

УДК 519.6

## ПЕРЕСЧЕТ ВЕЛИЧИН В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕЖКОМПОНЕНТНЫХ ОБМЕНОВ В МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЕ

А. М. Стенин

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Глобальный алгоритм пересчета газодинамических величин на новую сетку предусматривает вычисление вкладов соответствующих интегральных величин со старой сетки. Для вычисления интегральных вкладов ищутся многоугольники пересечения ячеек старой и новой сеток. В данной работе показано, что такой алгоритм пересчета можно представить как межкомпонентные обмены в некоторой искусственной многофазной среде. При этом последовательный учет всех процессов в такой среде, сопутствующих обмену массами, импульсами и энергиями, проведенный по аналогии с континуальной многофазной многоскоростной средой, неизбежно приводит к вычислению удельной внутренней энергии с поправками, связанными с дефицитом кинетической энергии на новой пространственной сетке.

*Ключевые слова:* газовая динамика, лагранжево-эйлеровы координаты, глобальный алгоритм пересчета величин, многофазная среда, межкомпонентные обмены, седовский взрыв.

### Введение

Численные методы моделирования газодинамических течений сплошной среды могут быть основаны на записи системы уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа или в переменных Эйлера. Оба эти подхода имеют свои достоинства и недостатки.

Так, например, к достоинствам применения в численных методах лагранжева подхода относится простота их программной реализации, а также автоматическое отслеживание контактных границ между веществами. Однако вследствие того, что пространственная сетка движется вместе с веществом, зачастую возникают такие искажения сетки, которые ведут к потере точности или даже к невозможности продолжить расчет.

В численных методах, основанных на записи уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, пространственная сетка остается неподвижной. Поэтому проблем, связанных с ее искажениями, не существует. Но возникает необходимость в разработке и реализации алгоритмов описания динамики контактных границ между веществами.

Стремление соединить положительные стороны лагранжева и эйлерова подходов приводит к созданию разностных методов решения газодинамических задач на лагранжево-эйлеровой сетке. Такие разностные схемы основаны на интегродифференциальных уравнениях газовой динамики, записанных относительно элементарного объема, движущегося с произвольно заданной скоростью. Если заданная скорость элементарного объема в этих уравнениях равна скорости вещества, то получают уравнения в форме Лагранжа; если же она равна нулю, то получают уравнения в переменных Эйлера. Запись интегродифференциальных уравнений газовой динамики в лагранжево-эйлеровых координатах приводится, например, в работах [1, 2].

Расчет одного шага по времени в лагранжево-эйлеровых методиках, как правило, подразделяется на два этапа. На первом, лагранжевом, этапе рассчитывается изменение газодинамической

системы за счет работы сил газодинамического давления и прочих действующих сил. На втором, эйлеровом, этапе производится построение новой пространственной сетки и пересчет величин на эту сетку. Изменение газодинамических величин на этом этапе вызвано конвективными потоками, возникающими вследствие смещения узлов сетки после лагранжева этапа счета шага.

С аппроксимацией конвективных потоков на эйлеровом этапе связана основная трудность при создании лагранжево-эйлеровых методик. Она заключается в том, что желание повысить порядок аппроксимации уравнений конвекции входит в противоречие с желанием получать монотонные численные решения. Согласно теореме С. К. Годунова [3] в линейном случае монотонность на разрывных решениях можно обеспечить только в разностных схемах первого порядка аппроксимации. В поисках выхода из этого противоречия и обхода условий теоремы С. К. Годунова разрабатываются так называемые схемы переменного порядка аппроксимации производных по пространству. В таких схемах используются нелинейные механизмы переключения от аппроксимации второго порядка и выше на гладких решениях к аппроксимации первого порядка на разрывных решениях. Для получения монотонных решений используются различные ограничители потоков величин, зависящие от локальных свойств численных решений. По этой теме имеется обширная как отечественная, так и зарубежная литература. Множество ссылок на публикации зарубежных авторов по численным методам подобного типа можно найти, например, в обзорной работе [4].

В данной работе рассматривается пересчет величин по алгоритму глобального типа путем поиска пересечений ячеек старой пространственной сетки (после лагранжева этапа) с ячейками новой сетки эйлерова этапа [5]. Такой алгоритм пересчета используется на эйлеровом этапе методики ВКЛ (Выделенные Контактные Линии) [6, 7], предназначенной для расчета двумерных газодинамических течений на структурированных четырехугольных сетках с выделением контактных границ между веществами ломаными линиями, не совпадающими с линиями сетки.

Глобальный алгоритм пересчета величин предусматривает вычисление удельных газодинамических величин из выполнения законов сохранения некоторых интегральных величин. А именно, значения плотности на новой сетке вычисляются из условия сохранения массы, значения скорости в узлах новой сетки — из условия сохранения количества движения. Для вычисления значений удельной внутренней энергии в ячейках новой сетки суммируются вклады интегральной внутренней энергии из ячеек старой сетки. Для сохранения полной энергии неотрицательная разница между кинетической энергией, полученной суммированием кинетических энергий на старой сетке, и кинетической энергией, полученной по значениям новых скоростей, добавляется в виде поправки к интегральной внутренней энергии ячеек новой сетки.

В данной работе показано, что такой пересчет можно представить как межкомпонентные обмены в некоторой искусственной многофазной среде. Также установлен факт, что последовательный учет всех процессов в такой среде, сопутствующих обмену массами, импульсами и энергиями, проведенный по аналогии с континуальной многофазной многоскоростной средой, неизбежно приводит к вычислению удельной внутренней энергии с поправками, связанными с невозполнимым дефицитом кинетической энергии на новой пространственной сетке. Такие поправки с успехом используются в алгоритме пересчета величин методики ВКЛ.

### Дискретизация величин в методике ВКЛ

Методика ВКЛ предназначена для расчета двумерных газодинамических течений, обладающих плоской или осевой симметрией. Запись  $\vec{Z} = (x, y)$  обозначает точку на плоскости  $XOY$ . В случае плоской симметрии течений  $OX$  — ось абсцисс,  $OY$  — ось ординат декартовой прямоугольной системы координат. Для осесимметричных течений  $OX$  — ось вращения,  $OY$  — ось радиусов.

Приняты следующие обозначения дискретных сеточных величин.

Узлы пространственной сетки  $\vec{Z}_{i,k} = (x_{i,k}, y_{i,k})$  (рис. 1), являющиеся вершинами четырехугольных ячеек, обозначаются двойными нижними целочисленными индексами  $i = 1, 2, \dots, N_i$ ;  $k = 1, 2, \dots, N_k$ . Векторы скорости  $\vec{U}_{i,k} = (u_{i,k}, v_{i,k})$  определяются в узлах сетки.

Ячейкам пространственной сетки придаются нижние полуцелые индексы:  $\Omega_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $i = 2, 3, \dots, N_i$ ;  $k = 2, 3, \dots, N_k$ . Скалярные термодинамические величины, плотность  $\rho_{i-1/2,k-1/2}$ ,

удельная внутренняя энергия  $E_{i-1/2,k-1/2}$ , давление  $P_{i-1/2,k-1/2}$  определяются в ячейках с теми же индексами.

Как на лагранжевом, так и на эйлеровом этапе методики ВКЛ каждая ячейка сетки  $\Omega_{i-1/2,k-1/2}$  разбивается своими средними линиями на четырехугольники  $C^j_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , вложенные в ячейку. Одна из вершин каждого вложенного четырехугольника является вершиной этой ячейки. Локальная нумерация четырехугольников показана на рис. 1. Кроме значения плотности  $\rho_{i-1/2,k-1/2}$  в самой ячейке сетки, дополнительно вводятся значения плотности  $\rho^j_{i-1/2,k-1/2}$  во всех вложенных четырехугольниках  $C^j_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

На лагранжевом этапе счета шага по времени значения плотности  $\rho^j_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , вычисляются из условия сохранения массы в каждом из вложенных четырехугольников. В процессе пересчета величин новые значения плотности также вычисляются в этих четырехугольниках. Как на лагранжевом этапе, так и по завершении эйлерова этапа масса ячейки сетки складывается из масс четырехугольников, на которые она разбита:

$$M_{i-1/2,k-1/2} = M1_{i-1/2,k-1/2} + M2_{i-1/2,k-1/2} + M3_{i-1/2,k-1/2} + M4_{i-1/2,k-1/2}. \quad (1)$$

Масса узла сетки  $M_{i,k}$  определяется как сумма масс вложенных четырехугольников, для которых данный узел является общей вершиной (см. рис. 1):

$$M_{i,k} = M1_{i+1/2,k+1/2} + M2_{i-1/2,k+1/2} + M3_{i-1/2,k-1/2} + M4_{i+1/2,k-1/2}. \quad (2)$$

То есть масса узла представляет собой массу, заключенную в восьмиугольнике  $\Omega_{i,k}$ , образованном объединением вложенных четырехугольников:

$$\Omega_{i,k} = C1_{i+1/2,k+1/2} \cup C2_{i-1/2,k+1/2} \cup C3_{i-1/2,k-1/2} \cup C4_{i+1/2,k-1/2}.$$

Объем многоугольника  $\Omega_{i,k}$  есть объем интегрирования импульса, а его граница — контур интегрирования уравнения движения.

Согласованное определение массы узла по формуле (2) на лагранжевом этапе и на этапе глобального пересчета величин играет ту же роль, что и сбалансированная аппроксимация конвективных потоков в лагранжево-эйлеровых разностных схемах [7, 8]. А именно, оно позволяет обеспечить выполнение закона сохранения импульса по совокупности обоих этапов счета шага по времени.

Поскольку пересчет величин носит глобальный характер, то не только нет ограничений на смещение узлов сетки при ее перестроениях, но и допускается, чтобы число строк и столбцов пространственной сетки лагранжева и эйлерова этапов не совпадали. Поэтому для величин, определенных на лагранжевой сетке, будем использовать нижние индексы  $i, k$ :  $\vec{Z}_{i,k} = (x_{i,k}, y_{i,k})$ ,  $\Omega_{i-1/2,k-1/2}$ ,  $\Omega_{i,k}$ , и т. д., а для величин на новой сетке — индексы  $in, kn$ :  $\vec{Z}_{in,kn} = (x_{in,kn}, y_{in,kn})$ ,  $\Omega_{in-1/2,kn-1/2}$ ,  $\Omega_{in,kn}$ , и т. д. Иногда для сокращения записи вместо двойного индекса  $(in - 1/2, kn - 1/2)$  будем использовать номер ячейки  $Яn$ :  $\Omega_{in-1/2,kn-1/2} \equiv \Omega_{Яn}$ , а вместо двойного индекса  $(in, kn)$  — номер узла  $Уn$ :  $\Omega_{in,kn} \equiv \Omega_{Уn}$

Обозначения окончательных значений величин после пересчета снабжаются верхним индексом  $n + 1$ ,  $(f^{n+1})$ , обозначения газодинамических величин, полученных после лагранжева этапа, используются без верхних индексов.

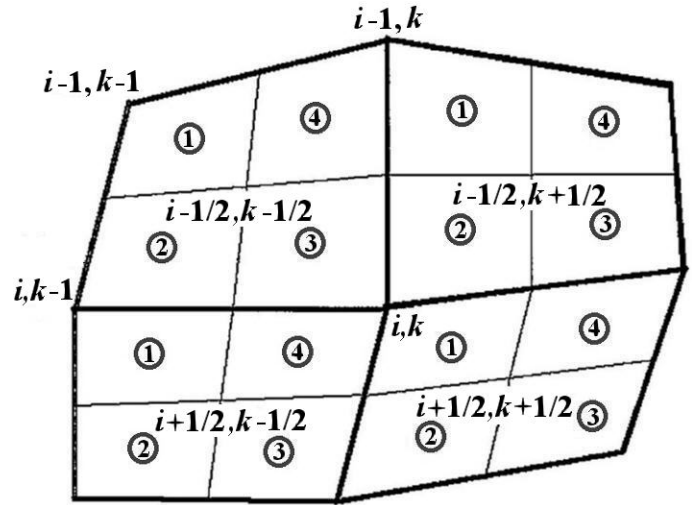


Рис. 1. Локальная нумерация вложенных четырехугольников ячеек сетки

## Дискретная искусственная многофазная среда

Глобальный алгоритм пересчета газодинамических величин на новую сетку предусматривает вычисление вкладов соответствующих интегральных величин со старой сетки. Для вычисления интегральных вкладов ищутся многоугольники пересечения вложенных четырехугольников старой и новой сеток. Поскольку новые значения плотности вычисляются не только в ячейках, но и отдельно в каждом вложенном четырехугольнике  $C^{j_{in-1/2, kn-1/2}}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $in = 2, 3, \dots, N_{in}$ ,  $kn = 2, 3, \dots, N_{kn}$ ) новой сетки, то именно вложенные четырехугольники на старой и новой сетках являются основными геометрическими объектами, для которых ищутся многоугольники пересечения.

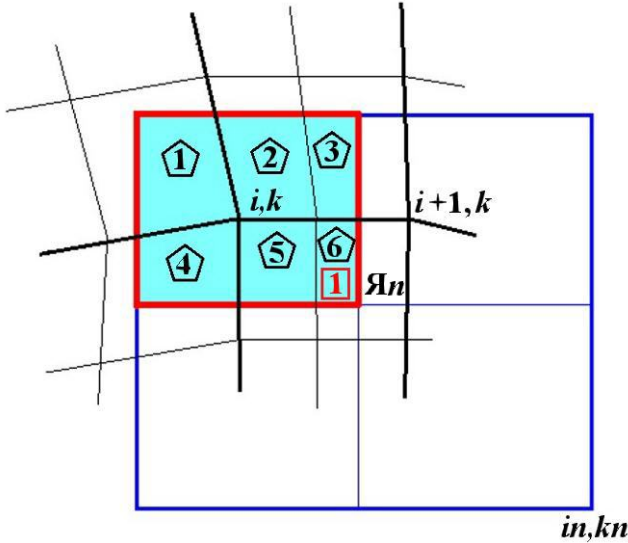


Рис. 2. Многоугольники пересечения вложенных четырехугольников старой сетки с вложенным четырехугольником  $C^{1_{Яn}}$  новой сетки

Пусть для некоторого вложенного четырехугольника  $C^{j_{Яn}} \in \Omega_{Яn}$  в ячейке новой сетки построены все многоугольники  $\varpi_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, N_{(j, Яn)}$ , каждый из которых является непустым пересечением данного четырехугольника с одним из вложенных четырехугольников старой сетки. На рис. 2 многоугольники пересечения пронумерованы от 1 до 6, контур вложенного четырехугольника  $C^{1_{Яn}}$  новой сетки выделен красным цветом. В каждом многоугольнике пересечения  $\varpi_p$  определены свои значения плотности, энергии и скорости, полученные после лагранжева этапа счета шага по времени.

Множество многоугольников пересечения  $\varpi_p$  с определенными значениями газодинамических величин можно рассматривать как компоненты гетерогенной смеси, содержащейся во вложенном четырехугольнике новой сетки:  $\varpi_p \in C^{j_{Яn}}$ . Межкомпонентные обмены в такой искусственной дискретной многофазной среде обусловлены выравниванием

удельных значений величин компонентов в результате пересчета величин. Такая ситуация наводит на мысль об аналогии глобального пересчета величин с межкомпонентными обменами в многофазной многоскоростной среде.

### Уравнения межкомпонентных обменов в континуальной многофазной среде

Процессы межкомпонентного обмена для многофазного многоскоростного континуума описываются следующими уравнениями [9]:

1. Обмены массами:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_q}{\partial t} = \sum_{p=1}^{N_p} \Gamma_{pq}, \quad q = 1, 2, \dots, N_p. \quad (3)$$

Здесь и далее  $\bar{\rho}_q$  — приведенная плотность вещества фазы с номером  $q$ . Она обозначает массу  $q$ -го вещества в единице объема смеси. Символом  $\rho_q$  обозначается истинная плотность  $q$ -го вещества, т. е. масса  $q$ -го вещества в единице объема  $q$ -го вещества. Истинная и приведенная плотности связаны равенством

$$\bar{\rho}_q = \alpha_q \rho_q, \quad (4)$$

где  $\alpha_q$  — объемная концентрация вещества  $q$ -й фазы в объеме смеси,  $\sum_{p=1}^{N_p} \alpha_p = 1$ .

Величины  $\Gamma_{pq}$  в уравнении (3) характеризуют интенсивность обмена массами между компонентами с номерами  $p$  и  $q$ . При этом для сохранения массы должно выполняться равенство  $\Gamma_{pq} = -\Gamma_{qp}$  ( $\Gamma_{pp} \equiv 0$ ).

2. Обмены импульсами:

$$\frac{\partial (\bar{\rho}_q \vec{U}_q)}{\partial t} = \sum_{p=1}^{N_p} \vec{F}_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p} (\Gamma_{pq} \vec{U}_{pq}^\Gamma), \quad q = 1, 2, \dots, N_p. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{F}_{pq}$  — межфазная сила, соответствующая обмену импульсами, например, сила трения, обусловленная скоростной неравновесностью фаз. В соответствии с законом сохранения импульса  $\vec{F}_{pq} = -\vec{F}_{qp}$ , ( $\vec{F}_{pp} \equiv 0$ ). Кроме того, обмен импульсами происходит за счет перехода массы из одной фазы в другую. Так, при переходе массы из фазы с номером  $p$  в фазу с номером  $q$  вместе с ней уходит импульс  $\Gamma_{pq} \vec{U}_{pq}^\Gamma$ , где  $\vec{U}_{pq}^\Gamma$  — скорость, отнесенная к переходящей массе. Предполагается, что  $\vec{U}_{pq}^\Gamma = \vec{U}_{qp}^\Gamma$ .

3. Обмены энергиями:

$$\frac{\partial (\bar{\rho}_q e_q)}{\partial t} = \sum_{p=1}^{N_p} W_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p} (\vec{F}_{pq} \cdot \vec{U}_{pq}^F) + \sum_{p=1}^{N_p} \Gamma_{pq} \left( E_{pq}^\Gamma + \frac{1}{2} (U_{pq}^\Gamma)^2 \right), \quad q = 1, 2, \dots, N_p. \quad (6)$$

Здесь  $e_q = E_q + \frac{1}{2} U_q^2$  — удельная полная энергия единицы массы компонента смеси с номером  $q$ ;  $W_{pq}$  — приток энергии в фазу с номером  $q$  за счет теплопередачи от фазы с номером  $p$ , и предполагается, что  $W_{pq} = -W_{qp}$  ( $W_{pp} \equiv 0$ );  $\vec{F}_{pq} \cdot \vec{U}_{pq}^F$  — работа межфазных сил  $\vec{F}_{pq}$ . Символ  $\vec{U}_{pq}^F$  обозначает усредненную межфазную скорость двух взаимодействующих фаз,  $\vec{U}_{pq}^F = b_{pq} \vec{U}_p + b_{qp} \vec{U}_q$ , где  $0 \leq b_{pq} \leq 1$ ,  $b_{pq} + b_{qp} = 1$ ; коэффициенты усреднения  $b_{pq}$ ,  $b_{qp}$  определяют долю кинетической энергии, диссипирующей в каждой из двух взаимодействующих фаз. Слагаемые  $\Gamma_{pq} \left( E_{pq}^\Gamma + \frac{1}{2} (U_{pq}^\Gamma)^2 \right)$  отвечают за перенос полной энергии вместе с переносом массы из фазы с номером  $p$  в фазу с номером  $q$ . Здесь  $E_{pq}^\Gamma$  — удельная внутренняя энергия массы, переходящей из фазы с номером  $p$  в фазу с номером  $q$ , и предполагается, что  $E_{pq}^\Gamma = E_{qp}^\Gamma$ .

Из уравнения (5) с помощью (3) получается уравнение для кинетической энергии отдельной фазы среды:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho}_q U_q^2 \right) = \sum_{p=1}^{N_p} \vec{F}_{pq} \cdot \vec{U}_q + \sum_{p=1}^{N_p} \Gamma_{pq} \left( \vec{U}_{pq}^\Gamma \cdot \vec{U}_q - \frac{1}{2} U_q^2 \right). \quad (7)$$

Вычитая уравнение (7) из уравнения для полной энергии (6), получим уравнение для удельной внутренней энергии компонента многофазной среды:

$$\frac{\partial (\bar{\rho}_q E_q)}{\partial t} = \sum_{p=1}^{N_p} W_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p} \vec{F}_{pq} \cdot (\vec{U}_{pq}^F - \vec{U}_q) + \sum_{p=1}^{N_p} \Gamma_{pq} \left[ E_{pq}^\Gamma + \frac{1}{2} (\vec{U}_{pq}^\Gamma - \vec{U}_q)^2 \right]. \quad (8)$$

Для того чтобы определить конкретную модель межкомпонентных взаимодействий многофазной среды, описываемых уравнениями (3)–(6), нужно задать следующие величины:

$$\Gamma_{pq}, \quad \vec{U}_{pq}^\Gamma, \quad E_{pq}^\Gamma, \quad \vec{F}_{pq}, \quad \vec{U}_{pq}^F, \quad W_{pq}. \quad (9)$$

Покажем, что можно определить величины из списка (9) так, чтобы процесс глобального пересчета величин описывался разностными аналогами уравнений (3)–(6) межкомпонентных обменов в многофазной среде.

### Разностное уравнение межкомпонентных обменов массами

Рассмотрим вычисление значений плотности в четырехугольниках, вложенных в ячейки новой сетки, в процессе пересчета величин.

Новое значение плотности  $\rho_j^{n+1}$  во вложенном четырехугольнике ячейки новой сетки  $Cj_{Я_n} \in \Omega_{Я_n}$  в процессе пересчета величин вычисляется по формуле

$$\rho_j^{n+1} = \frac{\sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} \rho_p V_p}{\sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} V_p}. \quad (10)$$

Здесь  $N(j, Я_n)$  — количество многоугольников пересечения  $\varpi_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, N(j, Я_n)$ , вложенного четырехугольника  $Cj_{Я_n}$  ячейки новой сетки  $\Omega_{Я_n}$  с вложенными четырехугольниками ячеек старой сетки;  $V_p$  — объемы многоугольников пересечения  $\varpi_p$ ;  $\rho_p$  — значения плотности в этих многоугольниках;  $\sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} V_p = V_j^{n+1}$  — объем вложенного четырехугольника  $Cj_{Я_n} \in \Omega_{Я_n}$ .

Вычисленное значение плотности  $\rho_j^{n+1}$  (10) относится ко всем многоугольникам пересечения  $\varpi_p \in Cj_{Я_n}$ , которые плотно заполняют весь объем вложенного четырехугольника. Поэтому можно считать, что  $\rho_j^{n+1}$  есть новое значение плотности  $\rho_p^{n+1} = \rho_j^{n+1}$  в каждом многоугольнике пересечения  $\varpi_p \in Cj_{Я_n}$ ,  $p = 1, 2, \dots, N(j, Я_n)$ . Тогда приращение плотности, полученной после лагранжева этапа счета шага, в некотором многоугольнике пересечения  $\varpi_q \in Cj_{Я_n}$  равно

$$\rho_q^{n+1} - \rho_q = \frac{\sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} \rho_p V_p}{V_j^{n+1}} - \rho_q = \frac{\sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} V_p (\rho_p - \rho_q)}{V_j^{n+1}}, \quad q = 1, 2, \dots, N(j, Я_n). \quad (11)$$

Соотношение (11) записано для истинных плотностей в многоугольниках пересечения  $\varpi_p \in Cj_{Я_n}$ . По аналогии с континуальной многофазной средой введем объемные концентрации  $\alpha_p$  многоугольников пересечения, равные занимаемым ими долям объема  $V_j^{n+1}$  вложенного четырехугольника  $Cj_{Я_n}$ . То есть положим

$$\alpha_p = \frac{V_p}{V_j^{n+1}}. \quad (12)$$

Приведенные плотности в многоугольниках пересечения  $\varpi_p \in Cj_{Я_n}$ , играющих роль компонентов искусственной многофазной среды, определяются формулой

$$\bar{\rho}_p = \alpha_p \rho_p. \quad (13)$$

Умножив равенство (11) на объемную концентрацию  $\alpha_q$  (12), получим приращение приведенной плотности (13) в многоугольнике  $\varpi_q \in Cj_{Я_n}$

$$\bar{\rho}_q^{n+1} - \bar{\rho}_q = \frac{\sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} V_q V_p (\rho_p - \rho_q)}{(V_j^{n+1})^2},$$

или

$$\frac{\bar{\rho}_q^{n+1} - \bar{\rho}_q}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N(j, Я_n)} \Gamma j_{pq}, \quad q = 1, 2, \dots, N(j, Я_n), \quad (14)$$

где  $\Gamma j_{pq}$  — интенсивность обмена массами между двумя многоугольниками пересечения  $\varpi_p \in Cj_{Я_n}$  и  $\varpi_q \in Cj_{Я_n}$ :

$$\Gamma j_{pq} = \frac{V_q V_p (\rho_p - \rho_q)}{\tau^{n+1/2} (V_j^{n+1})^2}. \quad (15)$$

Ясно, что  $\Gamma j_{pq} = -\Gamma j_{qp}$ .

Уравнение (14) есть разностный аналог уравнения обмена массами между компонентами многофазной континуальной среды.

Таким образом, показано, что вычисление новых значений плотности во вложенных четырехугольниках  $Cj_{Яn} \in \Omega_{Яn}$  в процессе глобального пересчета величин можно представить как процесс обменов массами в некоторой дискретной многофазной среде.

Точно так же вычисление плотности  $\rho_{Яn}^{n+1}$  в ячейке новой сетки  $\Omega_{Яn}$  по формуле

$$\rho_{Яn}^{n+1} = \sum_{p=1}^{N_p(Яn)} \rho_p V_p \Big/ \sum_{p=1}^{N_p(Яn)} V_p,$$

где  $N_p(Яn)$  — количество многоугольников пересечения  $\varpi_p$  ячейки новой сетки  $\Omega_{Яn}$  с вложенными четырехугольниками старой сетки, можно представить как обмен массами между компонентами дискретной многофазной среды:

$$\frac{\bar{\rho}_q^{n+1} - \bar{\rho}_q}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N_p(Яn)} \Gamma_{pq}^{(Яn)}.$$

Здесь  $\Gamma_{pq}^{(Яn)}$  — интенсивность обмена массами между двумя любыми многоугольниками пересечения  $\varpi_p \in \Omega_{Яn}$ ,  $\varpi_q \in \Omega_{Яn}$ :

$$\Gamma_{pq}^{(Яn)} = \frac{V_p V_q (\rho_p - \rho_q)}{\tau^{n+1/2} (V_{Яn})^2}; \quad (16)$$

$\sum_{p=1}^{N_p(Яn)} V_p = V_{Яn}$  — объем новой ячейки сетки.

Аналогично можно показать, что вычисление плотности в восьмиугольнике  $\Omega_{Yn} \equiv \Omega_{in, kn}$  (см. рис. 1) по формуле пересчета величин

$$\rho_{Yn}^{n+1} = \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} \rho_p V_p \Big/ \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} V_p,$$

где  $N_p(Yn)$  — количество многоугольников пересечения  $\varpi_p$  восьмиугольника  $\Omega_{Yn}$  с вложенными четырехугольниками старой сетки, представляется как обмен массами между компонентами многофазной среды:

$$\frac{\bar{\rho}_q^{n+1} - \bar{\rho}_q}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} \Gamma_{pq}^{(Yn)}, \quad q = 1, 2, \dots, N_p(Yn). \quad (17)$$

Здесь  $\Gamma_{pq}^{(Yn)}$  — интенсивность обмена массами между парой многоугольников пересечения  $\varpi_p \in \Omega_{Yn}$ ,  $\varpi_q \in \Omega_{Yn}$ :

$$\Gamma_{pq}^{(Yn)} = \frac{V_p V_q (\rho_p - \rho_q)}{\tau^{n+1/2} (V_{Yn})^2}; \quad (18)$$

$\sum_{p=1}^{N_p(Yn)} V_p = V_{Yn}$  — объем нового восьмиугольника.

### Разностное уравнение межкомпонентных обменов импульсами

Рассмотрим теперь вычисление скоростей в узлах новой сетки в процессе пересчета величин.

Согласно алгоритму пересчета величин новые значения вектора скорости  $\vec{U}_{Yn}^{n+1} = (u_{Yn}^{n+1}, v_{Yn}^{n+1})$  в узле  $\vec{Z}_{Yn}$  новой сетки вычисляются по формуле

$$\vec{U}_{Y_n}^{n+1} = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p \vec{U}_p^{(Y_n)}}{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p}, \quad (19)$$

где  $M_p$  — масса вещества в многоугольнике пересечения  $\varpi_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, N_p(Y_n)$ , восьмиугольника  $\Omega_{Y_n}$  с одним из вложенных четырехугольников старой сетки;  $\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p = M_{Y_n}^{n+1}$  — масса, отнесенная к узлу сетки  $\vec{Z}_{Y_n}$ , вычисляется в восьмиугольнике  $\Omega_{Y_n}$ .

Можно считать, что новые значения вектора скорости во всех многоугольниках пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$  равны новому значению скорости (19) в узле  $\vec{Z}_{Y_n}$ , т. е.

$$\vec{U}_q^{n+1} = \vec{U}_{Y_n}^{n+1}, \quad \forall q \in \{1, 2, \dots, N_p(Y_n)\}. \quad (20)$$

Здесь в отличие от скорости в узле  $\vec{U}_{Y_n}^{n+1}$  в обозначении скорости  $\vec{U}_q^{n+1}$  в многоугольнике пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$  индекс принадлежности узлу  $Y_n$  отсутствует. Это сделано для упрощения записи, поскольку номер узла  $Y_n$  пока не имеет значения. В данном разделе будем использовать подобную упрощенную запись и для межкомпонентных скоростей, а также для других величин, определенных в многоугольниках пересечения  $\varpi_p \in \Omega_{Y_n}$ ,  $p = 1, 2, \dots, N_p(Y_n)$ .

Исходя из (19), (20) приращение скорости в некотором многоугольнике  $\varpi_q$ , полученное в результате пересчета величин, можно записать в виде

$$\vec{U}_q^{n+1} - \vec{U}_q^n = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p \vec{U}_p^n}{M_{Y_n}^{n+1}} - \vec{U}_q^n = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p (\vec{U}_p^n - \vec{U}_q^n)}{M_{Y_n}^{n+1}}. \quad (21)$$

Отсюда вычислим приращение импульса в данном многоугольнике пересечения  $\varpi_q$ .

Но прежде, умножив разностное уравнение (17), выражающее интенсивность обмена массами в восьмиугольнике  $\Omega_{Y_n}$ , на объем восьмиугольника  $V_{Y_n}$ , получим уравнение для изменения массы многоугольника пересечения  $\varpi_q$ , расположенного в данном восьмиугольнике  $\Omega_{Y_n}$ :

$$M_q^{n+1} - M_q^n = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} V_p V_q (\rho_p - \rho_q)}{V_{Y_n}}. \quad (22)$$

Из уравнений (21), (22), используя очевидное тождество

$$f^{n+1} g^{n+1} - f^n g^n = f^n (g^{n+1} - g^n) + g^{n+1} (f^{n+1} - f^n), \quad (23)$$

получим выражение для приращения импульса в многоугольнике  $\varpi_q$ . Учитывая равенство (20), имеем:

$$M_q^{n+1} \vec{U}_q^{n+1} - M_q^n \vec{U}_q^n = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p M_q (\vec{U}_p^n - \vec{U}_q^n)}{M_{Y_n}^{n+1}} + \vec{U}_{Y_n}^{n+1} \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} V_p V_q (\rho_p - \rho_q)}{V_{Y_n}^{n+1}}.$$

Записывая это равенство в виде разностного аналога уравнения межфазных обменов импульсами, получим:

$$\frac{M_q^{n+1} \vec{U}_q^{n+1} - M_q^n \vec{U}_q^n}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} \vec{F}_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} \bar{\Gamma}_{pq} \vec{U}_{pq}^\Gamma, \quad (24)$$

где  $\vec{F}_{pq}$  — силы межфазного трения в искусственной многофазной среде, способствующие выравниванию скоростей в многоугольниках пересечения  $\varpi_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, N_p(Y_n)$ :

$$\vec{F}_{pq} = \frac{M_p M_q (\vec{U}_p^n - \vec{U}_q^n)}{\tau^{n+1/2} M_{Y_n}^{n+1}}. \quad (25)$$



Очевидно,  $\vec{F}_{pq} = -\vec{F}_{qp}$ .

Межкомпонентная скорость  $\vec{U}_{pq}^\Gamma$ , которая определяет импульс, переходящий вместе с массой

$$\bar{\Gamma}_{pq} = \Gamma_{pq}^{(Y_n)} V_{Y_n} \quad (26)$$

из многоугольника  $\varpi_p$  в многоугольник  $\varpi_q$ , равна

$$\vec{U}_{pq}^\Gamma = \vec{U}_{Y_n}^{n+1}. \quad (27)$$

Сеточная функция  $\Gamma_{pq}^{(Y_n)}$  в равенстве (26) определяется формулой (18).

Таким образом, вычисление скоростей в процессе глобального пересчета величин можно представить в виде обменов импульсами между многоугольниками пересечения  $\varpi_p \in \Omega_{Y_n}$ ,  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$ , которые рассматриваются как компоненты многофазной среды.

Исходя из формулы (21) для изменения скорости в узлах новой сетки, можно получить разностное уравнение для изменения кинетической энергии в многоугольнике  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$ . После умножения равенства (21) на усредненную по времени скорость

$$\vec{U}_q^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\vec{U}_q^{n+1} + \vec{U}_q^n) \quad (28)$$

имеем формулу

$$\frac{1}{2} (\vec{U}_q^{n+1})^2 - \frac{1}{2} (\vec{U}_q^n)^2 = \vec{U}_q^{n+1/2} \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} M_p (\vec{U}_p - \vec{U}_q)}{M_{Y_n}^{n+1}}.$$

Отсюда с помощью равенства (22) по аналогии с (24) получим уравнение для кинетической энергии, которое с учетом обозначений (25)–(27) запишется в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \frac{M_q^{n+1} (\vec{U}_q^{n+1})^2 - M_q (\vec{U}_q^n)^2}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} (\vec{F}_{pq} \cdot \vec{U}_q^{n+1/2}) + \sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} \left[ \bar{\Gamma}_{pq} \frac{1}{2} (\vec{U}_{pq}^\Gamma)^2 \right]. \quad (29)$$

### Уравнения для энергии компонентов искусственной многофазной среды

Далее представим способ вычисления удельной внутренней энергии в ячейке сетки  $\Omega_{Я_n}$  в процессе пересчета величин из условия сохранения интегральной внутренней энергии

$$\bar{E}_{Я_n} = \sum_{p=1}^{N_p(Я_n)} M_p E_p \Big/ \sum_{p=1}^{N_p(Я_n)} M_p. \quad (30)$$

При этом все многоугольники пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Я_n}$  приобретают одинаковые значения энергии

$$\bar{E}_q^{n+1} = \bar{E}_{Я_n}^{n+1}, \quad q = 1, 2, \dots, N_p(Я_n). \quad (31)$$

В соответствии с (30), (31) приращение удельной внутренней энергии некоторого многоугольника пересечения  $\varpi_q$  запишется в следующем виде:

$$\bar{E}_q^{n+1} - E_q = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(Я_n)} M_p (E_p - E_q)}{M_{Я_n}^{n+1}}, \quad (32)$$

где  $M_{Я_n}^{n+1}$  — масса ячейки сетки (1). Для вычисления приращения интегральной внутренней энергии в этом многоугольнике пересечения воспользуемся тождеством (23), равенством (32) и формулой для приращения массы (22):

$$M_q^{n+1} \bar{E}_q^{n+1} - M_q E_q = \frac{\sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} M_p M_q (E_p - E_q)}{M_{\mathcal{Y}_n}^{n+1}} + \bar{E}_{\mathcal{Y}_n}^{n+1} \frac{\sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} V_p V_q (\rho_p - \rho_q)}{V_{\mathcal{Y}_n}^{n+1}}. \quad (33)$$

Введем обозначения

$$W_{pq} = \frac{M_p M_q (E_p - E_q)}{\tau^{n+1/2} M_{\mathcal{Y}_n}^{n+1}}; \quad (34)$$

$$E_{pq}^\Gamma = \bar{E}_{\mathcal{Y}_n}^{n+1} \quad (35)$$

и запишем уравнение (33) в следующем виде:

$$\frac{M_q^{n+1} \bar{E}_q^{n+1} - M_q E_q}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} W_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} \bar{\Gamma}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)} E_{pq}^\Gamma, \quad (36)$$

где

$$\bar{\Gamma}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)} = \Gamma_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)} V_{\mathcal{Y}_n}; \quad (37)$$

$\Gamma_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)}$  в (37) определяется формулой (16). Функция  $W_{pq}$  обозначает приток энергии в многоугольник  $\varpi_q$  за счет передачи энергии от многоугольника  $\varpi_p$ ;  $E_{pq}^\Gamma$  (35) обозначает удельную внутреннюю энергию массы  $\bar{\Gamma}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)}$ , переходящей из многоугольника  $\varpi_p$  в многоугольник  $\varpi_q$ .

Чтобы получить уравнение для изменения полной энергии в многоугольнике  $\varpi_q \in \Omega_{\mathcal{Y}_n}$ , являющееся следствием пересчета величин, уравнение для внутренней энергии (36) сложим с уравнением для кинетической энергии (29), добавив в запись индекс принадлежности узлу  $\mathcal{Y}_n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{M_q^{n+1} \bar{E}_q^{n+1} - M_q E_q}{\tau^{n+1/2}} + \frac{1}{2} \frac{M_q^{n+1} (\vec{U}_q^{n+1})^2 - M_q (\vec{U}_q)^2}{\tau^{n+1/2}} = \\ & = \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} W_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} \bar{\Gamma}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)} E_{pq}^\Gamma + \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} \left[ \vec{F}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)} \cdot (\vec{U}_q^{(\mathcal{Y}_n)})^{n+1/2} \right] + \sum_{p=1}^{N_p(\mathcal{Y}_n)} \left[ \bar{\Gamma}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)} \frac{1}{2} (\vec{U}_{pq}^\Gamma)^2 \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

В это уравнение входят величины, определенные как в узлах, так и в ячейках сетки. Поэтому необходимо сделать следующее пояснение.

Любой многоугольник  $\varpi_q \in \Omega_{\mathcal{Y}_n}$ , для которого записано уравнение (38), является пересечением одного из четырех встроенных четырехугольников  $Cj_{\mathcal{Y}_n}$ ,  $j_{\mathcal{Y}_n} = 1, 2, 3, 4$ , расположенных в ячейке новой сетки, с некоторым встроеным четырехугольником старой сетки.

Величины  $\bar{\Gamma}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)}$  (26),  $\vec{U}_{pq}^\Gamma$  (27),  $\vec{F}_{pq}^{(\mathcal{Y}_n)}$  (25) в уравнении (38), определяющие модель межкомпонентных обменов дискретной многофазной среды, а также вектор скорости  $(\vec{U}_q^{(\mathcal{Y}_n)})^{n+1/2}$  (28), отнесенный к многоугольнику пересечения  $\varpi_q$ , связаны с узлами новой сетки  $\vec{Z}_{\mathcal{Y}_n}$ . В уравнении (38) индекс  $\mathcal{Y}_n$  используется вместо парных индексов узлов, в которых определены эти величины. В зависимости от того, в каком встроеном четырехугольнике  $Cj_{\mathcal{Y}_n} \in \Omega_{\mathcal{Y}_n}$  расположен рассматриваемый многоугольник пересечения  $\varpi_q$ ,  $\mathcal{Y}_n$  обозначает парный индекс одной из четырех вершин ячейки сетки  $\Omega_{\mathcal{Y}_n} \equiv \Omega_{in-1/2, kn-1/2}$ , который определяется по следующему правилу (см. рис. 1):

$$\mathcal{Y}_n = \begin{cases} (in - 1, kn - 1), & \text{если } j_{\mathcal{Y}_n} = 1; \\ (in, kn - 1), & \text{если } j_{\mathcal{Y}_n} = 2; \\ (in, kn), & \text{если } j_{\mathcal{Y}_n} = 3; \\ (n - 1, kn), & \text{если } j_{\mathcal{Y}_n} = 4. \end{cases} \quad (39)$$

Из условия (20) и равенства (27) для межфазной скорости  $\vec{U}_{pq}^{\Gamma(Yn)}$ , отвечающей за перенос импульса вместе с массой  $\bar{\Gamma}_{pq}^{(Yn)}$ , следует

$$\vec{U}_{pq}^{\Gamma(Yn)} = \vec{U}_q^{n+1}, \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, N_{p(Yn)}\}, \quad (40)$$

т. е. для всех многоугольников пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Yn}$  определяется одна и та же скорость  $\vec{U}_{pq}^{\Gamma(Yn)}$ .

Предположим, что для всех компонентов многофазной континуальной среды также определена одна и та же скорость  $\vec{U}_{pq}^{\Gamma}$ , т. е. имеет место равенство

$$\vec{U}_{pq}^{\Gamma} = \vec{U}_q, \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, N_p\},$$

дискретным аналогом которого является равенство (40). Тогда, очевидно, разностное уравнение (29) аппроксимирует дифференциальное уравнение (7), описывающее изменение кинетической энергии компонента многофазного континуума.

Однако разностное уравнение (36) изменения внутренней энергии многоугольника  $\varpi_q \in \Omega_{Yn}$ , которое является следствием вычисления значений энергии в ячейках новой сетки из условия сохранения интегральной внутренней энергии на этапе пересчета величин, не аппроксимирует дифференциальное уравнение (8), описывающее изменение внутренней энергии отдельного компонента континуальной многофазной среды, даже в предположении (40).

Из сравнения уравнений (36) и (8) видно, что в уравнении (36) не хватает разностного аналога слагаемого  $\sum_{p=1}^{N_p} \vec{F}_{pq} \left( \vec{U}_{pq}^F - \vec{U}_q \right)$ , которое отвечает за диссипацию кинетической энергии в компоненте континуальной среды с номером  $q$ , возникающей под действием сил межфазного трения (25). Следовательно, разностное уравнение для полной энергии (38) также не является разностным аналогом уравнения (6) межфазного обмена энергиями между компонентами континуальной среды.

С другой стороны, на данный момент определились пять из шести величин в списке (9), задающих конкретную модель межкомпонентных взаимодействий многофазной среды. Ими являются:

- 1) сеточные функции  $\Gamma_{pq}^j$  (15),  $\Gamma_{pq}^{(Yn)}$  (16),  $\Gamma_{pq}^{(Yn)}$  (18), которые представляют собой массу, переходящую из компонента с номером  $p$  в компонент с номером  $q$  в процессе межфазных обменов в искусственной многофазной среде;
- 2) межфазная скорость  $\vec{U}_{pq}^{\Gamma(Yn)}$ , которая относится к массе  $\Gamma_{pq}^{(Yn)}$  и определяется равенством (27);
- 3) межфазная энергия  $E_{pq}^{\Gamma}$ , которая относится к массе  $\Gamma_{pq}^{(Yn)}$  и определяется равенством (35);
- 4) межфазные силы трения  $\vec{F}_{pq}^{\Gamma(Yn)}$ , которые определяются формулой (25);
- 5) интенсивность  $W_{pq}$  (34) межфазных обменов энергиями за счет теплопередачи.

Единственной величиной из списка (9), которая пока остается неопределенной, является межфазная скорость  $\vec{U}_{pq}^F$ . Пока только предположим, что она является средней между некоторыми значениями скорости, отнесенными к многоугольникам  $\varpi_p$  и  $\varpi_q$ . Конкретные значения  $\vec{U}_{pq}^F$  только определяют долю кинетической энергии, диссипирующей во внутреннюю энергию каждого из двух компонентов среды при их силовом взаимодействии [9].

Таким образом, можно считать, что конкретная модель межкомпонентных взаимодействий искусственной многофазной среды полностью определена. Это позволяет непосредственно записать разностный аналог уравнения обменов энергией (6) для некоторого многоугольника пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Yn}$ , в котором учтены все процессы, сопутствующие межфазным обменам:

$$\begin{aligned} & \frac{M_q^{n+1} E_q^{n+1} - M_q E_q}{\tau^{n+1/2}} + \frac{1}{2} \frac{M_q^{n+1} \left( \vec{U}_q^{n+1} \right)^2 - M_q \left( \vec{U}_q \right)^2}{\tau^{n+1/2}} = \\ & = \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} W_{pq} + \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} \Gamma_{pq}^{(Yn)} E_{pq}^{\Gamma} + \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} \left( \vec{F}_{pq}^{\Gamma(Yn)} \cdot \vec{U}_{pq}^F \right) + \sum_{p=1}^{N_p(Yn)} \left[ \bar{\Gamma}_{pq}^{(Yn)} \frac{1}{2} \left( \vec{U}_{pq}^{\Gamma(Yn)} \right)^2 \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

Индекс узла сетки  $Y_n$  здесь, как и в уравнении (38), определяется по правилу (39).

Чтобы сравнить уравнение (41) с уравнением для изменения полной энергии (38), полученным как следствие пересчета величин в предположении сохранения интегральной внутренней энергии, предположим, что эти уравнения записаны для одного и того же многоугольника  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$ . После вычитания уравнения (38) из уравнения (41) получим

$$\frac{M_q^{n+1} E_q^{n+1} - M_q^{n+1} \bar{E}_q^{n+1}}{\tau^{n+1/2}} = \sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} \vec{F}_{pq}^{(Y_n)} \cdot \left[ \vec{U}_{pq}^{F(Y_n)} - \left( \vec{U}_q^{(Y_n)} \right)^{n+1/2} \right]. \quad (42)$$

Для пар многоугольников пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$ ,  $\varpi_p \in \Omega_{Y_n}$  определим межфазные скорости  $\vec{U}_{pq}^{F(Y_n)}$  в правой части (41) формулой

$$\vec{U}_{pq}^{F(Y_n)} = b_{pq} \left( \vec{U}_p^{(Y_n)} \right)^{n+1/2} + b_{qp} \left( \vec{U}_q^{(Y_n)} \right)^{n+1/2}, \quad (43)$$

где  $0 \leq b_{pq} \leq 1$ ,  $b_{pq} + b_{qp} = 1$ ;  $\left( \vec{U}_p^{(Y_n)} \right)^{n+1/2}$ ,  $\left( \vec{U}_q^{(Y_n)} \right)^{n+1/2}$  — среднеарифметические по времени скорости (28) в этих многоугольниках. Учитывая межфазную скорость (43), а также (20), выпишем подробнее слагаемые в правой части уравнения (42):

$$\begin{aligned} \vec{F}_{pq}^{(Y_n)} \cdot \left[ \vec{U}_{pq}^{F(Y_n)} - \left( \vec{U}_q^{(Y_n)} \right)^{n+1/2} \right] &= \vec{F}_{pq}^{(Y_n)} \cdot b_{pq} \left[ \left( \vec{U}_p^{(Y_n)} \right)^{n+1/2} - \left( \vec{U}_q^{(Y_n)} \right)^{n+1/2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} b_{pq} \vec{F}_{pq}^{(Y_n)} \cdot \left( \vec{U}_p^{(Y_n)} - \vec{U}_q^{(Y_n)} \right). \end{aligned}$$

Теперь, учитывая формулу для сил трения (25) и полагая коэффициенты в (43) равными  $b_{pq} = b_{qp} = 1/2$ , запишем уравнение (42) в следующем виде:

$$\frac{M_q^{n+1} \left( E_q^{n+1} - \bar{E}_q^{n+1} \right)}{\tau^{n+1/2}} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{N_p(Y_n)} \frac{M_p M_q \left( \vec{U}_p^{(Y_n)} - \vec{U}_q^{(Y_n)} \right)^2}{M_{(Y_n)}^{n+1}}. \quad (44)$$

Уравнение (44) описывает изменение внутренней энергии в многоугольнике пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$  по сравнению с энергией, вычисленной по интегральным вкладам внутренней энергии. Это изменение связано с диссипацией кинетической энергии в правой части (44) во внутреннюю энергию, которая возникает вследствие работы межфазных сил трения.

### Вычисление удельной внутренней энергии в ячейке сетки

Для того чтобы вычислить соответствующее изменение внутренней энергии во всей ячейке сетки  $\Omega_{Y_n}$ , нужно вычислить суммарный по всем многоугольникам пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$  вклад кинетической энергии в эту ячейку. При этом нужно учитывать, что изначально кинетическая энергия относится к узлам сетки.

Каждый многоугольник пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$  расположен в некотором встроенном в ячейку четырехугольнике,  $\varpi_q \in Cj_{Y_n}$ , с номером  $j_{Y_n} = 1, 2, 3, 4$  (см. рис. 1). При этом  $Cj_{Y_n} \in \Omega_{Y_n}$ , и в то же время  $Cj_{Y_n} \in \Omega_{Y_n}$ .

При вычислении диссипирующей в рассматриваемом многоугольнике кинетической энергии суммирование в правой части (44) производится по всем многоугольникам  $\varpi_p$ , расположенным в восьмиугольнике  $\Omega_{Y_n}$ , а не только по тем из них, которые расположены в ячейке  $\Omega_{Y_n}$ . Поэтому, чтобы учесть все парные взаимодействия между многоугольниками  $\varpi_q$  и  $\varpi_p$ , суммирование кинетических энергий в каждой из четырех вершин  $\bar{Z}_{Y_n}$  ячейки  $\Omega_{Y_n}$  в правой части (44) также производится по всем многоугольникам пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{Y_n}$ .

После этого суммарная кинетическая энергия, определенная в каждом восьмиугольнике  $\Omega_{Y_n}$ , распределяется между ячейками сетки, например, пропорционально массам встроенных четырехугольников, для которых узел сетки  $\vec{Z}_{Y_n}$  является общей вершиной. В левой части (44) производится простое суммирование по индексу  $q = 1, 2, \dots, N_p(Y_n)$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n} (E_{Y_n}^{n+1} - \bar{E}_{Y_n}) = & \frac{1}{4} \left\{ \frac{M1_{Y_n}^{n+1}}{\left(M_{in-1, kn-1}^{n+1}\right)^2} \sum_{q=1}^{N_p(in-1, kn-1)} \left[ \sum_{p=1}^{N_p(in-1, kn-1)} M_p M_q \left(\vec{U}_p - \vec{U}_q\right)^2 \right] + \right. \\
 & + \frac{M2_{Y_n}^{n+1}}{\left(M_{in, kn-1}^{n+1}\right)^2} \sum_{q=1}^{N_p(in, kn-1)} \left[ \sum_{p=1}^{N_p(in, kn-1)} M_p M_q \left(\vec{U}_p - \vec{U}_q\right)^2 \right] + \\
 & + \frac{M3_{Y_n}^{n+1}}{\left(M_{in, kn}^{n+1}\right)^2} \sum_{q=1}^{N_p(in, kn)} \left[ \sum_{p=1}^{N_p(in, kn)} M_p M_q \left(\vec{U}_p - \vec{U}_q\right)^2 \right] + \\
 & \left. + \frac{M4_{Y_n}^{n+1}}{\left(M_{in-1, kn}^{n+1}\right)^2} \sum_{q=1}^{N_p(in-1, kn)} \left[ \sum_{p=1}^{N_p(in-1, kn)} M_p M_q \left(\vec{U}_p - \vec{U}_q\right)^2 \right] \right\}. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Формула (45) совпадает с формулой, представленной в работе [5]. Она эквивалентна вычислению новых значений удельной внутренней энергии исходя из сохранения интегральной внутренней энергии с добавлением дефицита кинетической энергии на новой сетке, что обеспечивает сохранение полной энергии на этапе пересчета величин. Дефицит кинетической энергии вычисляется как разность между кинетической энергией, вычисленной по вкладам кинетической энергии со старой сетки, и кинетической энергией, вычисленной по новым скоростям.

### Тестовые расчеты

Рассматривается задача о распространении сферической ударной волны, возникающей в результате сильного точечного взрыва. Аналитическое решение этой задачи было получено и опубликовано Л. И. Седовым в 1946 году. Постановка и решение задачи изложены, например, в книгах [10, 11].

Численные расчеты проводились в следующей постановке, взятой из работы [5].

Геометрия задачи представляет собой шаровую область  $0 \leq R \leq R_\Gamma$ , заполненную газом с начальной плотностью  $\rho^0 = 1$  и уравнением состояния  $P = (\gamma - 1) \rho E$  со значением  $\gamma = 1,4$ . Начальный радиус области энерговыделения равен  $R_E(0) = 0,01$ . Полная энергия, выделенная в массе газа, расположенного в области  $0 < R < 0,01$ , полагалась равной  $J^{(0)} = 0,850155546$ .

Согласно аналитическому решению при таком значении полной энергии радиус фронта ударной волны на момент времени  $t = 1$  равен  $R_{УВ} = 1$ , и при этом скорость ударной волны  $D_{УВ} = 0,4$ . Непосредственно за фронтом ударной волны на этот момент времени имеют место следующие значения параметров: радиальная скорость газа  $U^{(1)} = 1/3$ , давление  $P^{(1)} = 4/30$ , плотность  $\rho^{(1)} = 6$  (значение  $\rho^{(1)}$  не зависит от времени). Внешний радиус области рассматриваемого течения полагался равным  $R_\Gamma = 1,1$ . Заданное значение полной энергии определяет начальное значение удельной внутренней энергии единицы массы в области  $0 < R < 0,01$ , равное  $E^0 = 202\,959,686314$ .

Все расчеты данной задачи проводились в двумерной постановке на радиальной сетке с шагом по углу, равным  $h_\theta = 2,5^\circ$ . Начальный шаг сетки по радиусу  $h_R^0$  варьировался. Были проведены серии расчетов на сгущающихся сетках со значениями  $h_R^0 = 0,01; 0,005; 0,0025$ . При каждом сгущении сетки по радиусу сгущались только счетные интервалы в области  $0,01 < R < 1,1$ . В области начального мгновенного энерговыделения  $0 < R < 0,01$  во всех расчетах брался один счетный интервал по радиусу. Перестроение сетки на эйлеровом этапе счета шага по времени также производилось только в области без энерговыделения. Граница области энерговыделения во всех расчетах оставалась лагранжевой, т. е. перемещалась вместе с веществом вдоль лагранжевой траектории. Начальный шаг по времени во всех расчетах брался равным  $\tau = 10^{-7}$ .

Расчеты, результаты которых показаны на рис. 3, проводились по программам методики ВКЛ [6, 7] с подключением программы перестроения сетки и пересчета величин на каждом шаге по времени. При каждом перестроении сетка в радиальном направлении строилась равномерным разбиением по радиусу интервала  $R_E(t) < R < 1,1$ , где  $R_E(t)$  — текущий радиус границы области энерговыделения. На этапе пересчета величин дефицит кинетической энергии, который определяется разницей между кинетической энергией на новой сетке, полученной по вкладам со старой сетки, и кинетической энергией, вычисленной по новым скоростям, добавляется к интегральной внутренней энергии.

Из рис. 3 видно, что с увеличением числа точек сетки численное решение сходится к аналитическому решению. Профили величин, полученные на самой подробной из рассмотренных сеток, на взгляд автора, удовлетворительно согласуются с точным решением. Положение фронта ударной волны с учетом "размазывания" разрыва во всех трех расчетах также находится в удовлетворительном согласии с точным решением.

Расчеты, результаты которых приведены на рис. 4, отличаются от расчетов, представленных на рис. 3, тем, что они выполнены с вычислением значений удельной внутренней энергии на этапе пересчета величин из условия сохранения интегральной внутренней энергии, без учета поправок, связанных с дефицитом кинетической энергии. По результатам этих расчетов также можно констатировать сходимость численного решения к аналитическому решению. Но эта сходимость носит иной характер, и она гораздо медленнее, чем в расчетах, представленных на рис. 3. Положение фронта ударной волны, даже в расчете на самой подробной сетке, значительно отличается от точного решения.

Заметим, что алгоритм пересчета величин методики ВКЛ можно рассматривать как разностную схему с аппроксимацией конвективных слагаемых методом *против потока*. Эта схема формально имеет первый порядок аппроксимации по пространственным переменным в обоих вариантах вычисления внутренней энергии: и с поправками, и без поправок. Тем не менее, как видно из сравнения результатов на рис. 3 и рис. 4, вычисление новых значений удельной внутренней энергии на основе сохранения интегральной внутренней энергии с учетом поправок, связанных с дефицитом кинетической энергии на новой сетке, существенно улучшает точность расчетов.

## Заключение

Пересчет газодинамических величин на эйлеровом этапе счета шага по времени в лагранжево-эйлеровых методиках представлен как межкомпонентные обмены в некоторой искусственной многофазной среде. Компоненты этой среды заключены в многоугольниках пересечения  $\varpi_q$  встроенных в ячейки сетки четырехугольников новой и старой сеток. В них определены значения газодинамических величин, полученные после лагранжева этапа счета шага по времени. Межкомпонентные обмены обусловлены выравниванием удельных значений величин в многоугольниках  $\varpi_q$ , принадлежащих одному встроенному четырехугольнику (для плотностей), одной ячейке сетки (для энергии), одному объему интегрирования импульса (для скорости) новой сетки, в процессе пересчета величин.

Последовательный учет всех процессов в такой среде, сопутствующих межкомпонентному обмену массами, импульсами и энергиями, проведенный по аналогии с континуальной многофазной многоскоростной средой, приводит к разностному уравнению для удельной внутренней энергии компонента искусственной многофазной среды. В это уравнение входит слагаемое, описывающее диссипацию кинетической энергии, связанную с действием эффективных сил межкомпонентного трения, возникающих вследствие выравнивания скоростей в многоугольниках пересечения  $\varpi_q \in \Omega_{in, kn}$ . Отсюда получается разностное уравнение для значений удельной внутренней энергии в ячейках новой сетки. Оно совпадает с уравнением, представленным в работе [5], и эквивалентно вычислению новых значений удельной внутренней энергии с добавлением дефицита кинетической энергии на новой сетке к интегральной внутренней энергии [5], что обеспечивает сохранение полной энергии на этапе пересчета величин.

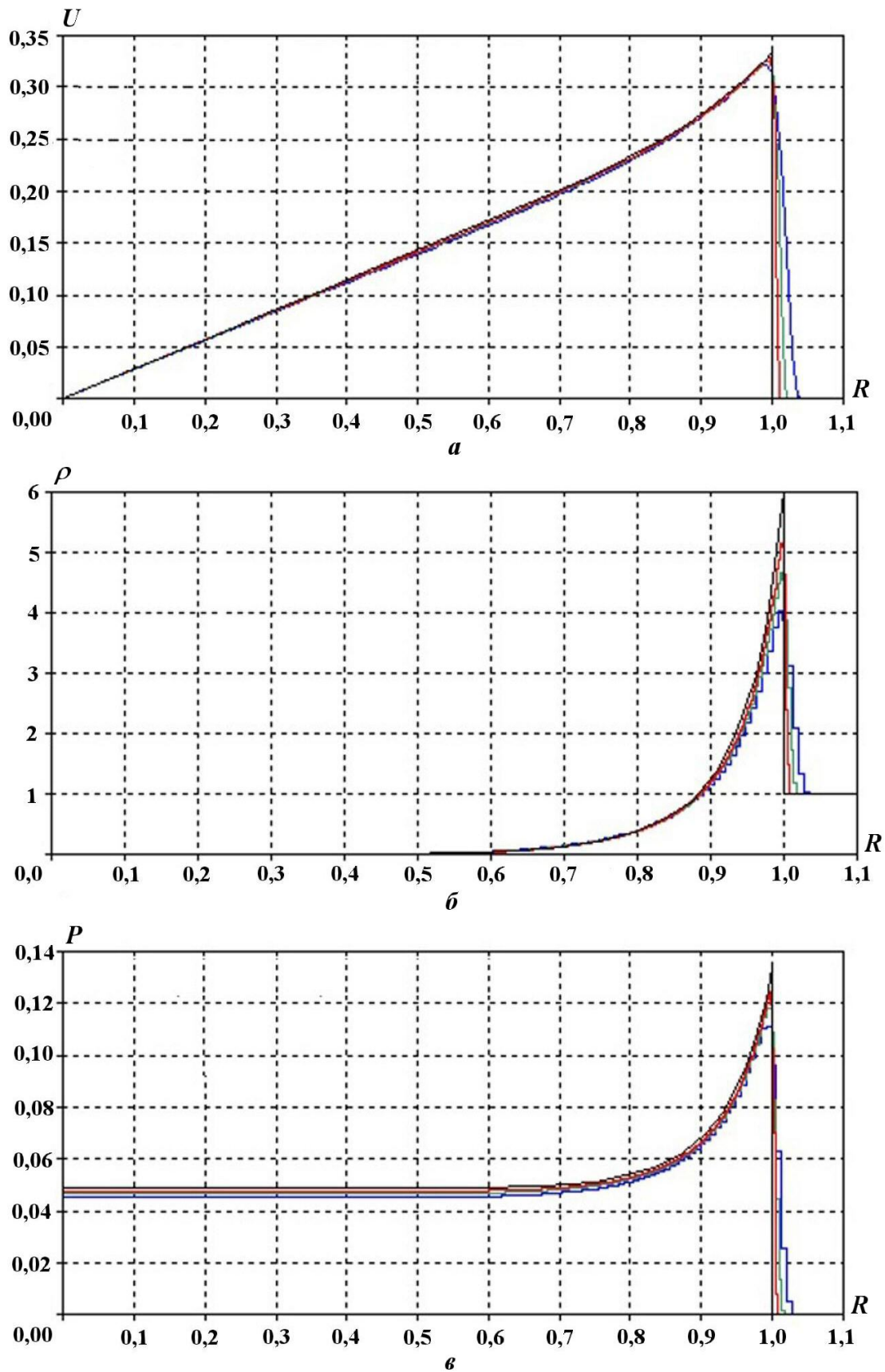


Рис. 3. Профили скорости (а), плотности (б), давления (в) в расчетах на сходимость с пересчетом величин на каждом шаге по времени,  $t = 1$ : —  $h_R^0 = 0,01$ ; —  $h_R^0 = 0,005$ ; —  $h_R^0 = 0,0025$ ; — — аналитическое решение

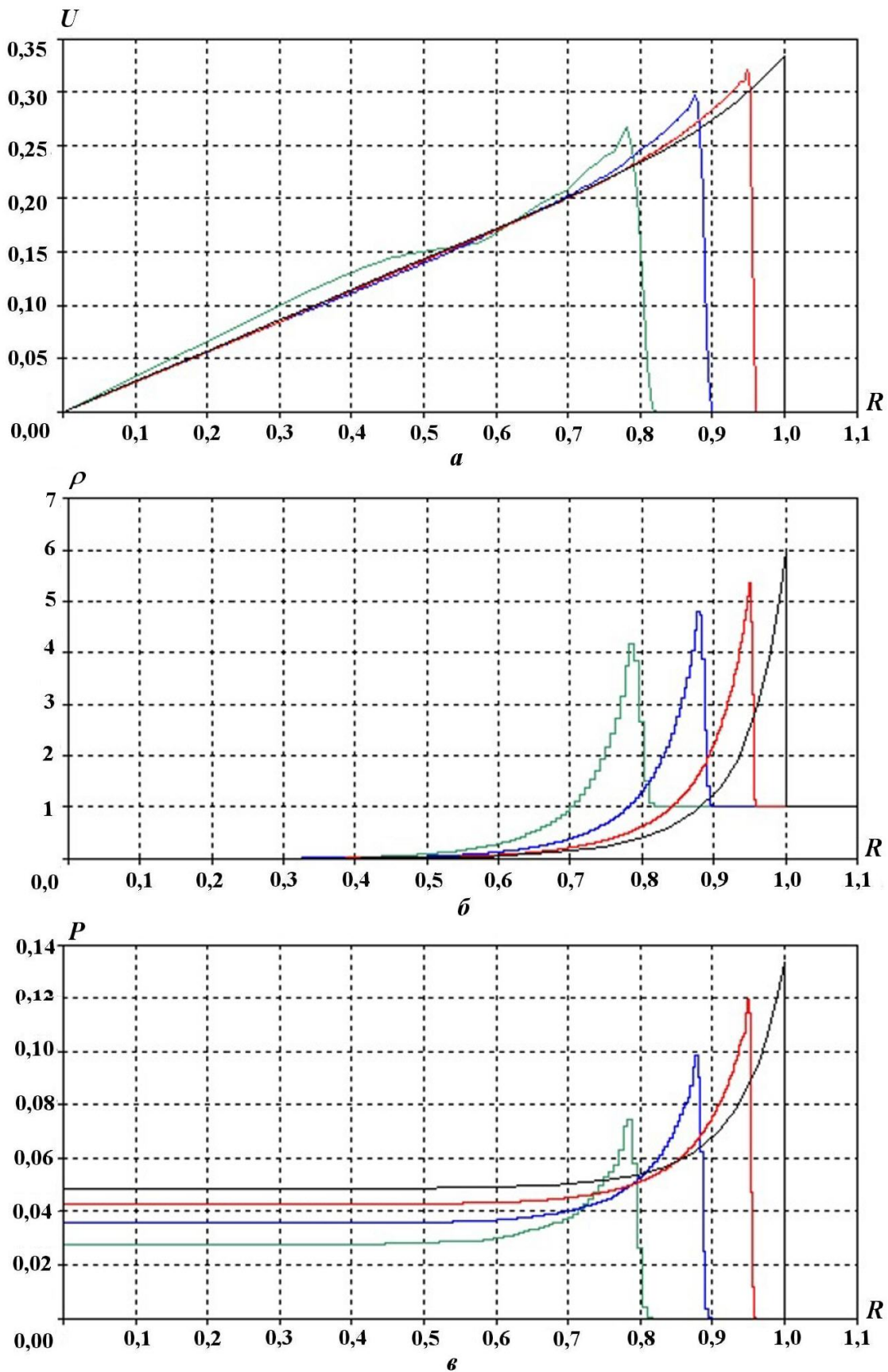


Рис. 4. Профили скорости ( $a$ ), плотности ( $\bar{\rho}$ ), давления ( $\bar{p}$ ) в расчетах с пересчетом удельной внутренней энергии без поправок,  $t = 1$ : —  $h_R^0 = 0,01$ ; —  $h_R^0 = 0,005$ ; —  $h_R^0 = 0,0025$ ; — — аналитическое решение



### Список литературы

1. Хёрт С. Произвольный лагранжево-эйлеров численный метод // Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 156—164.  
*Khert S. Proizvolny lagranzhevo-eylerov chislenny method // Chislennye metody v mekhanike zhidkostey. M.: Mir, 1973. S. 156—164.*
2. Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J. L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14, No 3. P. 227—253.
3. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271—306.  
*Godunov S. K. Raznostny metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy uravneniy gidrodinamiki // Matematicheskiy sbornik. 1959. T. 47, № 3. S. 271—306.*
4. Бондаренко Ю. А., Башуров В. В., Янилкин Ю. В. Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы: Препринт № 88-2003. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.  
*Bondarenko Yu. A., Bashurov V. V., Yanilkin Yu. V. Matematicheskie modeli i chislennye metody dlya resheniya zadach nestatsionarnoy gazovoy dinamiki. Obzor zarubezhnoy literatury: Preprint N 88-2003. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2003.*
5. Стенин А. М. Консервативный пересчет величин в разностных схемах газовой динамики на лагранжево-эйлеровой сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 2. С. 3—16.  
*Stenin A. M. Konservativny pereschet velichin v raznostnykh skhemakh gazovoy dinamiki na lagranzhevo-eylerovoy setke // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser.: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2019. Vyp. 2. S. 3—16.*
6. Стенин А. М., Бондаренко Ю. А., Матвеев Ю. М., Сараев В. А., Трофимова Л. Я. Методика расчета газодинамических течений с выделением контактных границ между веществами, не совпадающих с линиями сетки (методика ВКЛ) // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики. Тез. докл. 11-й Всерос. конф., посвященной памяти К. И. Бабенко / Под ред. А. В. Забродина, А. М. Молчанова, В. М. Тихомирова. Пущино, 5—9 октября 1996 г. Пущино, 1996. С. 65.  
*Stenin A. M., Bondarenko Yu. A., Matveev Yu. M., Saraev V. A., Trofimova L. Ya. Metodika rascheta gazodinamicheskikh techeniy s vydeleniem kontaktnykh granits mezhdru veshchestvami, ne sovpadayushchikh s liniyami setki (metodika VKL) // Teoreticheskie osnovy i konstruirovanie chislennykh algoritmov resheniya zadach matematicheskoy fiziki. Tez. dokl. 11-y Vseros. konf., posvyashchennoy pamyati K. I. Babenko / Pod red. A. V. Zabrodina, A. M. Molchanova, V. M. Tikhomirova. Pushchino, 5—9 oktyabrya 1996 g. Pushchino, 1996. S. 65.*
7. Стенин А. М., Спиридонов В. Ф., Воронина Е. Б., Шкарубский В. В. Методика ЛЭГАК-ВКЛ численного моделирования двумерных газодинамических течений многокомпонентных сред с выделением контактных границ, не совпадающих с линиями сетки // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2010. Вып. 15. С. 154—169.  
*Stenin A. M., Spiridonov V. F., Voronina E. B., Shkarubskiy V. V. Metodika LEGAK-VKL chislennogo modelirovaniya dvumernykh gazodinamicheskikh techeniy mnogokomponentnykh sred s vydeleniem kontaktnykh granits, ne sovpadayushchikh s liniyami setki // Trudy RFYaTs-VNIIEF. 2010. Vyp. 15. S. 154—169.*
8. Головизнин В. М., Рязанов М. А., Самарский А. А., Сороковикова О. С. Разностные схемы со сбалансированными аппроксимациями конвективных потоков: Препринт № 56. М.: ИПМ АН СССР, 1984.  
*Goloviznin V. M., Ryazanov M. A., Samarskiy A. A., Sorokovikova O. S. Raznostnye skhemy so sbalansirovannymi approssimatsiyami konvektivnykh potokov: Preprint N 56. Moskva: IPM AN SSSR, 1984.*

9. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.  
*Nigmatulin R. I.* Dinamika mnogofaznykh sred. Ch. 1. M.: Nauka, 1987.
10. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: ГИТТЛ, 1957.  
*Sedov L. I.* Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. M.: GITTL, 1957.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.  
*Landau L. D., Lifshits E. M.* Teoreticheskaya fizika. T. VI. Hidrodinamika. M.: Nauka, 1986.

Статья поступила в редакцию 15.02.21.

REGRIDDING IN DIFFERENCE GAS DYNAMIC SCHEMES REPRESENTED AS INTER-COMPONENT EXCHANGES IN A MULTIPHASE MEDIUM / A. M. Stenin (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

A global algorithm of recalculating gas dynamic quantities to a new grid (regridding algorithm) provides the calculation of contributions of the corresponding integral quantities from the old grid. To calculate the integral contributions, searching for the old/new grid overlap polygons is performed. The paper shows that such regridding algorithm can be represented as exchanges between components in some artificial multiphase medium. In this case, successive consideration of all the medium processes associated with mass, momentum, and energy exchanges and performed in a similar way, as for the continual multiphase multi-velocity medium, inevitably leads to the specific internal energy calculation with amendments because of the kinetic energy deficiency in the new space grid.

*Key words:* gas dynamics, Lagrangian-Eulerian coordinates, global regridding algorithm, a multiphase medium, inter-component exchanges, Sedov explosion.

---