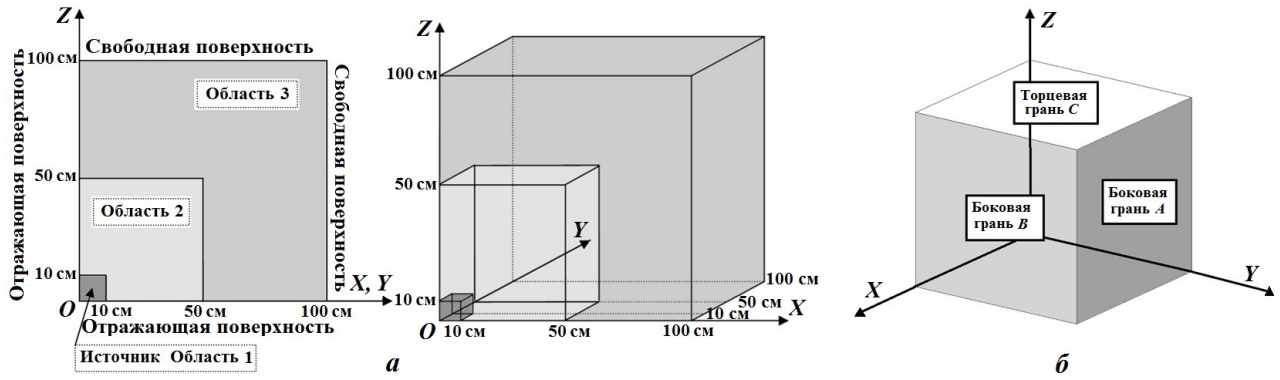


Рис. 5. Геометрия тестовой задачи Кобаяши

Таблица 4

Свойства областей симметричного теста Кобаяши

Номер области	Сечение захвата $\alpha$ , $\text{см}^{-1}$	Рассеяние $\beta$ , $\text{см}^{-1}$
1	0,1	0,05
2	0,0001	0,00005
3	0,1	0,05

Отметим, что квадратуры  $ES_n$ ,  $ESM_n$  и  $P_nT_n$  не обладают полной симметрией относительно вращений системы координат вокруг осей на  $90^\circ$ . Симметрия выполняется только для боковых граней. В качестве примера квадратуры, обладающей свойством полной симметрии, можно привести  $LQ_n$ -квadrатуру [8] и  $CB_n$ -квadrатуру [4].

В последнем столбце табл. 5 представлена асимметрия решений — относительное отклонение значений выходящих потоков через боковую грань  $A$  и торцевую грань  $C$ , выраженное в процентах. Число направлений полета частиц определялось по формуле  $N(N + 2)$ .

На рис. 6 приведены зависимости значений выходящего потока через свободные поверхности граней  $A$ ,  $B$ ,  $C$  от обратного числа направлений полета частиц для квадратур  $ES_n$ ,  $ESM_n$  и  $P_nT_n$ .

Из табл. 5 и рис. 6 видно, что точность численных решений выходящего потока для квадратур  $ESM_n$  и  $P_nT_n$  выше, чем для квадратуры  $ES_n$ . Также видно, что асимметрия для квадратуры  $ESM_n$  с увеличением порядка квадратуры меньше, чем для квадратуры  $ES_n$ . Например, для  $ES_{32}$  асимметрия составляет 0,04 %, в то время как для  $ESM_{32}$  — 0,01 %.

### Заключение

Предложен способ повышения алгебраического порядка точности  $ES_n$ -квadrатуры. Равные веса квадратуры сохраняются, а направляющие косинусы полярного угла корректируются таким образом, чтобы выполнялись четные моментные соотношения. Направляющие косинусы полярного угла  $\mu$  находятся из решения системы уравнений методом итераций так, чтобы квадратурный набор точно интегрировал четные степени  $\mu$ . Численные исследования показывают, что для предложенной квадратуры  $ESM_n$  с увеличением порядка квадратуры повышается также точность выполнения нечетных моментных соотношений для октанта сфер.

$ESM_n$ -квadrатура по построению является точной для полиномов степени  $N$ , что позволяет точно вычислять интегралы от полиномов Лежандра.

Таблица 5

Значения выходящего потока через внешние грани для квадратур  $ES_n$ ,  $ESM_n$  и  $P_nT_n$  в задаче Кобаяши

Квадратура	Число направлений	Грань A		Грань B		Грань C		Асимметрия, %
		$J, c^{-1}$	$E, \%$	$J, c^{-1}$	$E, \%$	$J, c^{-1}$	$E, \%$	
$ES_8$	80	1,89907	1,96	1,89907	1,96	1,89437	1,70	0,25
$ES_{12}$	168	1,87541	0,69	1,87541	0,69	1,87328	0,57	0,11
$ES_{16}$	288	1,86929	0,36	1,86929	0,36	1,87018	0,41	0,05
$ES_{20}$	440	1,86619	0,19	1,86619	0,19	1,86782	0,28	0,09
$ES_{24}$	624	1,86528	0,14	1,86528	0,14	1,86660	0,21	0,07
$ES_{28}$	840	1,86453	0,10	1,86453	0,10	1,86547	0,15	0,05
$ES_{32}$	1 088	1,86411	0,08	1,86411	0,08	1,86490	0,12	0,04
$ES_{38}$	1 520	1,86375	0,06	1,86375	0,06	1,86409	0,08	0,02
$ESM_8$	80	1,89264	1,61	1,89264	1,61	1,88153	1,01	0,59
$ESM_{12}$	168	1,87297	0,56	1,87297	0,56	1,86586	0,17	0,38
$ESM_{16}$	288	1,86759	0,27	1,86759	0,27	1,86619	0,19	0,08
$ESM_{20}$	440	1,86520	0,14	1,86520	0,14	1,86508	0,13	0,01
$ESM_{24}$	624	1,86454	0,10	1,86454	0,10	1,86473	0,11	0,01
$ESM_{28}$	840	1,86400	0,07	1,86400	0,07	1,86406	0,08	0,00
$ESM_{32}$	1 088	1,86369	0,06	1,86369	0,06	1,86383	0,06	0,01
$ESM_{38}$	1 520	1,86345	0,05	1,86345	0,05	1,86333	0,04	0,01
$P_nT_{n8}$	80	1,88419	1,16	1,88419	1,16	1,89426	1,70	0,53
$P_nT_{n12}$	168	1,87260	0,54	1,87260	0,54	1,87078	0,44	0,10
$P_nT_{n16}$	288	1,86683	0,23	1,86683	0,23	1,86870	0,33	0,10
$P_nT_{n20}$	440	1,86442	0,10	1,86442	0,10	1,86516	0,14	0,04
$P_nT_{n24}$	624	1,86429	0,09	1,86429	0,09	1,86472	0,11	0,02
$P_nT_{n28}$	840	1,86392	0,07	1,86392	0,07	1,86415	0,08	0,01
$P_nT_{n32}$	1 088	1,86363	0,05	1,86363	0,05	1,86381	0,06	0,01
$P_nT_{n38}$	1 520	1,86330	0,04	1,86330	0,04	1,86354	0,05	0,01
$ES_{256}$	66 048	1,86261		1,86261		1,86263		0,00
$P_nT_{n256}$	66 048	1,86260		1,86260		1,86261		0,00

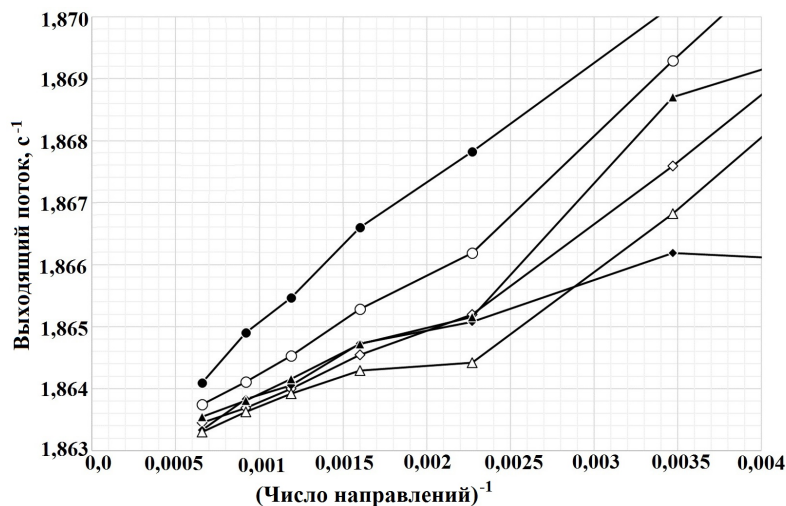


Рис. 6. Выходящие потоки для граней A, B, C, рассчитанные с использованием разных квадратур, в зависимости от обратного числа направлений: —○— —  $ES_n$ , A и B; —●— —  $ES_n$ , C; —◇— —  $ESM_n$ , A и B; —◆— —  $ESM_n$ , C; —△— —  $P_nT_n$ , A и B; —▲— —  $P_nT_n$ , C

Отметим, что квадратуры типа Гаусса—Чебышева порядка  $N$  точны для полиномов степени  $2N - 1$ , но при этом веса квадратуры неравные. Равенство весов при численном интегрировании предпочтительно для уменьшения погрешности квадратурной формулы за счет минимизации вероятной ошибки, если значение функции имеет нормально распределенную случайную ошибку.

Проведенные численные исследования показывают, что точность результатов расчетов с использованием  $ESM_n$ -квадратуры выше, чем с использованием  $ES_n$ -квадратуры, и сравнима с точностью результатов расчетов, полученных с использованием  $P_nT_n$ -квадратуры. При этом веса для  $ESM_n$ -квадратуры остались равными, как в  $ES_n$ -квадратуре, в отличие от  $P_nT_n$ -квадратуры.

### Список литературы

1. Carlson B. G. A method of characteristics and other improvements in solutions methods for the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1976. Vol. 61, No 3. P. 408—425.
2. Карлсон Б. Г., Латрон К. Д. Теория переноса. Метод дискретных ординат // Вычислительные методы в физике реакторов / Под ред. Х. Гринпсена, К. Келбера, Д. Окрента. М.: Атомиздат, 1972. С. 102—157.  
 Karlson B. G., Latrop K. D. Teoriya perenosa. Metod diskretnykh ordinat // Vychislitelnye metody v fizike reaktorov / Pod red. Kh. Grinpsena, K. Kelbera, D. Okrenta. M.: Atomizdat, 1972. S. 102—157.
3. Басс А. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучений. М.: ИПМ АН СССР, 1986.  
 Bass A. P., Voloshchenko A. M., Germogenova T. A. Metody diskretnykh ordinat v zadachakh o perenose izlucheniya. M.: IPM AN SSSR, 1986.
4. Пепеляев М. П. Численные исследования точности и симметрии угловых квадратур для аппроксимации трехмерного уравнения переноса методом дискретных ординат на задачах Кобаяши // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 1. С. 46—59.  
 Pepelyaev M. P. Chislennye issledovaniya tochnosti i simmetrii uglovykh kvadratur dlya approksimatsii tryekhmernogo uravneniya perenosa metodom diskretnykh ordinat na zadachakh Kobayashi // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2017. Vyp. 1. S. 46—59.
5. Longoni G. Advanced Quadrature Sets, Acceleration and Preconditioning Techniques of the Discrete Ordinates Method in Parallel Computing Environments. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy. University of Florida, 2004.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. С. 603.  
 Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, 1968. S. 603.
7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.  
 Krylov V. I. Priblizhennoye vychislenie integralov. M.: Nauka, 1967.
8. Lathrop K. D., Carlson B. G. Discrete ordinates angular quadrature of the neutron transport equation. Los Alamos Scientific Laboratory. Report No 3186, 1965.
9. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974. С. 42—43.  
 Bell D., Glesston S. Teoriya yadernykh reaktorov. M.: Atomizdat, 1974. S. 42—43.
10. Fornberg B., Martel J. M. On spherical harmonics based numerical quadrature over the surface of a sphere // Advances in Computational Mathematics. 2014. Vol. 40. P. 1169—1184.
11. Awono O., Tagoudjeu J. A splitting iterative method for solving the neutron transport equation // Mathematical Modeling and Analysis. 2009. Vol. 14, No 3. P. 271—289.

12. Kobayashi K., Sugimura N., Nagaya Y. 3-D radiation transport benchmark problems and results for simple geometries with void regions // Progress in Nuclear Energy. 2001. Vol. 39(2). P. 119–144.
13. Волощенко А. М. Дважды консервативная схема 4-го порядка точности для уравнения переноса в криволинейных геометриях: Препринт № 49. М.: ИМП АН СССР, 1984.  
*Voloshchenko A. M. Dvazhdy konservativnaya schema 4-go poryadka tochnosti dlya uravneniya perenosa v krivolineynykh geometriyakh: Preprint № 49. M.: IPM AN SSSR, 1984.*
14. Волощенко А. М. Об использовании семейства нодальных WLB-WLD схем 2–4-го порядка точности для решения задач переноса излучения // "Нейтроника XXI". Обнинск, 26–28 октября 2010 г.  
*Voloshchenko A. M. Ob ispolzovanii semeystva nodalnykh WLB-WLD skhem 2–4-go poryadka tochnosti dlya resheniya zadach perenosa izlucheniya // "Neytronika XXI". Obninsk, 26–28 oktyabrya 2010 g.*

Статья поступила в редакцию 13.10.20.

INCREASING THE ALGEBRAIC ORDER OF ACCURACY FOR  $ES_n$ -QUADRATURE / M. P. Pepelyaev, E. A. Irinichev (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

When solving the particle transport problem in kinetic approximation using difference schemes one needs to develop quadrature formulas in angular variables on a sphere. The  $ES_n$ -quadrature with equal weights is one of the commonly used for this purpose. The equality of weights reduces an error of the quadrature formula. However, the  $ES_n$ -quadrature has a relatively low algebraic order of accuracy.

The authors developed the way of how to improve the accuracy of the  $ES_n$ -quadrature in angular variables to solve the particle transport equation. The quadrature still has equal weights, while the directional cosines of the azimuthal angle are corrected so that even moment conditions are satisfied. The system of equations for the calculation of the particle flight direction is linearized with Newton's method and iteratively solved using Gaussian method at each iteration. The resultant  $ESM_n$ -quadrature has a higher order of accuracy, as compared to the  $ES_n$ -quadrature. This is proved by results of numerical studies: the calculation of integrals of the given function over the sphere surface, the solution of a model problem with an anisotropic source, and the K. Kobayashi symmetrical test.

*Key words:* angular quadrature, algebraic order of accuracy, equal weights, the discrete ordinate method, even moment conditions, three-dimensional transport equation, Cartesian coordinate system.

---