

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ ТЕНЗОРНОГО ВИДА ДЛЯ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

А. О. Наумов

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлена формулировка тензорной искусственной вязкости для сквозного счета ударных волн, которая нашла применение в методике ЛЭГАК-3D, разработанной и используемой в РФЯЦ-ВНИИЭФ для расчета сложных газодинамических течений с сильными деформациями контактных границ.

Аппроксимация уравнений движения и энергии за счет действия вязкости строится на основе аппроксимации дифференциальных операторов дивергенции и градиента произвольного тензора, представленного векторами-проекциями на линии счетной сетки. В состав *вязкого тензора* входит скалярный множитель, построенный на основе вязкости в форме Куропатенко и содержащий, в свою очередь, функцию-ограничитель, которая отключает действие вязкости при безударном сжатии или вращении среды как твердого тела.

В качестве демонстрации положительных свойств предложенной вязкости приводятся результаты расчетов трех задач: трехмерного варианта задачи Зальцмана, сферического теста Ноха и задачи об обжатии газа тяжелой оболочкой.

Ключевые слова: газовая динамика, ударные волны, искусственная вязкость тензорного вида, численное моделирование.

Введение

Метод сквозного счета ударных волн, впервые предложенный Нейманом и Рихтмайером в работе [1], уже несколько десятилетий широко применяется при численном моделировании сложных газодинамических течений. Метод очень прост в реализации, а его идея заключается в использовании искусственной квадратичной вязкости, которая вводится в уравнения газовой динамики в виде добавки к давлению. Вязкость действует при сжатии вещества как диссипативная функция, переводящая кинетическую энергию во внутреннюю, благодаря чему все параметры на фронте ударной волны изменяются непрерывно, т. е. скачкообразный профиль ударной волны "размазывается".

Метод Неймана—Рихтмайера очевидным образом обобщается на многомерный случай. Например, как и в одномерном случае, вязкость можно использовать в форме скалярной добавки к давлению, определив линейный характерный размер и скачок скорости на фронте ударной волны. В частности, этот способ обобщения в виде, немного отличном от классической формы Неймана—Рихтмайера, используется в методике ЛЭГАК-3D, разработанной в РФЯЦ-ВНИИЭФ для моделирования сложных двумерных и трехмерных газодинамических течений с сильными деформациями контактных границ [2].

Однако еще в начале 1960-х гг. было отмечено, что скалярная форма искусственной вязкости имеет ряд недостатков. В работе [3] были представлены четыре свойства, которым должна удовлетворять искусственная вязкость: бездействие при адиабатическом сжатии и вращении среды

как жесткого целого; непрерывность составляющей скорости, параллельной фронту скачка; выполнение на разностном уровне закона сохранения момента количества движения. Было показано, что скалярная вязкость Неймана—Рихтмайера не удовлетворяет предъявленным условиям, и впервые была предложена ее тензорная форма. Однако и эта вязкость не удовлетворяла условиям, связанным с выполнением закона сохранения момента количества движения и бездействием при вращении среды как жесткого целого.

В конце 1990-х гг. появилась работа [4], в которой со ссылкой на работу [3] были переформулированы свойства искусственной вязкости:

1. *Диссипативность (dissipativity)*: искусственная вязкость всегда должна приводить к уменьшению кинетической энергии, т. е. быть диссипативной.
2. *Инвариантность Галилея (Galilean invariance)*: по мере стремления поля скорости к постоянному вязкость должна плавно исчезать.
3. *Инвариантность автомодельного движения (self-similar motion invariance)*: вязкость не должна действовать при однородном сжатии или вращении среды как твердого тела.
4. *Инвариантность фронта ударной волны (wave front invariance)*: вязкость не должна действовать вдоль фронта одинаковой фазы, так как тангенциальная скорость на поверхности разрыва должна быть непрерывной величиной.
5. *Непрерывность вязкой силы (viscous force continuity)*: вязкие силы при уменьшении сжатия должны непрерывно стремиться к нулю и полностью исчезнуть при растяжении.

В работе [5], ставшей продолжением работы [4], была предложена тензорная вязкость, удовлетворяющая приведенным свойствам. Вязкость построена на основе тангенциальных проекций тензора градиента скорости на ребра ячеек счетной сетки с использованием скалярного вязкого множителя в форме Куропатенко [6].

Этот метод впоследствии был адаптирован для методики ЛЭГАК и опробован в расчетах двумерных газодинамических течений [7]. В данной работе приводится формулировка тензорной вязкости для моделирования трехмерных течений газа, содержащих ударные волны.

Стоит отметить, что использование искусственной вязкости в тензорной форме также предлагается в работах [8—10, 11], выполненных в РФЯЦ-ВНИИЭФ и РФЯЦ-ВНИИТФ.

В работе [8] предложено ввести искусственную диффузию во все уравнения газовой динамики. Вязкий тензор в уравнении движения и энергии пропорционален девиатору тензора скоростей деформаций. Основная цель работы — уменьшение ошибки, вызванной проблемой *энтропийного следа* при использовании искусственной вязкости.

В статье [9] рассмотрено введение диссипативных добавок в виде правых частей уравнений Навье—Стокса с заменой физической вязкости на искусственную для борьбы с *карбункул-неустойчивостью* при использовании схем типа Годунова. Там же приведен содержательный обзор работ по использованию искусственных вязкостей.

В работе [10] используется несимметричный вязкий тензор, который строится на основе одномерных вязкостей, вычисленных вдоль направлений средних линий ребер ячеек сетки.

В монографии [11] приведен достаточно представительный обзор работ, посвященных проблемам, связанным с использованием искусственных вязкостей, и предложена скалярная форма вязкости, учитывающая направление распространения ударной волны и отключающая ее действие при безударном сжатии.

Дифференциальные операторы дивергенции произвольного тензора и градиента скорости в общей криволинейной системе координат

Тензорная искусственная вязкость входит в дифференциальные уравнения газовой динамики следующим образом (члены полного уравнения, отвечающие за учет действия сил давления, для наглядности опущены):

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \operatorname{div}(\mu G); \quad \rho \frac{de}{dt} = G : \mu G. \quad (1)$$

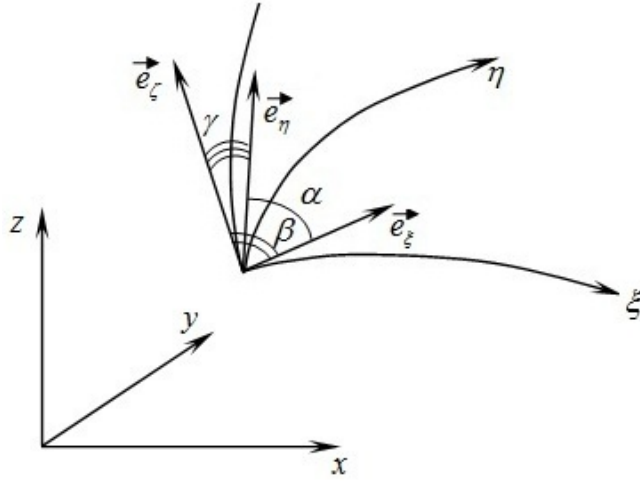


Рис. 1. Базисные векторы в общей системе координат (ξ, η, ζ)

Здесь ρ — плотность; \vec{u} — вектор скорости; e — удельная внутренняя энергия; G — несимметричный тензор градиента скорости $\left(G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, i, j = x, y, z\right)$; μ — скалярный вязкий множитель; $G : \mu G$ — скалярное произведение тензоров.

Рассмотрим общую трехмерную криволинейную систему координат (ξ, η, ζ) , изображенную на рис. 1. Базисные векторы $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ и \vec{e}_ζ касаются соответствующих координатных линий в точке их пересечения; α — угол между базисными векторами \vec{e}_ξ и \vec{e}_η ; β — угол между базисными векторами \vec{e}_ξ и \vec{e}_ζ ; γ — угол между базисными векторами \vec{e}_η и \vec{e}_ζ .

В декартовой системе координат базисные векторы $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ и \vec{e}_ζ имеют вид

$$\vec{e}_\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^T, \quad \alpha = \xi, \eta, \zeta.$$

Введем в рассматриваемой системе координат метрический тензор, компонентами которого являются скалярные произведения базисных векторов:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta, \quad \alpha, \beta = \xi, \eta, \zeta. \quad (2)$$

Представим тензор градиента скорости, записанный в декартовой системе координат, в виде тангенциальных проекций на отнормированные базисные векторы криволинейной системы координат:

$$\mathbf{G}^\xi = G \vec{e}_\xi; \quad \mathbf{G}^\eta = G \vec{e}_\eta; \quad \mathbf{G}^\zeta = G \vec{e}_\zeta, \quad (3)$$

где единичные базисные векторы имеют вид

$$\vec{e}_\xi = \frac{\vec{e}_\xi}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}; \quad \vec{e}_\eta = \frac{\vec{e}_\eta}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}; \quad \vec{e}_\zeta = \frac{\vec{e}_\zeta}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}}.$$

Подставляя в (2) тензор G , записанный в декартовой системе координат, получаем выражение для определения векторов проекций тензора G на единичные базисные векторы

$$\mathbf{G}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} G^{\alpha x} \\ G^{\alpha y} \\ G^{\alpha z} \end{pmatrix}; \quad \alpha = \xi, \eta, \zeta. \quad (4)$$

Вывод дифференциального оператора дивергенции тензора опирается на известное интегральное тождество

$$\int_V \text{grad } \vec{u} : T dV = \int_V \vec{u} \cdot (T \vec{n}) dS - \int_V \vec{u} \cdot (\text{div} T) dV. \quad (5)$$

Здесь T — произвольный тензор второго ранга; $\text{grad } \vec{u} : T = G_{ij} : T_{ij}$ — скалярное произведение тензора градиента скорости и произвольного тензора T (здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам i и j , принимающим последовательно значения x, y и z).

Запишем скалярное произведение тензоров $G : T$ через векторы \mathbf{G}^α ($\alpha = \xi, \eta, \zeta$). Чтобы выразить компоненты тензора G_{ij} , представленного в декартовой системе координат, через компоненты $G^{\alpha i}$ ($\alpha = \xi, \eta, \zeta$; $i = x, y, z$), необходимо решить систему (4), которая распадается на три независимые системы из трех уравнений.

Чтобы сократить количество формул, которые по сути отличаются одним индексом, приведем решение для компонент G_{xx} , G_{xy} и G_{xz} :

$$\begin{aligned} G_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\sqrt{g_{\xi\xi}} G^{\xi x} (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + \sqrt{g_{\eta\eta}} G^{\eta x} (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) + \sqrt{g_{\zeta\zeta}} G^{\zeta x} (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \right], \\ G_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\sqrt{g_{\xi\xi}} G^{\xi x} (z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta) + \sqrt{g_{\eta\eta}} G^{\eta x} (z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta) + \sqrt{g_{\zeta\zeta}} G^{\zeta x} (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi) \right], \\ G_{xz} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\sqrt{g_{\xi\xi}} G^{\xi x} (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) + \sqrt{g_{\eta\eta}} G^{\eta x} (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) + \sqrt{g_{\zeta\zeta}} G^{\zeta x} (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $|g|$ — определитель метрического тензора (2). Решение для оставшихся компонент получается путем замены первого индекса в записи компонент тензора G и второго индекса в компонентах векторов проекций \mathbf{G}^α соответственно на y и z (для наглядности индексы, которые будут меняться, выделены в формулах (6) жирным шрифтом).

Используя те же выражения (6) для вычисления компонент тензора T , запишем скалярное произведение тензора градиента скорости на тензор T в терминах проекций тензоров на базисные векторы:

$$\begin{aligned} G : T &= \mathbf{G}^\xi \cdot \left[\frac{g_{\xi\xi}}{|g|} (g_{\eta\eta} g_{\zeta\zeta} - g_{\eta\zeta}^2) \mathbf{T}^\xi + \frac{\sqrt{g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}}}{|g|} (g_{\xi\zeta} g_{\eta\zeta} - g_{\xi\eta} g_{\zeta\zeta}) \mathbf{T}^\eta + \frac{\sqrt{g_{\xi\xi} g_{\zeta\zeta}}}{|g|} (g_{\xi\eta} g_{\eta\zeta} - g_{\xi\zeta} g_{\eta\eta}) \mathbf{T}^\zeta \right] + \\ &+ \mathbf{G}^\eta \cdot \left[\frac{\sqrt{g_{\xi\xi} g_{\eta\eta}}}{|g|} (g_{\xi\zeta} g_{\eta\zeta} - g_{\xi\eta} g_{\zeta\zeta}) \mathbf{T}^\xi + \frac{g_{\eta\eta}}{|g|} (g_{\xi\xi} g_{\zeta\zeta} - g_{\xi\zeta}^2) \mathbf{T}^\eta + \frac{\sqrt{g_{\eta\eta} g_{\zeta\zeta}}}{|g|} (g_{\xi\eta} g_{\xi\zeta} - g_{\eta\zeta} g_{\xi\xi}) \mathbf{T}^\zeta \right] + \\ &+ \mathbf{G}^\zeta \cdot \left[\frac{\sqrt{g_{\xi\xi} g_{\zeta\zeta}}}{|g|} (g_{\xi\eta} g_{\eta\zeta} - g_{\xi\zeta} g_{\eta\eta}) \mathbf{T}^\xi + \frac{\sqrt{g_{\eta\eta} g_{\zeta\zeta}}}{|g|} (g_{\xi\eta} g_{\xi\zeta} - g_{\eta\zeta} g_{\xi\xi}) \mathbf{T}^\eta + \frac{g_{\zeta\zeta}}{|g|} (g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} - g_{\xi\eta}^2) \mathbf{T}^\zeta \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Из формулы (7) видно, что при условии ортогональности базисных векторов скалярное произведение тензоров в терминах тангенциальных проекций примет простой и понятный вид

$$G : T = \mathbf{G}^\xi \cdot \mathbf{T}^\xi + \mathbf{G}^\eta \cdot \mathbf{T}^\eta + \mathbf{G}^\zeta \cdot \mathbf{T}^\zeta.$$

Для практических целей выразим компоненты метрического тензора через длины базисных векторов и углы между ними:

$$\begin{aligned} g_{\eta\eta} g_{\zeta\zeta} - g_{\eta\zeta}^2 &= g_{\eta\eta} g_{\zeta\zeta} \sin^2 \gamma; \\ g_{\xi\xi} g_{\zeta\zeta} - g_{\xi\zeta}^2 &= g_{\xi\xi} g_{\zeta\zeta} \sin^2 \beta; \\ g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} - g_{\xi\eta}^2 &= g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} \sin^2 \alpha; \\ g_{\xi\zeta} g_{\eta\zeta} - g_{\xi\eta} g_{\zeta\zeta} &= \sqrt{g_{\xi\xi}} \sqrt{g_{\eta\eta}} g_{\zeta\zeta} (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha); \\ g_{\xi\eta} g_{\eta\zeta} - g_{\xi\zeta} g_{\eta\eta} &= \sqrt{g_{\xi\xi}} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} g_{\eta\eta} (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta); \\ g_{\xi\eta} g_{\xi\zeta} - g_{\eta\zeta} g_{\xi\xi} &= \sqrt{g_{\eta\eta}} \sqrt{g_{\zeta\zeta}} g_{\xi\xi} (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma); \\ |g| &= g_{\xi\xi} g_{\eta\eta} g_{\zeta\zeta} (1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma). \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки (8) в (7) получим выражение для скалярного произведения тензоров, в котором не содержатся компоненты метрического тензора g :

$$G : T = \frac{1}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \times$$

$$\times \left\{ \mathbf{G}^\xi \cdot \left[\sin^2 \gamma \mathbf{T}^\xi + (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\zeta \right] + \right.$$

$$+ \mathbf{G}^\eta \cdot \left[(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\xi + \sin^2 \beta \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\zeta \right] +$$

$$\left. + \mathbf{G}^\zeta \cdot \left[(\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\xi + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\eta + \sin^2 \alpha \mathbf{T}^\zeta \right] \right\}.$$

Это выражение будет использовано при выводе дискретного аналога скалярного произведения тензоров.

Вернемся к интегральному тождеству (5). Перейдем в интеграле в левой части к переменным ξ , η , ζ . Используя (4), запишем векторы \mathbf{G}^ξ , \mathbf{G}^η и \mathbf{G}^ζ через производные скорости по криволинейным координатам и возьмем интеграл по объему от скалярного произведения тензоров:

$$\int_V G : T dV = \int_V G : T \sqrt{|g|} \partial \xi \partial \eta \partial \zeta =$$

$$= \int_V \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \cdot \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\sin^2 \gamma \mathbf{T}^\xi + (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \cdot \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\xi + \sin^2 \beta \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] +$$

$$\left. + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \cdot \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{(\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\xi + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\eta + \sin^2 \alpha \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] \right\} \partial \xi \partial \eta \partial \zeta. \quad (9)$$

Интегрируя выражение (9) по частям, получаем

$$\int_V G : T dV = \int_{\partial V} \vec{u} \cdot (\mathbf{T}_\xi \partial \eta \partial \zeta + \mathbf{T}_\eta \partial \xi \partial \zeta + \mathbf{T}_\zeta \partial \xi \partial \eta) -$$

$$- \int_V \vec{u} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\sin^2 \gamma \mathbf{T}^\xi + (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\xi + \sin^2 \beta \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{(\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\xi + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\eta + \sin^2 \alpha \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] \right\} \partial \xi \partial \eta \partial \zeta.$$

Здесь для сокращения записи через \mathbf{T}_ξ , \mathbf{T}_η и \mathbf{T}_ζ обозначены выражения в квадратных скобках интеграла по объему из формулы (9).

Приравняем полученное выражение к правой части интегрального тождества (5) и отбросим одинаковые интегралы по поверхности. В результате получим форму непрерывного дифференциального оператора дивергенции произвольного тензора T , записанную в терминах тангенциальных проекций тензора T на базисные векторы общей криволинейной системы координат:

$$\operatorname{div} T = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\xi\xi}}} \frac{\sin^2 \gamma \mathbf{T}^\xi + (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \mathbf{T}^\xi + \sin^2 \beta \mathbf{T}^\eta + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{\zeta\zeta}}} \frac{(\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) \mathbf{T}^\xi + (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma) \mathbf{T}^\eta + \sin^2 \alpha \mathbf{T}^\zeta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right] \right\}. \quad (10)$$

На этом вывод непрерывных дифференциальных операторов в общей трехмерной криволинейной системе координат завершен.

Дискретная форма дифференциальных операторов дивергенции произвольного тензора и градиента скорости. Вычисление вязких сил

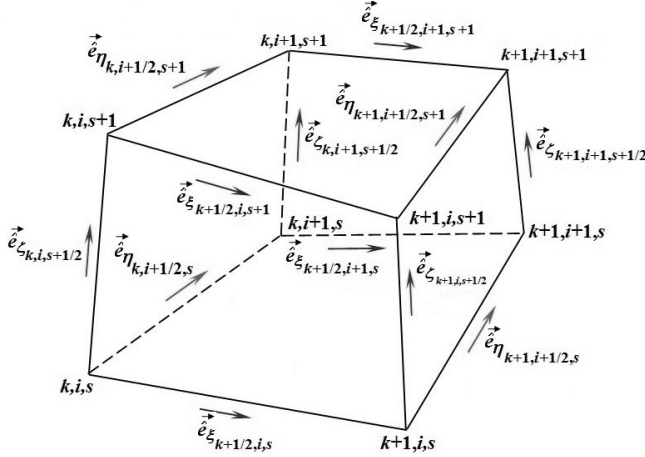


Рис. 2. Шестигранная ячейка трехмерной регулярной счетной сетки

меняется индекс k , η -линиями — ребра, вдоль которых меняется индекс i , ζ -линиями — ребра, вдоль которых меняется индекс s . Таким образом, на рис. 2 $\vec{e}_{\xi_{k+1/2, i+q, s+r}}$, $\vec{e}_{\eta_{k+p, i+1/2, s+r}}$, $\vec{e}_{\zeta_{k+p, i+q, s+1/2}}$ — единичные векторы, направленные соответственно вдоль ребер $(k+1/2, i+q, s+r)$, $(k+p, i+1/2, s+r)$ и $(k+p, i+q, s+1/2)$, где переменные p, q, r принимают значения 0 и 1.

В качестве примера рассмотрим базис, связанный с узлом (k, i, s) . Для остальных узлов все делается аналогично.

Запишем дискретный аналог выражения (4) для вычисления тангенциальных проекций тензора градиента скорости на координатные линии:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{k+1/2, i, s}^{\xi} &= \frac{1}{l_{\xi_{k+1/2, i, s}}} (u_{x_{k+1, i, s}} - u_{x_{k, i, s}}, u_{y_{k+1, i, s}} - u_{y_{k, i, s}}, u_{z_{k+1, i, s}} - u_{z_{k, i, s}})^T; \\ \mathbf{G}_{k, i+1/2, s}^{\eta} &= \frac{1}{l_{\eta_{k, i+1/2, s}}} (u_{x_{k, i+1, s}} - u_{x_{k, i, s}}, u_{y_{k, i+1, s}} - u_{y_{k, i, s}}, u_{z_{k, i+1, s}} - u_{z_{k, i, s}})^T; \\ \mathbf{G}_{k, i, s+1/2}^{\zeta} &= \frac{1}{l_{\zeta_{k, i, s+1/2}}} (u_{x_{k, i, s+1}} - u_{x_{k, i, s}}, u_{y_{k, i, s+1}} - u_{y_{k, i, s}}, u_{z_{k, i, s+1}} - u_{z_{k, i, s}})^T. \end{aligned}$$

Здесь $l_{\xi_{k+1/2, i, s}}$, $l_{\eta_{k, i+1/2, s}}$, $l_{\zeta_{k, i, s+1/2}}$ — длины ребер вдоль соответствующих координатных линий.

Аппроксимацию скалярного произведения тензоров в рассматриваемой ячейке $(k+1/2, i+1/2, s+1/2)$ запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{GRAD}\vec{u} : T &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 W_{k+p, i+q, s+r} (G : T)_{k+p, i+q, s+r} = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 W_{k+p, i+q, s+r} \times \\ &\times \left[\mathbf{G}_{k+1/2, i+q, s+r}^{\xi} \cdot \left((a_{\xi\xi})_{k+p, i+q, s+r} \mathbf{T}_{k+1/2, i+q, s+r}^{\xi} + (a_{\xi\eta})_{k+p, i+q, s+r} \mathbf{T}_{k+p, i+1/2, s+r}^{\eta} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (a_{\xi\zeta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+p,i+q,s+1/2}^{\zeta} \Big) + \mathbf{G}_{k+p,i+1/2,s+r}^{\eta} \cdot \left((a_{\xi\eta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+1/2,i+q,s+r}^{\xi} + \right. \\
 & + (a_{\eta\eta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+p,i+1/2,s+r}^{\eta} + (a_{\eta\zeta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+p,i+q,s+1/2}^{\zeta} \Big) + \\
 & + \mathbf{G}_{k+p,i+q,s+1/2}^{\zeta} \cdot \left((a_{\xi\zeta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+1/2,i+q,s+r}^{\xi} + (a_{\eta\zeta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+p,i+1/2,s+r}^{\eta} + \right. \\
 & \left. \left. + (a_{\zeta\zeta})_{k+p,i+q,s+r} \mathbf{T}_{k+p,i+q,s+1/2}^{\zeta} \right) \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Здесь $W_{k+p,i+q,s+r}$ — весовые множители, равные отношению объема тетраэдра, образованного координатными линиями узла $(k+p, i+q, s+r)$, к сумме объемов всех тетраэдров, построенных подобным образом в узлах ячейки. Такая формулировка дает первый порядок аппроксимации скалярного произведения тензоров. Множители удовлетворяют условиям

$$W_{k+p,i+q,s+r} \geq 0; \quad \sum_{p,q,r=0}^1 W_{k+p,i+q,s+r} = 1.$$

Элементы матрицы A вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 (a_{\xi\xi})_{k+p,i+q,s+r} &= \left(\frac{\sin^2 \gamma}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right)_{k+p,i+q,s+r}; \\
 (a_{\eta\eta})_{k+p,i+q,s+r} &= \left(\frac{\sin^2 \beta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right)_{k+p,i+q,s+r}; \\
 (a_{\zeta\zeta})_{k+p,i+q,s+r} &= \left(\frac{\sin^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right)_{k+p,i+q,s+r}; \\
 (a_{\xi\eta})_{k+p,i+q,s+r} &= \left(\frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right)_{k+p,i+q,s+r}; \\
 (a_{\xi\zeta})_{k+p,i+q,s+r} &= \left(\frac{\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right)_{k+p,i+q,s+r}; \\
 (a_{\eta\zeta})_{k+p,i+q,s+r} &= \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma}{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma} \right)_{k+p,i+q,s+r}.
 \end{aligned}$$

Для аппроксимации оператора дивергенции воспользуемся дискретным аналогом интегрального тождества (5), отбросив часть, отвечающую за поверхностный интеграл, в предположении, что вязкие силы не совершают работу на границе:

$$\sum_{k=1}^{N_k-1} \sum_{i=1}^{N_i-1} \sum_{s=1}^{N_s-1} (GRAD \vec{u} : T)_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} V_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} = - \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{s=1}^{N_s} (\vec{u} \cdot DIV T)_{k,i,s} V_{k,i,s}. \quad (12)$$

Здесь $V_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}$ — объем ячейки; $V_{k,i,s}$ — усредненная по количеству прилегающих к узлу ячеек сумма объемов этих ячеек.

Объем ячейки вычисляется по формуле

$$V_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^8 (\vec{r}_l \cdot \vec{s}_l), \quad \vec{r}_l = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \vec{r}_{l_k}, \quad \vec{s}_l = \frac{1}{2} [\vec{d}_{l_1} \times \vec{d}_{l_2}]. \quad (13)$$

Здесь выполняется суммирование по всем граням ячейки; \vec{u}_l — векторы средней скорости на грани с номером l ; \vec{s}_l — вектор, направленный по внешней нормали к грани, имеющий длину, равную площади грани; \vec{d}_{l_1} и \vec{d}_{l_2} — диагональные векторы на грани.

Подставим в левую часть дискретного тождества (12) выражение (11), распишем суммы по ячейкам, окружающим произвольный узел (k, i, s) , и соберем члены относительно скорости $\vec{u}_{k,i,s}$. Приравняв подобные члены в левой и правой частях (12), получим аппроксимацию оператора дивергенции тензора в произвольном узле

$$(DIV T)_{k,i,s} = \frac{1}{V_{k,i,s}} \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2+p, i-1/2+q, s-1/2+r}. \quad (14)$$

Здесь через \vec{f} обозначены силы, действующие за счет тензора T (вязкие силы). Верхний индекс у силы \vec{f} означает ее принадлежность к ячейке с соответствующим номером. Выражение (14) является дискретным аналогом непрерывного дифференциального оператора (10).

Общая формула для вычисления вязких сил имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2+p, i-1/2+q, s-1/2+r} &= V_{k-1/2+p, i-1/2+q, s-1/2+r} \times \\ &\times \left\{ \frac{(-1)^{p+1}}{l_{\xi_{k-1/2+p, i, s}}} \times \right. \\ &\times \left[W_{k-1+p, i, s} \left((a_{\xi\xi})_{k-1+p, i, s} \mathbf{T}_{k-1/2+p, i, s}^{\xi} + (a_{\xi\eta})_{k-1+p, i, s} \mathbf{T}_{k-1+p, i-1/2+q, s}^{\eta} + (a_{\xi\zeta})_{k-1+p, i, s} \mathbf{T}_{k-1+p, i, s-1/2+r}^{\zeta} \right) + \right. \\ &+ W_{k+p, i, s} \left((a_{\xi\xi})_{k+p, i, s} \mathbf{T}_{k-1/2+p, i, s}^{\xi} + (a_{\xi\eta})_{k+p, i, s} \mathbf{T}_{k+p, i-1/2+q, s}^{\eta} + (a_{\xi\zeta})_{k+p, i, s} \mathbf{T}_{k+p, i, s-1/2+r}^{\zeta} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{(-1)^{q+1}}{l_{\eta_{k, i-1/2+q, s}}} \times \\ &\times \left[W_{k, i-1+q, s} \left((a_{\xi\eta})_{k, i-1+q, s} \mathbf{T}_{k-1/2+p, i-1+q, s}^{\xi} + (a_{\eta\eta})_{k, i-1+q, s} \mathbf{T}_{k, i-1/2+q, s}^{\eta} + (a_{\eta\zeta})_{k, i-1+q, s} \mathbf{T}_{k, i-1+q, s-1/2+r}^{\zeta} \right) + \right. \\ &+ W_{k, i+q, s} \left((a_{\xi\eta})_{k, i+q, s} \mathbf{T}_{k-1/2+p, i+q, s}^{\xi} + (a_{\eta\eta})_{k, i+q, s} \mathbf{T}_{k, i-1/2+q, s}^{\eta} + (a_{\eta\zeta})_{k, i+q, s} \mathbf{T}_{k, i+q, s-1/2+r}^{\zeta} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{(-1)^{r+1}}{l_{\zeta_{k, i, s-1/2+r}}} \times \\ &\times \left[W_{k, i, s-1+r} \left((a_{\xi\zeta})_{k, i, s-1+r} \mathbf{T}_{k-1/2+p, i, s-1+r}^{\xi} + (a_{\eta\zeta})_{k, i, s-1+r} \mathbf{T}_{k, i-1/2+q, s-1+r}^{\eta} + (a_{\zeta\zeta})_{k, i, s-1+r} \mathbf{T}_{k, i, s-1/2+r}^{\zeta} \right) + \right. \\ &+ W_{k, i, s+r} \left((a_{\xi\zeta})_{k, i, s+r} \mathbf{T}_{k-1/2+p, i, s+r}^{\xi} + (a_{\eta\zeta})_{k, i, s+r} \mathbf{T}_{k, i-1/2+q, s+r}^{\eta} + \right. \\ &\left. \left. + (a_{\zeta\zeta})_{k, i, s+r} \mathbf{T}_{k, i, s-1/2+r}^{\zeta} \right) \right] \left. \right\}^{k-1/2+p, i-1/2+q, s-1/2+r}. \quad (15) \end{aligned}$$

Индексы p, q и r принимают значения 0, 1.

Пользуясь введенными обозначениями для сил, можно записать аппроксимацию скалярного произведения тензоров в ячейке в простой форме:

$$(GRAD \vec{u} : T)_{k+1/2, i+1/2, s+1/2} = - \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \left(\vec{u}_{k+p, i+q, s+r} \cdot \vec{f}_{k+p, i+q, s+r}^{k+1/2, i+1/2, s+1/2} \right).$$

В терминах вязких сил (15) удобно строить аппроксимацию системы (1).

Чтобы получить окончательные формулы для вычисления вязких сил, нужно определить векторы, являющиеся проекциями тензора T на ребра ячеек счетной сетки.

Из системы (1) следует, что T есть произведение тензора градиента скорости и скалярного множителя μ .

Скалярный множитель определяется следующим образом. Разобьем ячейку счетной сетки на восемь подобластей, узлами которых являются узлы ячейки, ее геометрический центр и центры ребер и граней. Пример такого разбиения с выделенной подобластью в окрестности узла (k, i, s) показан на рис. 3.

В каждой подобласти определим скалярный множитель в форме Куропатенко [6]. Этот способ вычисления скалярного множителя взят из работы [5]:

$$\mu = \begin{cases} (1 - \psi) \rho \left[c_2 \frac{\gamma + 1}{4} \Delta u + \sqrt{c_2^2 \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 \Delta u^2 + c_1^2 (c_{зв})^2} \right] l, & \text{если } \Delta u < 0; \\ 0, & \text{если } \Delta u \geq 0. \end{cases}$$

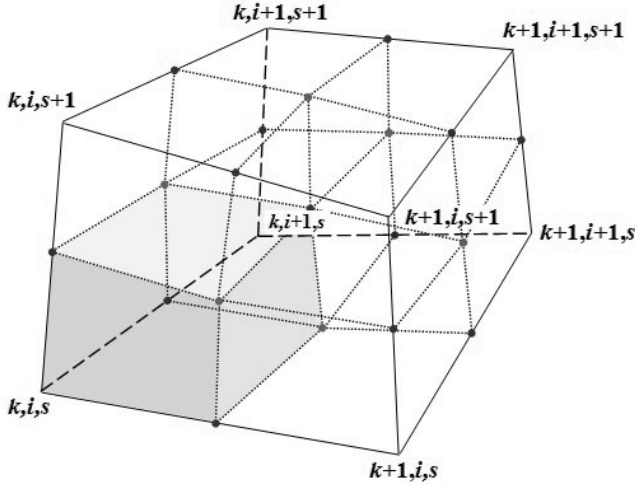


Рис. 3. Ячейка трехмерной счетной сетки, разбитая на подобласти

Здесь ψ — функция-ограничитель, отключающая действие вязкости при безударном сжатии и вращении среды как твердого тела; ρ — плотность; Δu — приращение скорости; $c_{зв}$ — скорость звука; l — множитель размерности длины; γ — эффективный показатель адиабаты; c_1 и c_2 — безразмерные коэффициенты соответственно перед линейным и квадратичным членами вязкости Куропатенко, по умолчанию равные единице. Плотность и скорость звука для всех подобластей принимаются равными плотности и скорости звука исходной ячейки.

Эффективное значение показателя адиабаты γ вычисляется следующим образом:

$$\gamma = \begin{cases} \min \left(2, \frac{\rho c_{зв}^2}{p} \right), & \text{если } p > 0, \\ 1, & \text{если } p \leq 0, \end{cases}$$

где p — давление.

Рассмотрим на примере выделенной на рис. 3 подобласти (k, i, s) вычисление приращения скорости $\Delta u_{k,i,s}$. Воспользуемся следующим соотношением:

$$\Delta u_{k,i,s} = (\text{div} \vec{u} \cdot \vec{l})_{k,i,s}, \quad (16)$$

где $\text{div} \vec{u}_{k,i,s}$ — дивергенция скорости в подобласти (k, i, s) , вычисленная по формуле

$$(\text{div} \vec{u})_{k,i,s} = \frac{1}{V_{k,i,s}^{k+1/2,i+1/2,s+1/2}} \sum_{l=1}^8 (\vec{u}_l \cdot \vec{s}_l), \quad \vec{u}_l = 0,25 \sum_{k=1}^4 \vec{u}_{l_k}, \quad \vec{s}_l = 0,5 \left[\vec{d}_{l_1} \times \vec{d}_{l_2} \right].$$

Здесь выполняется суммирование по всем граням подобласти; \vec{u}_l — вектор средней скорости на грани; \vec{s}_l — вектор, направленный по внешней нормали к грани, по длине равный площади грани; \vec{d}_{l_1} и \vec{d}_{l_2} — диагональные векторы на грани. Объем подобласти вычисляется аналогично объему исходной ячейки по формуле (13).

Множитель $l_{k,i,s}$ в (16) определяется из условия $l_{k,i,s} = \min \left(l_{\xi_{k+1/2,i,s}}, l_{\eta_{k,i+1/2,s}}, l_{\zeta_{k,i,s+1/2}} \right)$, где $l_{\xi_{k+1/2,i,s}}, l_{\eta_{k,i+1/2,s}}, l_{\zeta_{k,i,s+1/2}}$ — длины ребер в связанной с узлом локальной системе координат (ξ, η, ζ) .

Значение функции-ограничителя в подобласти (k, i, s) определяется из условия

$$\psi_{k,i,s} = \min \left((\psi_{\xi\eta})_s, (\psi_{\xi\zeta})_i, (\psi_{\eta\zeta})_k \right),$$

где $(\psi_{\xi\eta})_s, (\psi_{\xi\zeta})_i, (\psi_{\eta\zeta})_k$ — функции, определенные на гранях. Здесь индексы, обозначенные греческими буквами, указывают на семейство координатных линий локальной системы координат, из которых составлена грань, а буквы латинского алфавита обозначают неизменный индекс в нумерации этих координатных линий.

Опишем алгоритм вычисления функций на примере функции $(\psi_{\xi\eta})_s$. Введенные выше обозначения указывают на то, что функция $(\psi_{\xi\eta})_s$ определена во вспомогательной ячейке, содержащей грань, составленную из координатных линий $\xi_{k+1/2,i,s}$, $\xi_{k+1/2,i+1,s}$, $\eta_{k,i+1/2,s}$, $\eta_{k+1,i+1/2,s}$ (рис. 4). Кроме узлов, составляющих грань $(\xi, \eta)_s$, эта ячейка включает геометрические центры ячеек сверху и снизу от грани $(\xi, \eta)_s$ — узлы $(k+1/2, i+1/2, s+1/2)$ и $(k+1/2, i+1/2, s-1/2)$. Скорость в указанных узлах определяется как среднее арифметическое скоростей, определенных в узлах верхней и нижней ячеек.

Для определения значения функции-ограничителя $(\psi_{\xi\eta})_s$ необходимо вычислить дивергенцию скорости в самой вспомогательной ячейке, а также во всех близлежащих вспомогательных ячейках такого же семейства граней. На рис. 5 представлен шаблон для определения функции-ограничителя $(\psi_{\xi\eta})_s$.

Дивергенция скорости во вспомогательной ячейке вычисляется по формуле (16).

После определения всех дивергенций, входящих в шаблон, находятся отношения дивергенций по формулам

$$\begin{aligned} r_{left} &= \frac{(\operatorname{div} \vec{u})_{k-1/2, i+1/2, s}}{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s}}; & r_{right} &= \frac{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+3/2, i+1/2, s}}{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s}}; \\ r_{rear} &= \frac{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i-1/2, s}}{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s}}; & r_{front} &= \frac{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+3/2, s}}{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s}}; \\ r_{down} &= \frac{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s-1}}{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s}}; & r_{up} &= \frac{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s+1}}{(\operatorname{div} \vec{u})_{k+1/2, i+1/2, s}}. \end{aligned} \quad (17)$$

В конечном итоге значение функции-ограничителя $(\psi_{\xi\eta})_s$, как и в работе [5], определяется из условия

$$(\psi_{\xi\eta})_s = \min(\psi_1, \psi_2, \psi_3),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \max \left\{ 0, \min \left(0,5 (r_{left} + r_{right}), 2r_{left}, 2r_{right}, 1 \right) \right\}; \\ \psi_2 &= \max \left\{ 0, \min \left(0,5 (r_{rear} + r_{front}), 2r_{rear}, 2r_{front}, 1 \right) \right\}; \\ \psi_3 &= \max \left\{ 0, \min \left(0,5 (r_{down} + r_{up}), 2r_{down}, 2r_{up}, 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Функции-ограничители $(\psi_{\eta\xi})_k$ и $(\psi_{\xi\xi})_i$ находятся аналогичным образом. При этом строятся соответствующие вспомогательные ячейки.

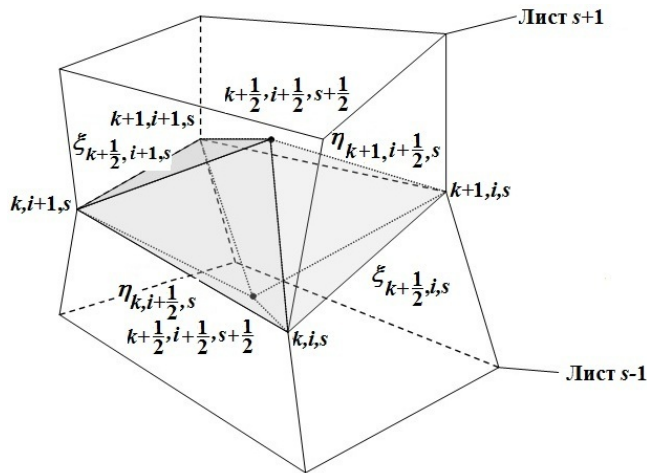


Рис. 4. Вспомогательная ячейка для вычисления функции-ограничителя $(\psi_{\xi\eta})_s$

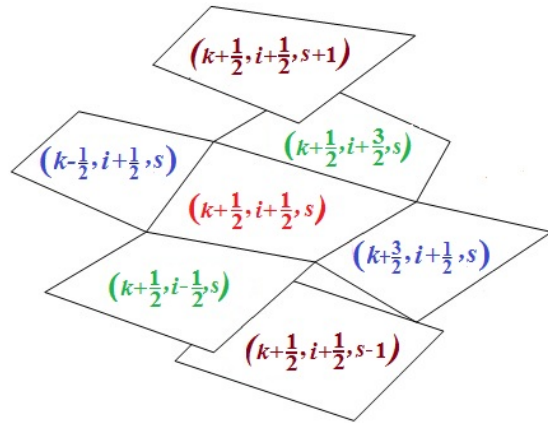


Рис. 5. Пространственный шаблон для определения функции-ограничителя $(\psi_{\xi\eta})_s$

Осталось рассмотреть момент, связанный с вычислением функций-ограничителей на гранях, являющихся внешними границами. В этом случае отношение, в котором присутствует дивергенция скорости для подобласти, выходящей за рамки счетной области, приравнивается к единице.

Поясним механизм отключения действия вязкости при однородном сжатии или вращении среды как твердого тела. В указанных случаях дивергенции, вычисленные во вспомогательных ячейках, будут иметь одинаковые значения, поэтому все отношения (17) будут равны единице. При этом $\psi_{k,i,s}$ также будет равно единице, что приведет к равенству нулю множителя μ .

Аппроксимация уравнения движения и уравнения энергии с учетом вязких сил

Новые значения скорости в узлах счетной сетки вычисляются через ускорения, вызванные действием сил давления и вязкости:

$$\vec{u}_{k,i,s}^{n+1} = \vec{u}_{k,i,s}^n + \tau \vec{a}_{k,i,s}^P + \tau \vec{a}_{k,i,s}^{fvis}.$$

Ускорение, возникающее при действии вязких сил, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \vec{a}_{k,i,s}^{fvis} = \frac{1}{m_{k,i,s}} & \left(\vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i+1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i-1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i+1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i-1/2,s+1/2} + \right. \\ & \left. + \vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i+1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i-1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i+1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i-1/2,s-1/2} \right). \end{aligned}$$

Здесь узловая масса $m_{k,i,s}$ вычисляется как среднее арифметическое масс прилегающих к узлу ячеек. Силы, у которых верхние индексы выходят за пределы границ нумерации ячеек счетной области, полагаются равными нулю.

Как известно, действие вязких сил обеспечивает перевод части кинетической энергии вещества во внутреннюю энергию. Количество переведенной энергии вычисляется по формуле

$$\Delta e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^{fvis} = -\tau \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \left(\vec{u}_{k+p,i+q,s+r}^{n+1/2} \cdot \vec{f}_{k+p,i+q,s+r}^{k+1/2,i+1/2,s+1/2} \right).$$

Полуцелый индекс $n+1/2$ обозначает, что берется полусумма скоростей, определенных на временных слоях n и $n+1$.

Новое значение удельной внутренней энергии в ячейке, содержащей одно вещество, определяется за счет действия сил давления и вязких сил из следующего соотношения:

$$e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^{n+1} = e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^n + \frac{1}{m_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}} \left(\Delta e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^P + \Delta e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^{fvis} \right).$$

При наличии ячеек, содержащих два и более веществ, пересчет удельной внутренней энергии при действии вязких сил осуществляется аналогично пересчету при действии сил давления [2]:

$$\left(e_j^{n+1} \right)_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} = \left(e_j^n \right)_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} + \Delta e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}.$$

Покажем, что введение тензорной вязкости не нарушает баланса полной энергии.

Выпишем уравнения движения и энергии только с учетом действия вязких сил:

$$m_{k,i,s} \left(\vec{u}_{k,i,s}^{n+1} - \vec{u}_{k,i,s}^n \right) = \tau \left(\vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i+1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i-1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i+1/2,s+1/2} + \right. \\ \left. + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i-1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i+1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k+1/2,i-1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i+1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{k-1/2,i-1/2,s-1/2} \right); \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} \left(e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^{n+1} - e_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^n \right) = \\ = -\tau \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \left(\vec{u}_{k+p,i+q,s+r}^{n+1/2} \cdot \vec{f}_{k+p,i+q,s+r}^{k+1/2,i+1/2,s+1/2} \right). \quad (19) \end{aligned}$$

Умножим скалярно уравнение (18) на вектор $\vec{u}_{k,i,s}^{n+1/2}$. В левой части получим изменение кинетической энергии за один шаг по времени в подобласти, содержащей узел (k, i, s) , по объему которой интегрируется уравнение движения в методике ЛЭГАК [2]:

$$m_{k,i,s} \left(\frac{(\vec{u}_{k,i,s}^{n+1})^2}{2} - \frac{(\vec{u}_{k,i,s}^n)^2}{2} \right) = \tau \vec{u}_{k,i,s}^{n+1/2} \cdot \left(\vec{f}_{k,i,s}^{7k+1/2,i+1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{7k+1/2,i-1/2,s+1/2} + \right. \\ \left. + \vec{f}_{k,i,s}^{7k-1/2,i+1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{7k-1/2,i-1/2,s+1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{7k+1/2,i+1/2,s-1/2} + \right. \\ \left. + \vec{f}_{k,i,s}^{7k+1/2,i-1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{7k-1/2,i+1/2,s-1/2} + \vec{f}_{k,i,s}^{7k-1/2,i-1/2,s-1/2} \right). \quad (20)$$

Составим баланс полной энергии для произвольной ячейки $(k + 1/2, i + 1/2, s + 1/2)$. Для этого возьмем восемь узлов этой ячейки, выпишем для каждого узла уравнение (20) и оставим только те выражения, которые содержат вязкие силы, вычисленные в рассматриваемой ячейке. Тогда кинетическая энергия, отнесенная к ячейке, будет иметь вид

$$(E_{kin})_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} = \frac{m_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}}{8} \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \frac{\vec{u}_{k+p,i+q,s+r}^2}{2},$$

а приращение кинетической энергии будет равно

$$(E_{kin})_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^{n+1} - (E_{kin})_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}^n = \tau \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \left(\vec{u}_{k+p,i+q,s+r}^{n+1/2} \cdot \vec{f}_{k+p,i+q,s+r}^{7k+1/2,i+1/2,s+1/2} \right). \quad (21)$$

Складывая (19) и (21), получаем, что для произвольно взятой ячейки изменение полной энергии равно нулю. Соответственно и суммарное приращение полной энергии также будет равняться нулю.

Примеры расчетов тестовых задач

В качестве примеров применения предложенного алгоритма приведем результаты расчетов трех тестовых задач.

Первая задача — обобщенный на трехмерный случай двумерный тест Зальцмана, взятый из работы [5]. В задаче моделируется распространение плоской ударной волны по области, покрытой счетной сеткой, грани которой имеют переменный наклон по отношению к поверхности фронта ударной волны. Сетка в расчете движется вместе с веществом.

Вторая задача — сферический тест Ноха [12]. В задаче моделируется распространение сферической ударной волны по области, покрытой изначально кубической счетной сеткой. Как и в первой задаче, сетка в процессе счета движется вместе с веществом.

В третьей задаче моделируется обжатие легкого газа тяжелой сферической оболочкой, на внешней границе которой задается постоянное давление. Счетная область покрывается кубической сеткой. Сетка в процессе счета остается неподвижной.

Для первых двух задач известно аналитическое решение. Для оценки погрешности вычислений будем использовать дискретный аналог интегральной нормы в пространстве L_1

$$\|\delta g\|_{l_1} = \sum_{s=1}^{N_s-1} \sum_{i=1}^{N_i-1} \sum_k^{N_k-1} |g_{k+1/2,i+1/2,s+1/2} - g_{exact}(\vec{r}_{k+1/2,i+1/2,s+1/2})| V_{k+1/2,i+1/2,s+1/2}. \quad (22)$$

Для третьей задачи имеется асимптотическое решение, полученное по одномерной методике на подробной сетке в лагранжевой постановке (не опубликовано). Согласно данному решению на момент времени $t = 330$ мкс достигается максимальное сжатие газа. Радиус границы между газом и оболочкой равен при этом $R = 1,7$ см.

Все расчеты с тензорной вязкостью проводились с зафиксированными значениями параметров $c_1 = c_2 = 1$.

Трехмерный вариант задачи Зальцмана. В прямоугольной области ($0 \leq x \leq 1$ см; $0 \leq y \leq 0,1$ см; $0 \leq z \leq 0,1$ см) в начальный момент времени находится идеальный газ с параметрами $\gamma = 5/3$; $\rho_0 = 1$ г/см³; $e_0 = 0,0001$ кДж/г; $\vec{u}_0 = \vec{0}$. На границе $x = 0$ задано условие $\vec{u} \cdot \vec{n} = -1$ км/с, остальные границы — жесткие стенки.

Аналитическое решение задачи представляет собой ударную волну, распространяющуюся вправо от левой границы с постоянной скоростью. После достижения правой границы волна отражается и идет в обратную сторону. Достигнув левой границы, волна снова отражается и разворачивается вправо. В табл. 1 приведены значения параметров газа за фронтом ударной волны в различные временные интервалы.

Расчеты задачи проводились до момента времени $t = 9,25$ мкс с начальным шагом интегрирования $\tau = 10^{-4}$ мкс.

Начальные координаты узлов счетной сетки были рассчитаны по формулам

$$x_{k,i,s} = (k-1)h + A \frac{N_i - i}{N_i - 1} \frac{N_s - i}{N_s - 1} \sin \frac{\pi(k-1)}{N_k - 1}; \quad y_{k,i,s} = (i-1)h; \quad z_{k,i,s} = (s-1)h. \quad (23)$$

Здесь h — характерный размер ячеек счетной сетки, который принимал значения $h = 0,01; 0,005; 0,0025$ см; A — амплитуда возмущения характерного размера, равная постоянному значению $0,1$ см; N_k, N_i, N_s — количество узлов счетной сетки в направлениях Ox, Oy и Oz соответственно.

Фактически формулы (23) означают, что в направлениях Oy и Oz , а также в плоскости $z = 0,1$ см сетка равномерная; в плоскости $z = 0$ сетка имеет вид, как в классическом двумерном тесте Зальцмана; соответствующие узлы в плоскостях $z = 0$ и $z = 0,1$ см соединены отрезками прямых. На рис. 6 приведена сетка в плоскости $z = 0$.

Расчеты с использованием вязкости Неймана—Рихтмайера в лагранжевой постановке провести до конечного момента времени не удалось, поэтому будут приведены результаты расчетов только с использованием тензорной вязкости.

Таблица 1

Точное решение трехмерного варианта задачи Зальцмана (значения параметров газа за фронтом ударной волны)

Величина	Первая волна	Вторая волна	Третья волна
Временной интервал t , мкс	(0; 7,5)	(7,5; 9,0)	(9; 9,5)
Плотность ρ , г/см ³	4	10	20
Давление p , ГПа	4/3	8	28
Удельная внутренняя энергия e , кДж/г	0,5	1,2	2,1
Скорость u , км/с	1	0	1
Скорость распространения скачка D , км/с	4/3	-2/3	2

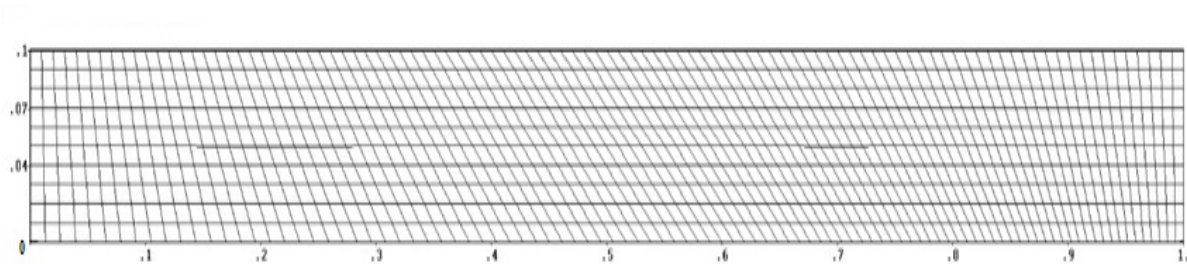


Рис. 6. Вид счетной сетки в плоскости $z = 0$ в трехмерном варианте задачи Зальцмана

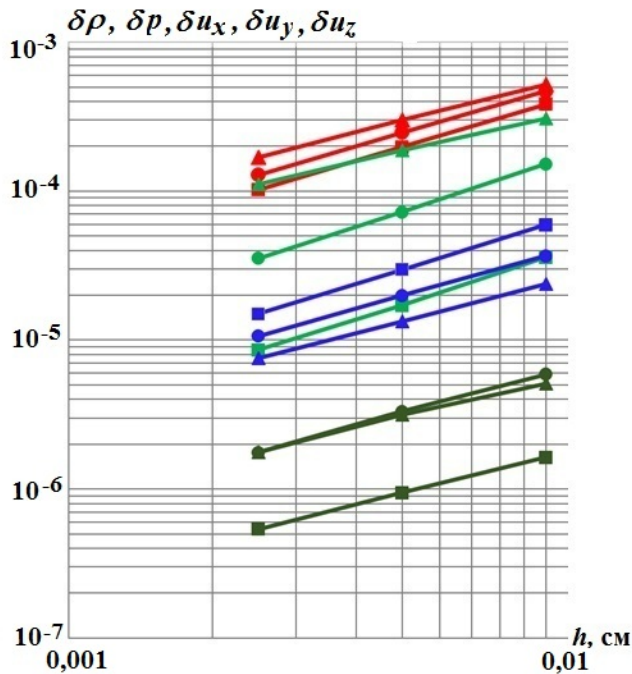


Рис. 7. Погрешности величин в зависимости от характерного размера ячеек счетной сетки в расчетах трехмерного варианта задачи Зальцмана: \blacksquare — $\delta\rho$, $t = 7$ мкс; \bullet — $\delta\rho$, $t = 8,5$ мкс; \blacktriangle — $\delta\rho$, $t = 9,25$ мкс; \blacksquare — $\delta\rho$, $t = 7$ мкс; \bullet — $\delta\rho$, $t = 8,5$ мкс; \blacktriangle — $\delta\rho$, $t = 9,25$ мкс; \blacksquare — δu_x , $t = 7$ мкс; \bullet — δu_x , $t = 8,5$ мкс; \blacktriangle — δu_x , $t = 9,25$ мкс; \blacksquare — $\delta u_y, \delta u_z$, $t = 7$ мкс; \bullet — $\delta u_y, \delta u_z$, $t = 8,5$ мкс; \blacktriangle — $\delta u_y, \delta u_z$, $t = 9,25$ мкс

идеальный газ с параметрами $\gamma = 5/3$; $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$; $e_0 = 0$. Во всех точках области задана ненулевая начальная скорость, равная по модулю единице и направленная к началу координат. Границы $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ являются жесткими стенками, на остальных границах задана постоянная скорость, равная единице и направленная к центру координатной системы. При такой постановке из точки $(0;0;0)$ начинает распространяться сферическая ударная волна, которая описывается аналитическим решением [11], приведенным в табл. 2.

Все расчеты проводились до момента времени $t = 6$ мкс только с использованием тензорной вязкости с учетом и без учета функций-ограничителей. Провести расчет с вязкостью Неймана—

На рис. 7 показаны зависимости погрешностей для плотности, давления и компонент скорости, рассчитанные по формуле (22), на моменты времени $t = 7; 8,5; 9,25$ мкс. Видно, что при уменьшении характерного размера ячеек счетной сетки погрешности величин убывают, т. е. имеет место сходимость численного решения к аналитическому. Наибольшее отклонение от точного решения получилось для значений плотности газа. При этом ошибка практически одинакова для всех ударных волн. Как показано на рис. 8 на примере первой ударной волны, наибольшая ошибка в значениях плотности получается в плоскости $z = 0$ вблизи верхней и нижней границ.

Также видно, что наименьшую погрешность имеют значения y - и z -компонент вектора скорости для первой ударной волны. Это свидетельствует о том, что сетка вдоль этих направлений практически не двигается, что и должно наблюдаться при моделировании одномерной плоской ударной волны. Однако при отражении волны от правой границы погрешность возрастает и далее практически не меняется. В этом случае уже заметно искажение сетки вдоль указанных направлений.

Сферический тест Ноха. В области, имеющей в начальный момент форму куба со стороной, равной 1 см ($0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$), находится

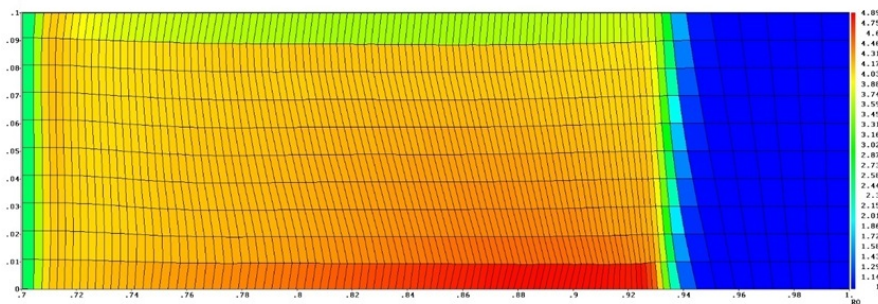


Рис. 8. Распределение плотности вблизи границы $z = 0$ в расчете трехмерного варианта задачи Зальцмана с характерным размером ячеек $h = 0,01$ см на момент времени $t = 7$ мкс

Рихтмайера до контрольного момента времени не удалось, так как при $t = 0,343$ мкс произошел перехлест сетки в районе центра и расчет был остановлен.

Были проведены расчеты на последовательно сгущающихся сетках с шагами $h = 0,02; 0,01; 0,005$ см. Начальный шаг интегрирования по времени равнялся $\tau = 10^{-3}$ мкс.

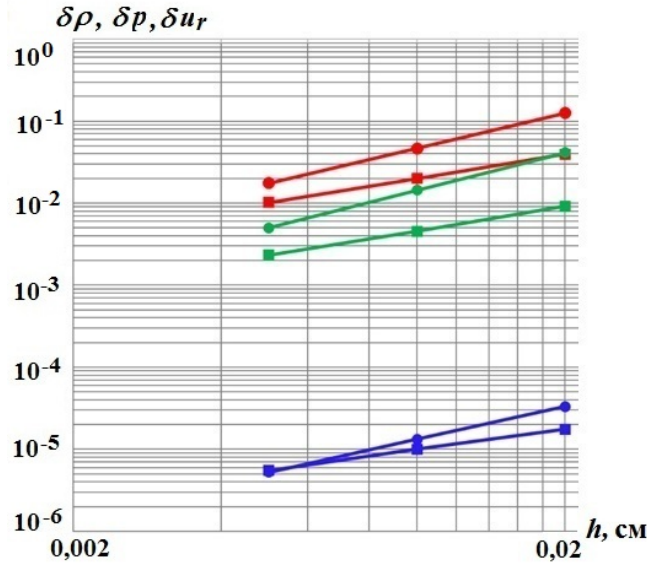


Рис. 9. Погрешности величин в зависимости от характерного размера ячеек счетной сетки в расчетах сферического теста Ноха: —■— $\delta\rho$, с ограничителем; —●— $\delta\rho$, без ограничителя; —■— δp , с ограничителем; —●— δp , без ограничителя; —■— δu_r , с ограничителем; —●— δu_r , без ограничителя

На рис. 9 показаны зависимости погрешностей для плотности, давления и радиальной скорости, рассчитанные по формуле (22), на момент времени $t = 6$ мкс. Видно, что при уменьшении характерного размера ячеек погрешности убывают, т. е. наблюдается сходимость численного решения к аналитическому. Как и в задаче Зальцмана, наибольшее отклонение от точного решения получилось для значений плотности газа. Как показано в работе Ноха [11], это связа-

Таблица 2

Аналитическое решение сферического теста Ноха

Величина	$R < \frac{1}{3}t$	$R \geq \frac{1}{3}t$
u_r , км/с	0	-1
ρ , г/см ³	64	$\left(1 + \frac{t}{R}\right)^2$
e , кДж/г	0,5	0
p , ГПа	$\frac{64}{3}$	0

но с избыточным нагревом газа вблизи центра. При этом с включением функций-ограничителей ошибка уменьшается. Во-первых, точнее описывается положение фронта ударной волны; во-вторых, точнее вычисляются значения величин за фронтом. Это показывает распределение плотности вдоль некоторых радиальных направлений (рис. 10).

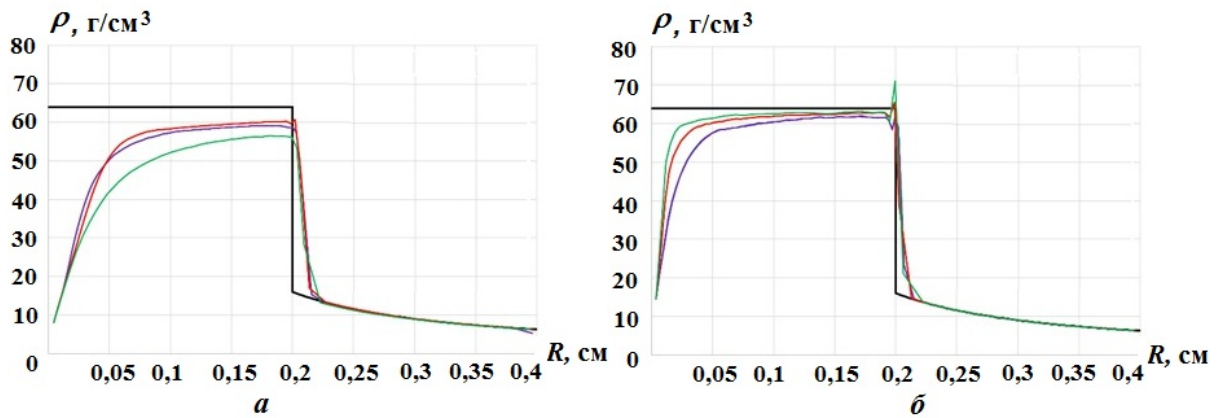


Рис. 10. Профили плотности вдоль некоторых радиальных направлений в расчетах сферического теста Ноха ($h = 0,01$ см): а — с функциями-ограничителями; б — без функций-ограничителей: — — точное решение; — — $z = 0, y = 0$; — — $z = 0, x = 0$; — — $x = 0, y = 0$; — — $z = 0, x = y$; — — $y = 0, x = z$; — — $x = 0, y = z$; — — $z = y = z$

Из рис. 10 также видно, что имеет место симметрия численного решения относительно прямой $x = y = z$: профили вдоль прямых ($z = 0, y = 0$), ($z = 0, x = 0$) и ($x = 0, y = 0$), а также вдоль прямых ($z = 0, x = y$), ($y = 0, x = z$) и ($x = 0, y = z$) накладываются друг на друга.

На рис. 11 показано распределение плотности в плоскости $z = 0$ с нанесенной счетной сеткой на момент окончания счета, полученное в расчетах с $h = 0,01$ см с использованием и без использования функций-ограничителей. Видно, во-первых, что в области за фронтом ударной волны ортогональность начальной счетной сетки нарушилась незначительно и, во-вторых, с использованием функций-ограничителей заметно уменьшилась область с избыточным пристеночным нагревом (энтропийным следом) и численное решение стало ближе к точному решению.

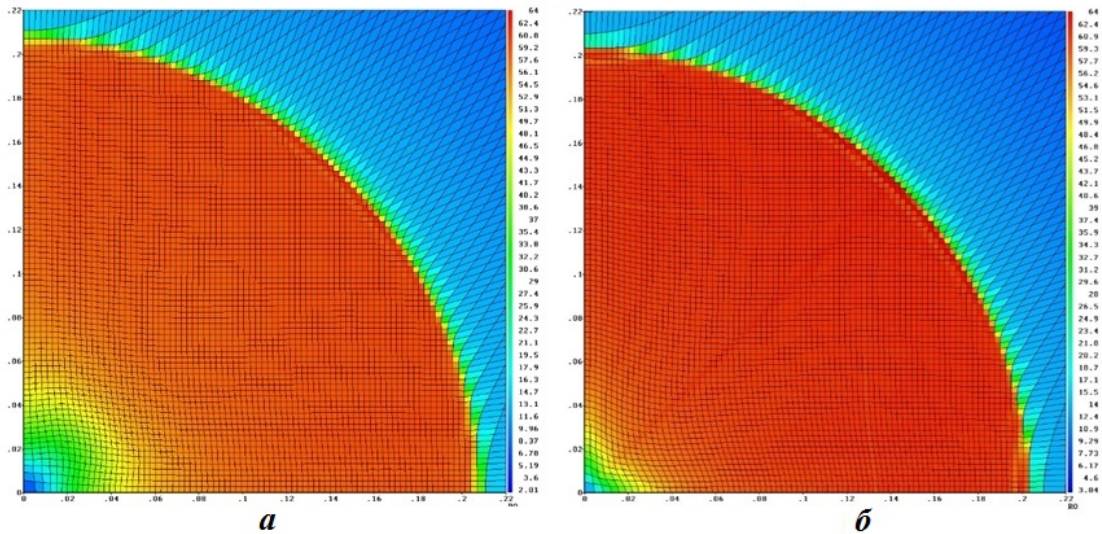


Рис. 11. Распределение плотности в плоскости $z = 0$ на момент окончания счета в сферическом тесте Ноха ($h = 0,01$ см): *а* — без функций-ограничителей; *б* — с функциями-ограничителями

Задача об обжатии газа тяжелой сферической оболочкой. В сферической области радиусом $R = 8$ см с центром в начале координат находится идеальный газ с параметрами $\gamma_1 = 5/3$; $\rho_1^0 = 1$ г/см³; $e_1^0 = 0$; $p_1^0 = 0$; $u_1^0 = 0$. В сферическом слое $8 \text{ см} \leq R \leq 10$ см находится тяжелая оболочка, описываемая также уравнением состояния идеального газа с параметрами $\gamma_2 = 5/3$; $\rho_2^0 = 25$ г/см³; $e_2^0 = 0$; $p_2^0 = 0$; $u_2^0 = 0$. На внешней границе $R = 10$ см задано постоянное давление, равное 1 ГПа. При такой постановке оболочка начинает двигаться к центру, сжимая центральную область с легким газом. При этом течение по факту является одномерным сферически-симметричным.

В качестве оцениваемой величины выступает радиус центральной области на момент максимального сжатия легкого газа. Асимптотическое значение этого радиуса, равное 1,7 см, достигается на момент времени 330 мкс. Это решение было получено еще в начале 1980-х гг. на очень подробной счетной сетке по одномерной программе, разработанной в РФЯЦ-ВНИИЭФ, но опубликовано не было. Задача с похожей постановкой (*задача Сараява*) встречается в сборнике тестов для гидрокодов под редакцией Ю. В. Янилкина [13].

Благодаря симметрии моделируемого течения в качестве счетной области была выбрана одна восьмая часть исходной полной области с размерами ($0 \leq x, y, z \leq 11$ см). Внутри области строилась кубическая сетка. Были проведены расчеты с характерным размером ячеек $h = 0,05; 0,025$ см. Варьировался тип искусственной вязкости: брались скалярная вязкость Неймана—Рихтмайера и тензорная вязкость. При использовании тензорной вязкости также анализировалось влияние функций-ограничителей.

На рис. 12 приведена форма газа, полученная в расчетах задачи с использованием вязкости Неймана—Рихтмайера и тензорной вязкости при варьировании шага по пространству. Видно, что при использовании вязкости Неймана—Рихтмайера на границе между газом и оболочкой развива-

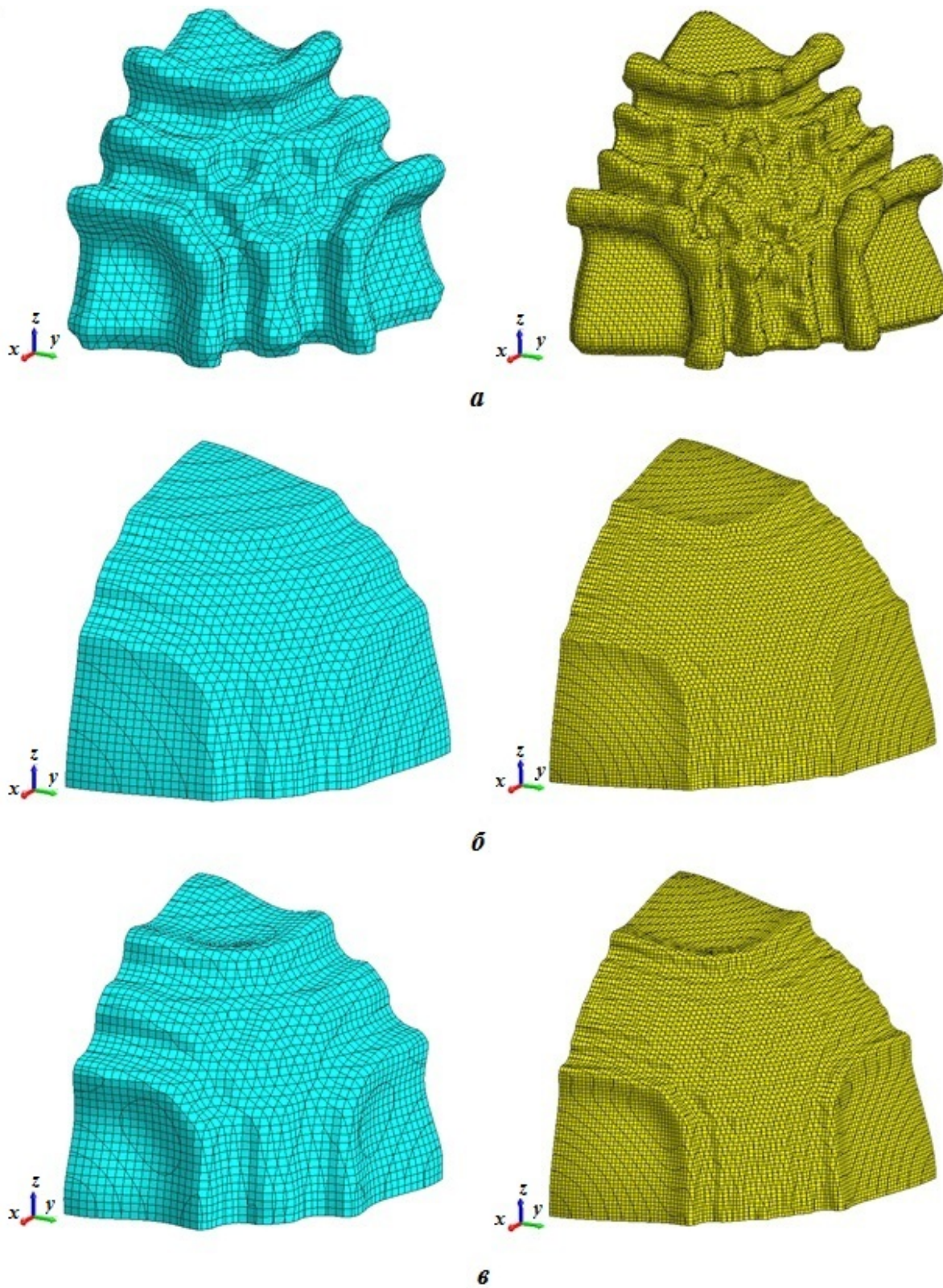


Рис. 12. Форма газа на момент достижения максимальной средней плотности в расчетах задачи об обжатии газа тяжелой оболочкой: *a* — вязкость Неймана–Рихтмайера; *б* — тензорная вязкость, без функций-ограничителей; *в* — тензорная вязкость, с функциями-ограничителями; слева — $h = 0,05$ см; справа — $h = 0,025$ см

ются возмущения с амплитудой около 0,4 см. При этом с уменьшением размера ячеек сетки частота возмущений растет. При использовании тензорной вязкости возмущения практически не развиваются. Использование функций-ограничителей немного ослабляет сглаживающий эффект.

Для анализа точности численного решения и определения порядка нарушения сферической симметрии были вычислены средние значения радиусов границы *газ—оболочка* и посчитаны среднеквадратичные отклонения на основании несмещенной оценки. Результаты статистической обработки приведены в табл. 3. Также в таблице приведена относительная погрешность среднего значения радиуса границы *газ—оболочка* в сравнении с асимптотическим решением.

Из таблицы видно, что наиболее близкий к асимптотическому решению результат получился в расчете с использованием тензорной вязкости и функций-ограничителей. При этом симметрия одномерного сферического течения лучше сохранилась в расчете с использованием тензорной вязкости с отключенным действием функций-ограничителей. Результаты с вязкостью Неймана—Рихтмайера проигрывают результатам с тензорной вязкостью и по точности, и по сохранению сферической симметрии.

Таблица 3

Данные статистической обработки результатов расчета задачи об обжатии газа тяжелой сферической оболочкой

Тип вязкости	Размер ячеек, см	Среднее значение радиуса границы <i>газ—оболочка</i> , см	Средне-статистическое отклонение	Относительная погрешность, %
Неймана—Рихтмайера	0,05	1,732	0,109	1,88
	0,025	1,733	0,096	1,94
Тензорная, с ограничителями	0,05	1,728	0,035	1,65
	0,025	1,724	0,013	1,41
Тензорная, без ограничителей	0,05	1,705	0,054	0,29
	0,025	1,712	0,046	0,71

Заключение

Приведена формулировка искусственной вязкости тензорного вида, разработанная в методике ЛЭГАК-3D для моделирования трехмерных газодинамических течений с ударными волнами. При вычислении вязких сил используются проекции несимметричного тензора градиента скорости на ребра ячеек счетной сетки и скалярный множитель в форме Куропатенко. Введение тензорной вязкости не нарушает свойство консервативности разностной схемы методики ЛЭГАК-3D.

На примере расчетов трех тестовых задач показано, что использование тензорной вязкости при моделировании ударных волн, фронт которых не параллелен какому-либо семейству боковых поверхностей ячеек счетной сетки, приводит к повышению точности по сравнению с использованием классической скалярной вязкости Неймана—Рихтмайера.

Список литературы

1. Von Neuman J., Richtmyer R. D. F method for the numerical calculation of hydrodynamics shocks // J. Appl. Physics. 1950. Vol. 21, No 3. P. 232—237.
2. Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф., Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бакулина Е. А., Безрукова И. Ю., Борляев В. В., Володина Н. А., Наумов А. О., Огнева Н. Э., Резвова Т. В., Резянов А. А., Стародубов С. В., Тарадай И. Ю., Тихонова А. П., Циберев К. В., Шанин А. А., Ширшова М. О., Шувалова Е. В. Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники.

- Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 41—50.
Bakhrakh S. M., Velichko S. V., Spiridonov V. F., Avdeev P. A., Artamonov M. V., Bakulina E. A., Bezrukova I. Yu., Borlyayev V. V., Volodina N. A., Naumov A. O., Ogneva N. E., Rezvova T. V., Rezyapov A. A., Starodubov S. V., Taraday I. Yu., Tikhonova A. P., Tsiberev K. V., Shanin A. A., Shirshova M. O., Shuvalova E. V. Metodika LEGAK-3D raschyeta tryekhmernykh nestatsionarnykh techeniy mnogokomponentnoy sploshnoy sredy i printsipy eye realizatsii na mnogoprotsessornykh EVM s raspredelennoy pamyatyu // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2004. Выр. 4. S. 41—50.
3. *Schulz W. D.* Two-dimensional Lagrangian hydrodynamic difference schemes // *Methods Comp. Phys.* 1964. Vol. 3. P. 1—45.
 4. *Caramana E. J., Shashkov M. J., Whalen P. P.* Formulation of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations // *J. Comp. Phys.* 1998. Vol. 144. P. 70—97.
 5. *Campbell J., Shashkov M. J.* A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm // *Ibid.* 2001. Vol. 172. P. 739—765.
 6. *Куропатенко В. Ф.* Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики // *Изв. вузов. Математика.* 1962. № 3. С. 75—83.
Kuropatenko V. F. Metod postroeniya raznostnykh skhem dlya chislennogo integrirovaniya uravneniy gazodinamiki // *Izv. vuzov. Matematika.* 1962. № 3. S. 75—83.
 7. *Бахрах С. М., Наумов А. О.* Реализация в методике ЛЭГАК искусственных вязкостей тензорного вида // *Сб. докл. V науч.-техн. конф. "Молодежь в науке".* Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007. С. 143—149.
Bakhrakh S. M., Naumov A. O. Realizatsiya v metodike LEGAK iskusstvennykh vyazkostey tenzornogo vida // *Sb. dokl. V nauch.-tekh. konf. "Molodyezh v nauke".* Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2007. S. 143—149.
 8. *Стенин А. М., Соловьева Е. А.* Матрица искусственных вязкостей для двумерной лагранжевой газодинамики, способствующая уменьшению "энтропийного следа" в численных расчетах // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2010. Вып. 1. С. 3—18.
Stenin A. M., Solovyeva E. A. Matritsa iskusstvennykh vyazkostey dlya dvumernoy lagranzhevoy gazodinamiki, sposobstvuyushchaya umensheniyu "entropiynogo sleda" v chislennykh raschyetakh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2010. Выр. 1. S. 3—18.
 9. *Тагирова И. Ю., Родионов А. В.* Применение искусственной вязкости для борьбы с "карбункл"-неустойчивостью в схемах типа Годунова // *Математическое моделирование.* 2015. Т. 27, № 10. С. 47—64.
Tagirova I. Yu., Rodionov A. V. Primenenie iskusstvennoy vyazkosti dlya borby s "karbunkul"-neustoychivostyu v skhemakh tipa Godunova // *Matematicheskoe modelirovanie.* 2015. Т. 27, № 10. S. 47—64.
 10. *Еськов Н. С., Пронин Я. В.* Один из способов построения полностью консервативной разностной схемы газовой динамики в лагранжевых переменных // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2004. Вып. 2. С. 65—78.
Eskov N. S., Pronin Ya. V. Odin iz sposobov postroeniya polnostyu konservativnoy raznostnoy skhemy gazovoy dinamiki v lagranzhevyykh peremennykh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2004. Выр. 2. S. 65—78.
 11. *Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И.* Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах. Т. 1. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2019.
Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Kozlov V. I. Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo peremeshivaniya v szhimaemykh sredakh. Т. 1. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2019.
 12. *Noh W. F.* Errors for calculations of strong shocks using artificial viscosity and artificial heat flux // *J. Comp. Phys.* 1987. Vol. 72, No 1. P. 78—120.

13. Янилкин Ю. В., Бондаренко Ю. А., Гончаров Е. А., Гужова А. Р., Колобянин В. Ю., Софронов В. Н., Стаценко В. П. Тесты для гидрокодов, моделирующих ударноволновые течения в многокомпонентных средах. Т. 1. Газодинамика. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017.
Yanilkin Yu. V., Bondarenko Yu. A., Goncharov E. A., Guzhova A. R., Kolobyanin V. Yu., Sofronov V. N., Statsenko V. P. Testy dlya gidrokodov, modeliruyushchikh udarnovolnovye techeniya v mnogokomponentnykh sredakh. T. 1. Gazodinamika. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2017.

Статья поступила в редакцию 10.11.20.

ABOUT ONE TYPE OF TENSOR ARTIFICIAL VISCOSITY FOR SIMULATION OF 3D GAS DYNAMIC FLOWS / A. O. Naumov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper presents the description of the tensor-form artificial viscosity for computations with the shock-capturing method, it is applied in the LEGAK-3D code developed and used at RFNC-VNIIEF for the simulation of complex gas dynamic flows with severely strained contact boundaries.

The motion and energy equation approximation owing to the viscosity effect is based on the approximation of differential divergence operators and the arbitrary tensor gradient represented by vector projections on the computational grid lines. The viscous tensor includes a scalar factor which is based on the Kuropatenko-type viscosity and contains a function that eliminates the effect of viscosity under the conditions of shock-free compression, or rotation of a medium as a rigid body.

To demonstrate advantages of the proposed viscosity, simulation results are presented for the three problems: the 3D version of Zaltsman's problem, the Noh spherical test, and the problem of gas compressing by a heavy shell.

Keywords: gas dynamics, shock waves, the tensor-form artificial viscosity, numerical simulation.

