

УДК 519.6+537.5

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕНЕРАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА В ПОЛОСТИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

И. В. Долженков, Н. А. Кравец, А. В. Солдатов, Е. С. Столмакова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлено описание метода расчета электродинамики в полости эллипсоида вращения, основанного на численном решении трехмерных однородных уравнений Максвелла, записанных в эллиптических координатах.

Источники электромагнитного поля задаются в виде эффективных граничных условий на внутренней поверхности эллипсоида. На оси симметрии эллипсоида используются естественные граничные условия: 1) компоненты электрического и магнитного полей должны оставаться ограниченными; 2) составляющие векторов электрического и магнитного полей, направленные вдоль оси симметрии, не должны зависеть от азимутального угла.

Аппроксимирующие формулы для пространственных производных выведены на основе интегральных следствий уравнений Максвелла, записанных для элементарных ячеек разностной сетки. При аппроксимации производных по времени использован метод покоординатного расщепления. Полученные уравнения на каждом этапе решаются методом прогонки.

Применимость и точность метода проиллюстрированы на расчетах представительной тестовой задачи, имеющей аналитическое решение.

Ключевые слова: сверхширокополосное электромагнитное излучение, эллиптическая система координат, уравнения Максвелла, численное моделирование.

Введение

Одной из схем генерации сверхширокополосного электромагнитного излучения (СШП ЭМИ) является способ, основанный на излучении ЭМИ при быстрой разрядке вакуумного фотодиода потоками электронов, возникающих при катодной фотоэмиссии. Синхронизованное излучение возникает, если диоду придать форму поверхности вращения второго порядка (параболоида или эллипсоида), а источник квантов разместить в фокусе [1]. При этом можно добиться условий, когда электроны в основном прижаты к поверхности катода и их как источники электромагнитного поля можно описывать эффективными граничными условиями [2].

В работе [3] представлено описание метода расчета электродинамики параболической полости, основанного на численном решении трехмерных однородных уравнений Максвелла. Уравнения записаны в параболической системе координат, что позволяет задавать граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля на внутренней поверхности параболоида. Использование таких эффективных граничных условий [4] делают систему уравнений Максвелла однородной, что значительно упрощает ее решение.

Данный подход позволяет производить моделирование генерации и распространения СШП ЭМИ для излучателей, имеющих форму параболоида вращения.

Наряду с такими излучателями рассматривается вопрос о создании излучателей СШП ЭМИ, имеющих форму эллипсоида вращения с выходным окном, в которых источник лазерного излучения (зеркало соответствующей формы) расположен в одном из фокусов.

В этой конструкции реализуются следующие особенности излучения, привлекательные для использования в перспективных образцах генераторов:

- фокусировка СШП ЭМИ в локальной области вблизи фокуса, что необходимо в ряде применений генераторов, прежде всего в медицинских целях;
- пространственная конфигурация излучения на выходе, соответствующая точечному источнику, что оптимально для получения направленного излучения при использовании фокусирующей антенной системы;
- возможность каналирования СШП ЭМИ для использования в конструкциях с большой площадью поверхности (большой электрической емкостью) и сравнительно небольшой выходной апертурой, что важно для решения технологических проблем создания образцов.

При этом пространственная структура формирующегося ЭМИ представляет собой сферическую волну, сходящуюся ко второму фокусу, а затем расходящуюся от него (рис. 1).

Целью данной статьи является описание численной методики, предназначенной для моделирования процессов генерации и распространения СШП ЭМИ в системах с эллипсоидальной формой и демонстрация возможностей этой методики на примере решения тестовой задачи.

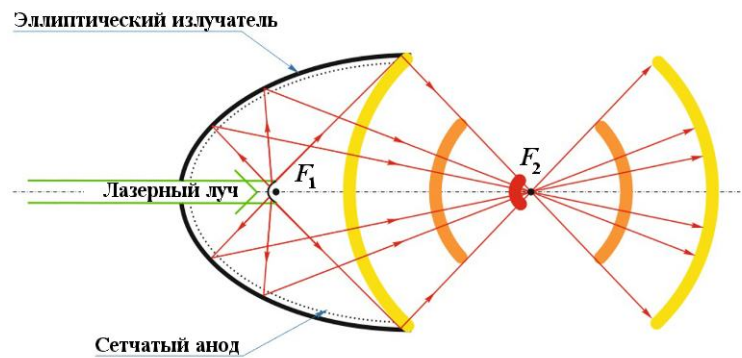


Рис. 1. Схема генерации СШП ЭМИ в эллиптическом излучающем модуле

Математическая постановка задачи

Уравнения Максвелла для вычисления полей в эллиптическом излучателе будем решать, используя эллиптическую систему координат (v, u, φ) (см., например, [5], где следует положить $\sigma \equiv v$, $\tau \equiv u$). Для записи уравнений в эллиптической системе воспользуемся выражением для ротора в физических координатах [5]:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = & \frac{1}{h_v h_u h_\varphi} \begin{vmatrix} h_v \vec{i}_v & h_u \vec{i}_u & h_\varphi \vec{i}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_v h_v & F_u h_u & F_\varphi h_\varphi \end{vmatrix} = \left[\frac{1}{a\sqrt{v^2 - u^2}} \frac{\partial (F_\varphi \sqrt{1 - u^2})}{\partial u} - \frac{1}{a\sqrt{(v^2 - 1)(1 - u^2)}} \frac{\partial F_u}{\partial \varphi} \right] \vec{i}_v + \\ & + \left[\frac{1}{a\sqrt{(v^2 - 1)(1 - u^2)}} \frac{\partial F_v}{\partial \varphi} - \frac{1}{a\sqrt{v^2 - u^2}} \frac{\partial (F_\varphi \sqrt{v^2 - 1})}{\partial v} \right] \vec{i}_u + \\ & + \frac{1}{a(v^2 - u^2)} \left[\sqrt{v^2 - 1} \frac{\partial (F_u \sqrt{v^2 - u^2})}{\partial v} - \sqrt{1 - u^2} \frac{\partial (F_v \sqrt{v^2 - u^2})}{\partial u} \right] \vec{i}_\varphi, \end{aligned}$$

где $h_v = a\sqrt{\frac{v^2 - u^2}{v^2 - 1}}$, $h_u = a\sqrt{\frac{v^2 - u^2}{1 - u^2}}$, $h_\varphi = a\sqrt{(v^2 - 1)(1 - u^2)}$ – коэффициенты Ламе; a – фокусное расстояние.

В принятой системе координат уравнения Максвелла для компонент напряженностей электрического (\vec{E}) и магнитного (\vec{H}) полей будут иметь вид (в системе единиц, где скорость света в вакууме $c = 1$)

$$\frac{\partial E_v}{\partial t} = \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial (H_\varphi \sqrt{1-u^2})}{\partial u} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial H_u}{\partial \varphi}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_u}{\partial t} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial H_v}{\partial \varphi} - \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-1}} \frac{\partial (H_\varphi \sqrt{v^2-1})}{\partial v}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (H_u \sqrt{v^2-u^2})}{\partial v} - \frac{1}{h_u \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (H_v \sqrt{v^2-u^2})}{\partial u}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_v}{\partial t} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial E_u}{\partial \varphi} - \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial (E_\varphi \sqrt{1-u^2})}{\partial u}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_u}{\partial t} = \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-1}} \frac{\partial (E_\varphi \sqrt{v^2-1})}{\partial v} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial E_v}{\partial \varphi}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{h_u \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (E_v \sqrt{v^2-u^2})}{\partial u} - \frac{1}{h_v \sqrt{v^2-u^2}} \frac{\partial (E_u \sqrt{v^2-u^2})}{\partial v}. \quad (6)$$

В этой системе φ – угол вращения относительно оси симметрии вытянутого эллипсоида, которой соответствуют следующие значения координат:

$$\begin{cases} v = 1, & -1 \leq u \leq 1; \\ u = \pm 1, & 1 \leq v \leq v_{\max}. \end{cases} \quad (7)$$

Область G изменения переменных v, u, φ определяется неравенствами

$$1 \leq v \leq v_{\max}; \quad -1 \leq u \leq 1; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8)$$

В плоскости $\varphi = \text{const}$ область G представляет собой систему софокусных эллипсов и гипербол с фокусами F, F' (рис. 2). Таким образом, сечение области, в которой требуется найти решение уравнений (1)–(6), в плоскости $\varphi = \text{const}$ имеет вид, показанный на рис. 3. На этом рисунке красным цветом обозначен контур эллиптического источника излучения. Его границы задаются координатами v_s и u_s .

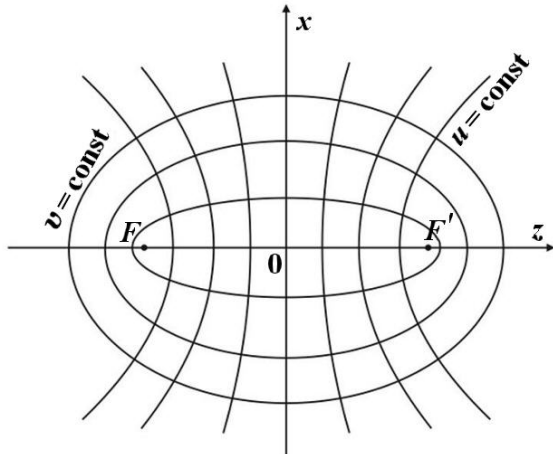


Рис. 2. Ортогональная система софокусных эллипсов и гипербол с фокусами F и F'

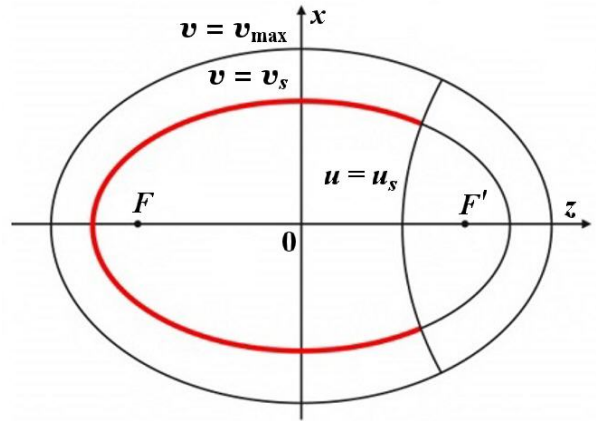


Рис. 3. Границы расчетной области в плоскости $\varphi = \text{const}$

В плоскости (v, u) границы расчетной области будут иметь вид, показанный на рис. 4.

При решении системы уравнений (1)–(6) ее необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В начальный момент времени $t = 0$ все компоненты E_n, H_n ($n = v, u, \varphi$) равны нулю.

Граничные условия следующие:

- на границе области $v = v_{\max}$ задаются условия излучения вида

$$E_u - H_\varphi = 0; \quad E_\varphi + H_u = 0;$$

- на внутренней поверхности эллиптического излучателя ($v = v_s, -1 \leq u \leq u_s$) задаются эффективные граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля [2]

$$E_{eff} = -4\pi \frac{\partial}{\partial \ell} P(t, \vec{r}),$$

где $\vec{\ell}$ — единичный касательный к поверхности вектор; $P(t, \vec{r})$ — поверхностная плотность дипольного момента;

- на внешней поверхности эллиптического излучателя толщиной h ($v = v_s + h, -1 \leq u \leq u_s$) тангенциальные компоненты электрического поля полагаются равными нулю ($E_\tau = 0$);
- на оси симметрии, заданной согласно (7), предполагается ограниченность всех компонент полей.

При построении разностной схемы будут необходимы следующие дополнительные формулы для эллиптической системы координат [5]:

- связь с декартовыми координатами x, y, z :

$$x = a \cos \varphi \sqrt{(v^2 - 1)(1 - u^2)}; \quad y = a \sin \varphi \sqrt{(v^2 - 1)(1 - u^2)}; \quad z = avu;$$

- выражения для элементов площадей $dS_{vu}, dS_{v\varphi}, dS_{u\varphi}$ на поверхностях $\varphi = \text{const}, u = \text{const}, v = \text{const}$ соответственно:

$$dS_{vu} = h_v h_u dv du; \quad dS_{v\varphi} = h_v h_\varphi dv d\varphi; \quad dS_{u\varphi} = h_u h_\varphi du d\varphi; \quad (9)$$

- координаты единичных векторов $\vec{i}_v, \vec{i}_u, \vec{i}_\varphi$ локального базиса эллиптической системы в декартовой системе координат (x, y, z) . Согласно [5] $\vec{i}_n = \frac{1}{h_n} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi_n} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_n} \vec{k} \right)$ ($n = v, u, \varphi$; $\xi_n = v, u, \varphi$), где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты декартовой системы, поэтому

$$\begin{aligned} \vec{i}_v &= v \cos \varphi \sqrt{\frac{1 - u^2}{v^2 - u^2}} \vec{i} + v \sin \varphi \sqrt{\frac{1 - u^2}{v^2 - u^2}} \vec{j} + u \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - u^2}} \vec{k} \equiv (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v); \\ \vec{i}_u &= -u \cos \varphi \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - u^2}} \vec{i} - u \sin \varphi \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - u^2}} \vec{j} + v \sqrt{\frac{1 - u^2}{v^2 - u^2}} \vec{k} \equiv (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u); \\ \vec{i}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \equiv (\alpha_\varphi, \beta_\varphi, \gamma_\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

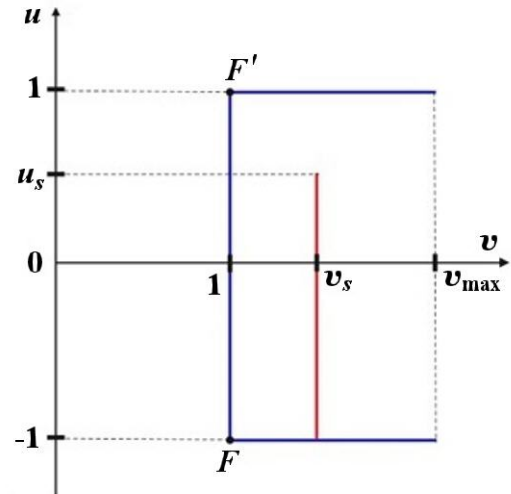


Рис. 4. Границы расчетной области в плоскости (v, u)

Из формул (10) следует связь компонент любого вектора \vec{F} в эллиптической системе координат (v, u, φ) с его компонентами в декартовой системе (x, y, z) :

$$F_v = \alpha_v F_x + \beta_v F_y + \gamma_v F_z; \quad F_u = \alpha_u F_x + \beta_u F_y + \gamma_u F_z; \quad F_\varphi = \alpha_\varphi F_x + \beta_\varphi F_y + \gamma_\varphi F_z.$$

Отметим, что согласно (10) имеют место следующие соотношения:

- при $v = 1$ $\alpha_v = \cos \varphi; \quad \beta_v = \sin \varphi; \quad \gamma_v = 0; \quad \alpha_u = 0; \quad \beta_u = 0; \quad \gamma_u = 1;$
- при $u = 1$ $\alpha_v = \beta_v = 0; \quad \gamma_v = 1; \quad \alpha_u = -\cos \varphi; \quad \beta_u = -\sin \varphi; \quad \gamma_u = 0;$
- при $u = -1$ $\alpha_v = \beta_v = 0; \quad \gamma_v = -1; \quad \alpha_u = \cos \varphi; \quad \beta_u = \sin \varphi; \quad \gamma_u = 0.$

Следовательно, на участках оси Oz справедливы следующие выражения:

- при $-a \leq z \leq a$ $F_v = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi; \quad F_u = F_z;$
- при $z \geq a$ $F_v = F_z; \quad F_u = -F_x \cos \varphi - F_y \sin \varphi;$
- при $z \leq -a$ $F_v = -F_z; \quad F_u = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi.$

Кроме того, на всей оси Oz

$$F_\varphi = -F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi.$$

Описание разностной схемы

В процессе построения разностной схемы для решения уравнений (1)–(6) выделяются два основных этапа. Сначала выполняется пространственная дискретизация этих уравнений, а затем для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений проводится дискретизация по времени.

Введем в области G (8) сетку узлов $\Omega = \omega_v \times \omega_u \times \omega_\varphi$, где $\omega_v = (v_1 = 1, v_2, \dots, v_{N_v} = v_{\max})$, $\omega_u = (u_1 = -1, u_2, \dots, u_{N_u} = 1)$, $\omega_\varphi = (\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_{N_\varphi} = 2\pi)$. При этом в число узлов сетки ω_v входит узел $v_{i_s} = v_s$, в число узлов сетки ω_u входит узел $u_{j_s} = u_s$. Узлы (v_i, u_j, φ_k) ($1 \leq i \leq N_v$, $1 \leq j \leq N_u$, $1 \leq k \leq N_\varphi$), которые в дальнейшем для простоты будем обозначать как (i, j, k) , являются вершинами

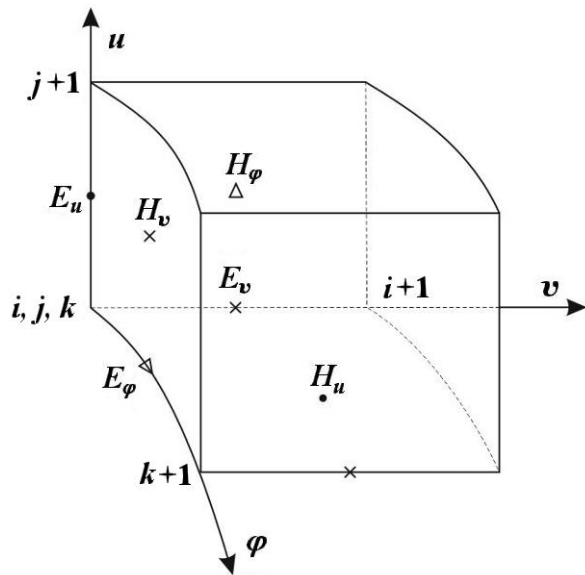


Рис. 5. Расположение сеточных величин на гранях и ребрах ячейки (i, j, k) сетки Ω

некоторых шестигранников (ячеек сетки Ω). Отнесем, как это принято при дискретизации уравнений Максвелла (см., например, [6]), к серединам ребер этих шестигранников значения компонент напряженности электрического поля, а к центрам граней — значения компонент напряженности магнитного поля (рис. 5).

Таким образом, компонента E_v отнесена к узлам $(i + 1/2, j, k)$, компонента E_u — к $(i, j + 1/2, k)$, компонента E_φ — к $(i, j, k + 1/2)$, компонента H_v — к $(i, j + 1/2, k + 1/2)$, компонента H_u — к $(i + 1/2, j, k + 1/2)$, компонента H_φ — к $(i + 1/2, j + 1/2, k)$, где $i + 1/2$ соответствует координате $v_{i+1/2} = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$; $j + 1/2$ и $k + 1/2$ определяются аналогично.

При получении пространственной дискретизации нужно перейти от дифференциальной формы записи уравнений (1)–(6) к интегральной, проинтегрировав каждое из них по площади

границы соответствующего шестигранника. Такой подход позволяет обеспечить для разностных уравнений выполнение следствий уравнений Максвелла

$$\frac{d}{dt} \int_{V_H} \operatorname{div} \vec{H} dV = 0; \quad \frac{d}{dt} \int_{V_E} \operatorname{div} \vec{E} dV = 0,$$

где интегрирование выполняется по объемам шестигранников V_H , V_E , используемых при дискретизации уравнений (4)–(6) и (1)–(3) соответственно.

В качестве шестигранника V_H выбирается ячейка сетки Ω , показанная на рис. 5. Проинтегрировав уравнение (4) по площади грани $v = v_i$ (обозначим ее $S_{u\varphi}^{(H)}$), получим

$$\iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \frac{dH_v}{dt} dS_{u\varphi} = \iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \left(\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_u - \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial}{\partial u} E_\varphi \sqrt{1-u^2} \right) dS_{u\varphi}. \quad (11)$$

Интеграл в левой части (11) вычисляется по квадратурной формуле вида

$$\iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \frac{dH_v}{dt} dS_{u\varphi} \approx \frac{dH_{v_{i,j+1/2,k+1/2}}}{dt} S_{u\varphi}^{(H)},$$

интеграл в правой части (11) можно вычислить, применив формулу Грина. Учитывая выражение для $dS_{u\varphi}$ из (9), находим

$$\begin{aligned} \iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \left(\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_u - \frac{1}{h_u \sqrt{1-u^2}} \frac{\partial}{\partial u} E_\varphi \sqrt{1-u^2} \right) dS_{u\varphi} &= \iint_{S_{u\varphi}^{(H)}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} h_u E_u - \frac{\partial}{\partial u} h_\varphi E_\varphi \right) du d\varphi = \\ &= \oint_L h_u E_u du + h_\varphi E_\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

где через L обозначен контур грани $v = v_i$. Используя при вычислении контурного интеграла квадратурные формулы средних, учитывая, что обход контура производится против часовой стрелки, получаем

$$\begin{aligned} \oint_L h_u E_u du + h_\varphi E_\varphi d\varphi &= E_{\varphi_{i,j+1,k+1/2}} a \sqrt{(v_i^2 - 1) (1 - u_{j+1}^2)} (\varphi_k - \varphi_{k+1}) + \\ &+ E_{u_{i,j+1/2,k}} a \sqrt{\frac{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}{1 - u_{j+1/2}^2}} (u_j - u_{j+1}) + E_{\varphi_{i,j,k+1/2}} a \sqrt{(v_i^2 - 1) (1 - u_j^2)} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \\ &+ E_{u_{i,j+1/2,k+1}} a \sqrt{\frac{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}{1 - u_{j+1/2}^2}} (u_{j+1} - u_j) = a \sqrt{\frac{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}{1 - u_{j+1/2}^2}} \Delta u_{j+1/2} \left(E_{u_{i,j+1/2,k+1}} - E_{u_{i,j+1/2,k}} \right) - \\ &- a \sqrt{v_i^2 - 1} \Delta \varphi_{k+1/2} \left(E_{\varphi_{i,j+1,k+1/2}} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - E_{\varphi_{i,j,k+1/2}} \sqrt{1 - u_j^2} \right), \end{aligned}$$

где $\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$; $\Delta \varphi_{k+1/2} = \varphi_{k+1} - \varphi_k$.

При вычислении $S_{u\varphi}^{(H)}$ также воспользуемся квадратурной формулой средних:

$$S_{u\varphi}^{(H)} = \int_{u_j}^{u_{j+1}} du \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} d\varphi h_u h_\varphi = \Delta \varphi_{k+1/2} \int_{u_j}^{u_{j+1}} h_u h_\varphi du = \Delta \varphi_{k+1/2} \Delta u_{j+1/2} a^2 \sqrt{(v_i^2 - u_{j+1/2}^2) (v_i^2 - 1)}.$$

Собрав воедино полученные результаты, будем иметь следующую аппроксимацию уравнения (4):

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_{v_{i,j+1/2,k+1/2}}}{dt} &= \frac{Eu_{i,j+1/2,k+1} - Eu_{i,j+1/2,k}}{\Delta\varphi_{k+1/2} a \sqrt{(v_i^2 - 1) (1 - u_{j+1/2}^2)}} - \frac{E\varphi_{i,j+1,k+1/2} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - E\varphi_{i,j,k+1/2} \sqrt{1 - u_j^2}}{\Delta u_{j+1/2} a \sqrt{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}} = \\
 &= b_{i,j+1/2}^{(H)} \frac{Eu_{i,j+1/2,k+1} - Eu_{i,j+1/2,k}}{\Delta\varphi_{k+1/2}} - a_{i,j+1/2}^{(H)} \frac{E\varphi_{i,j+1,k+1/2} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - E\varphi_{i,j,k+1/2} \sqrt{1 - u_j^2}}{\Delta u_{j+1/2}}, \quad (12) \\
 b_{i,j+1/2}^{(H)} &= \frac{1}{a \sqrt{(v_i^2 - 1) (1 - u_{j+1/2}^2)}}; \quad a_{i,j+1/2}^{(H)} = \frac{1}{a \sqrt{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (5). Проинтегрируем его по площади грани $u = u_j (S_{v\varphi}^{(H)})$:

$$\iint_{S_{v\varphi}^{(H)}} \frac{dH_u}{dt} dS_{v\varphi} = \iint_{S_{v\varphi}^{(H)}} \left(\frac{1}{h_v \sqrt{v^2 - 1}} \frac{\partial (E_\varphi \sqrt{v^2 - 1})}{\partial v} - \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial E_v}{\partial \varphi} \right) dS_{v\varphi}. \quad (13)$$

Вычислив интегралы в (13) тем же способом, что и в (11), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_{u_{i+1/2,j,k+1/2}}}{dt} &= a_{i+1/2,j}^{(H)} \frac{E\varphi_{i+1,j,k+1/2} \sqrt{v_{i+1}^2 - 1} - E\varphi_{i,j,k+1/2} \sqrt{v_i^2 - 1}}{\Delta v_{i+1/2}} - \\
 &\quad - b_{i+1/2,j}^{(H)} \frac{E_{v_{i+1/2,j,k+1}} - E_{v_{i+1/2,j,k}}}{\Delta\varphi_{k+1/2}}, \quad (14) \\
 \Delta v_{i+1/2} &= v_{i+1} - v_i; \quad \Delta\varphi_{k+1/2} = \varphi_{k+1} - \varphi_k; \\
 a_{i+1/2,j}^{(H)} &= \frac{1}{a \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u_j^2}}; \quad b_{i+1/2,j}^{(H)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_{i+1/2}^2 - 1) (1 - u_j^2)}}.
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав уравнение (6) по площади грани $\varphi = \varphi_k (S_{uv}^{(H)})$, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}}{dt} &= d_{i+1/2,j+1/2}^{(H)} \left(\frac{f_{i+1/2,j+1}^{(H)} E_{v_{i+1/2,j+1,k}} - f_{i+1/2,j}^{(H)} E_{v_{i+1/2,j,k}}}{\Delta u_{j+1/2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g_{i+1,j+1/2}^{(H)} E_{u_{i+1,j+1/2,k}} - g_{i,j+1/2}^{(H)} E_{u_{i,j+1/2,k}}}{\Delta v_{i+1/2}} \right), \quad (15) \\
 \Delta u_{j+1/2} &= u_{j+1} - u_j; \quad \Delta v_{i+1/2} = v_{i+1} - v_i; \quad d_{i+1/2,j+1/2}^{(H)} = \frac{1}{a (v_{i+1/2}^2 - u_{j+1/2}^2)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{i+1/2,j+1}^{(H)} &= \tilde{f}_{j+1/2}^{(H)} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u_{j+1}^2}; \quad f_{i+1/2,j}^{(H)} = \tilde{f}_{j+1/2}^{(H)} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u_j^2}; \quad \tilde{f}_{j+1/2}^{(H)} = \sqrt{1 - u_{j+1/2}^2}; \\
 g_{i+1,j+1/2}^{(H)} &= \tilde{g}_{i+1/2}^{(H)} \sqrt{v_{i+1}^2 - u_{j+1/2}^2}; \quad g_{i,j+1/2}^{(H)} = \tilde{g}_{i+1/2}^{(H)} \sqrt{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}; \quad \tilde{g}_{i+1/2}^{(H)} = \sqrt{v_{i+1/2}^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Следующий шаг — дискретизация уравнений (1)–(3). В качестве шестигранника V_E , используемого при дискретизации, выбирается ячейка, полученная смещением ячейки исходной сетки на $-1/2$ (рис. 6). Формулы для дискретизированных уравнений (1)–(3) могут быть получены из формул (12), (14), (15) с учетом этого смещения:

$$\frac{dE_{v_{i+1/2,j,k}}}{dt} = a_{i+1/2,j}^{(E)} \frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} \sqrt{1-u_{j+1/2}^2} - H_{\varphi_{i+1/2,j-1/2,k}} \sqrt{1-u_{j-1/2}^2}}{\Delta u_j} -$$

$$- b_{i+1/2,j}^{(E)} \frac{H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} - H_{u_{i+1/2,j,k-1/2}}}{\Delta \varphi_k},$$

где $\Delta u_j = u_{j+1/2} - u_{j-1/2}$,

$$\Delta \varphi_k = \varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2},$$

$$a_{i+1/2,j}^{(E)} = \frac{1}{a \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u_j^2}},$$

$$b_{i+1/2,j}^{(E)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_{i+1/2}^2 - 1)(1 - u_j^2)}};$$

$$\frac{dE_{u_{i,j+1/2,k}}}{dt} = b_{i,j+1/2}^{(E)} \frac{H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} - H_{v_{i,j+1/2,k-1/2}}}{\Delta \varphi_k} -$$

$$- a_{i,j+1/2}^{(E)} \frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - 1} - H_{\varphi_{i-1/2,j+1/2,k}} \sqrt{v_{i-1/2}^2 - 1}}{\Delta v_i},$$

где

$$\Delta \varphi_k = \varphi_{k+1/2} - \varphi_{k-1/2}, \quad \Delta v_i = v_{i+1/2} - v_{i-1/2},$$

$$b_{i,j+1/2}^{(E)} = \frac{1}{a \sqrt{(v_i^2 - 1)(1 - u_{j+1/2}^2)}}, \quad a_{i,j+1/2}^{(E)} = \frac{1}{a \sqrt{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}};$$

$$\frac{dE_{\varphi_{i,j,k+1/2}}}{dt} = d_{i,j}^{(E)} \left(\frac{g_{i+1/2,j}^{(E)} H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} - g_{i-1/2,j}^{(E)} H_{u_{i-1/2,j,k+1/2}}}{\Delta v_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{f_{i,j+1/2}^{(E)} H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} - f_{i,j-1/2}^{(E)} H_{v_{i,j-1/2,k+1/2}}}{\Delta u_j} \right),$$

где $\Delta v_i = v_{i+1/2} - v_{i-1/2}$, $\Delta u_j = u_{j+1/2} - u_{j-1/2}$, $d_{i,j}^{(E)} = \frac{1}{a(v_i^2 - u_j^2)}$,

$$g_{i+1/2,j}^{(E)} = \tilde{g}_i^{(E)} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u_j^2}, \quad g_{i-1/2,j}^{(E)} = \tilde{g}_i^{(E)} \sqrt{v_{i-1/2}^2 - u_j^2}, \quad \tilde{g}_i^{(E)} = \sqrt{v_i^2 - 1},$$

$$f_{i,j+1/2}^{(E)} = \tilde{f}_j^{(E)} \sqrt{v_i^2 - u_{j+1/2}^2}, \quad f_{i,j-1/2}^{(E)} = \tilde{f}_j^{(E)} \sqrt{v_i^2 - u_{j-1/2}^2}, \quad \tilde{f}_j^{(E)} = \sqrt{1 - u_j^2}.$$

Одним из важных моментов является вычисление компонент полей в узлах, попадающих на ось Oz . При выбранном расположении этих величин на сетке Ω единственными компонентами, определенными в узлах на оси Oz и не зависящими от φ , являются E_u при $v = 1$, $-1 \leq u \leq 1$ ($-F \leq z \leq F$) и E_v при $u = -1$, $v \geq 1$ ($z \leq -F$) и при $u = 1$, $v \geq 1$ ($z \geq F$) (см. рис. 3, 4). Именно для них (следуя работе [6]) и будут сформулированы дополнительные условия на оси Oz .

Сначала выведем условия для E_u . Для этого нужно умножить уравнение (2) на $dS_{v\varphi}$ и проинтегрировать результирующее соотношение по v , φ в пределах $1 \leq v \leq v_m$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где v_m — некоторое заданное значение, мало отличающееся от единицы в сторону увеличения:

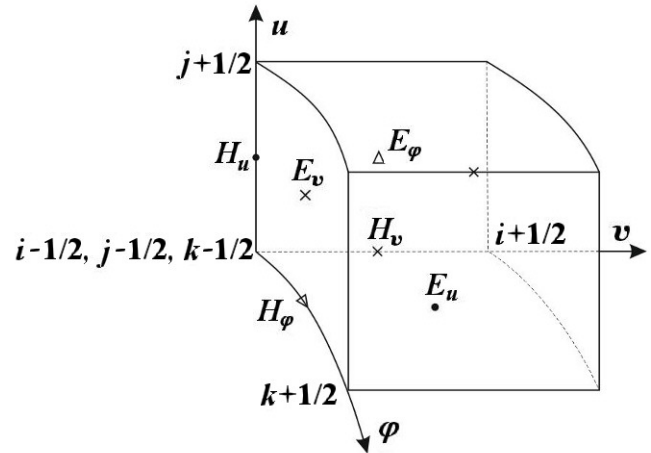


Рис. 6. Ячейка V_E для дискретизации уравнений (1)–(3)

$$\int_1^{v_m} \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{v^2 - u^2} \sqrt{1 - u^2} \frac{\partial E_u}{\partial t} dv d\varphi = - \int_1^{v_m} dv \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial v} a \sqrt{v^2 - 1} \sqrt{1 - u^2} H_\varphi d\varphi \quad (16)$$

(интеграл от первого слагаемого в (2) равен нулю в силу периодичности H_v по φ). Из (16) можно получить (при $v_m - 1 \simeq 0$) следующее соотношение:

$$2\pi a \frac{\partial}{\partial t} E_u(v = 1, u, t) \int_1^{v_m} \sqrt{v^2 - u^2} dv \simeq -\sqrt{v_m^2 - 1} \int_0^{2\pi} H_\varphi(v = v_m, u, \varphi, t) d\varphi. \quad (17)$$

Таким образом, производная по t от E_u в узлах на оси Oz зависит от интеграла по φ от H_φ на некотором контуре, охватывающем ось Oz .

Теперь найдем дополнительные условия для E_v . Рассмотрим уравнение (1) на интервале оси Oz при $u = -1, v \geq 1$. Умножим его на $dS_{u\varphi}$ и проинтегрируем результирующее соотношение по u, φ в пределах $-1 \leq u \leq u_m^{(-1)}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где $u_m^{(-1)}$ — некоторое заданное значение, такое что $u_m^{(-1)} \geq -1$ и $u_m^{(-1)} + 1 \simeq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{u_m^{(-1)}} \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{v^2 - u^2} \sqrt{v^2 - 1} \frac{\partial E_v}{\partial t} du d\varphi &= \int_{-1}^{u_m^{(-1)}} du \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial u} a \sqrt{v^2 - 1} \sqrt{1 - u^2} H_\varphi d\varphi; \\ 2\pi a \frac{\partial}{\partial t} E_v(v, u = -1, t) \int_{-1}^{u_m^{(-1)}} \sqrt{v^2 - u^2} du &\simeq \sqrt{1 - (u_m^{(-1)})^2} \int_0^{2\pi} H_\varphi(v, u = u_m^{(-1)}, \varphi, t) d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь рассмотрим уравнение (1) при $u = 1, v \geq 1$. Умножим его на $dS_{u\varphi}$ и проинтегрируем результирующее соотношение по u, φ в пределах $u_m^{(1)} \leq u \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где $u_m^{(1)}$ — некоторое заданное значение, такое что $u_m^{(1)} \leq 1$ и $1 - u_m^{(1)} \simeq 0$:

$$2\pi a \frac{\partial}{\partial t} E_v(v, u = 1, t) \int_{u_m^{(1)}}^1 \sqrt{v^2 - u^2} du \simeq -\sqrt{1 - (u_m^{(1)})^2} \int_0^{2\pi} H_\varphi(v, u = u_m^{(1)}, \varphi, t) d\varphi. \quad (19)$$

При использовании соотношений (17)–(19) в разностных уравнениях следует интегралы по φ заменить на квадратурные формулы.

Далее проводится дискретизация полученных уравнений по времени t с использованием метода покоординатного расщепления [7]; $t_n \leq t \leq t_{n+1} = t_n + \tau$. Согласно этому методу решение осуществляется в три этапа.

Этап 1. Учет изменения функций по переменной φ . На данном этапе решаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{E_{u_{i,j+1/2,k}}^{n+1/3} - E_{u_{i,j+1/2,k}}^n}{\tau} &= b_{i,j+1/2}^{(E)} \frac{H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} - H_{v_{i,j+1/2,k-1/2}}}{\Delta\varphi_k}; \\ \frac{H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n+1/3} - H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}}^n}{\tau} &= b_{i,j+1/2}^{(H)} \frac{E_{u_{i,j+1/2,k+1}} - E_{u_{i,j+1/2,k}}}{\Delta\varphi_{k+1/2}}; \\ \frac{E_{v_{i+1/2,j,k}}^{n+1/3} - E_{v_{i+1/2,j,k}}^n}{\tau} &= -b_{i+1/2,j}^{(E)} \frac{H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} - H_{u_{i+1/2,j,k-1/2}}}{\Delta\varphi_k}; \\ \frac{H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}}^{n+1/3} - H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}}^n}{\tau} &= -b_{i+1/2,j}^{(H)} \frac{E_{v_{i+1/2,j,k+1}} - E_{v_{i+1/2,j,k}}}{\Delta\varphi_{k+1/2}}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях $1 \leq k \leq N_\varphi - 1$, при этом $E_{u_{i,j+1/2},N_\varphi} = E_{u_{i,j+1/2,1}}$, $E_{v_{i+1/2,j},N_\varphi} = E_{v_{i+1/2,j,1}}$.
 Величины в правых частях будем определять по формулам

$$H_v = \alpha H_v^{n+1/3} + \beta H_v^n; \quad E_u = \alpha E_u^{n+1/3} + \beta E_u^n; \quad H_u = \alpha H_u^{n+1/3} + \beta H_u^n; \quad E_v = \alpha E_v^{n+1/3} + \beta E_v^n,$$

в которых параметры α и β зависят от координат u, v ; здесь и далее они определяются следующим образом: $1/2 \leq \alpha \leq 1$; $\beta = 1 - \alpha$.

Уравнения первого этапа решаются с помощью метода циклической прогонки.

Этап 2. Учет изменения функций по переменной u . Решаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{E_{v_{i+1/2,j,k}}^{n+2/3} - E_{v_{i+1/2,j,k}}^{n+1/3}}{\tau} &= a_{i+1/2,j}^{(E)} \frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} \sqrt{1 - u_{j+1/2}^2} - H_{\varphi_{i+1/2,j-1/2,k}} \sqrt{1 - u_{j-1/2}^2}}{\Delta u_j}; \\ \frac{E_{v_{i+1/2,1,k}}^{n+2/3} - E_{v_{i+1/2,1,k}}^{n+1/3}}{\tau} &= \frac{\sqrt{1 - u_{3/2}^2}}{2\pi a \int_{-1}^{u_{3/2}} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u^2} du} \sum_{k=1}^{N_\varphi-1} H_{\varphi_{i+1/2,3/2,k}} \Delta \varphi_k; \\ \frac{E_{v_{i+1/2,N_u,k}}^{n+2/3} - E_{v_{i+1/2,N_u,k}}^{n+1/3}}{\tau} &= -\frac{\sqrt{1 - u_{N_u-1/2}^2}}{2\pi a \int_{u_{N_u-1/2}}^1 \sqrt{v_{i+1/2}^2 - u^2} du} \sum_{k=1}^{N_\varphi-1} H_{\varphi_{i+1/2,N_u-1/2,k}} \Delta \varphi_k; \\ \frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}^{n+2/3} - H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}^n}{\tau} &= d_{i+1/2,j+1/2}^{(H)} \frac{f_{i+1/2,j+1}^{(H)} E_{v_{i+1/2,j+1,k}} - f_{i+1/2,j}^{(H)} E_{v_{i+1/2,j,k}}}{\Delta u_{j+1/2}}; \\ \frac{E_{\varphi_{i,j,k+1/2}}^{n+2/3} - E_{\varphi_{i,j,k+1/2}}^n}{\tau} &= -d_{i,j}^{(E)} \frac{f_{i,j+1/2}^{(E)} H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}} - f_{i,j-1/2}^{(E)} H_{v_{i,j-1/2,k+1/2}}}{\Delta u_j}; \\ \frac{H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n+2/3} - H_{v_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n+1/3}}{\tau} &= -a_{i,j+1/2}^{(H)} \frac{E_{\varphi_{i,j+1,k+1/2}} \sqrt{1 - u_{j+1}^2} - E_{\varphi_{i,j,k+1/2}} \sqrt{1 - u_j^2}}{\Delta u_{j+1/2}}. \end{aligned}$$

В правых частях уравнений

$$E_v = \alpha E_v^{n+2/3} + \beta E_v^{n+1/3}; \quad H_\varphi = \alpha H_\varphi^{n+2/3} + \beta H_\varphi^n; \quad E_\varphi = \alpha E_\varphi^{n+2/3} + \beta E_\varphi^n; \quad H_v = \alpha H_v^{n+2/3} + \beta H_v^{n+1/3}.$$

Этап 3. Учет изменения функций по переменной v . На третьем этапе решаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{E_{u_{i,j+1/2,k}}^{n+1} - E_{u_{i,j+1/2,k}}^{n+1/3}}{\tau} &= -a_{i,j+1/2}^{(E)} \frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - 1} - H_{\varphi_{i-1/2,j+1/2,k}} \sqrt{v_{i-1/2}^2 - 1}}{\Delta v_i}; \\ \frac{E_{u_{1,j+1/2,k}}^{n+1} - E_{u_{1,j+1/2,k}}^{n+1/3}}{\tau} &= -\frac{\sqrt{v_{3/2}^2 - 1}}{2\pi a \int_1^{v_{3/2}} \sqrt{v^2 - u_{j+1/2}^2} dv} \sum_{k=1}^{N_\varphi-1} H_{\varphi_{3/2,j+1/2,k}} \Delta \varphi_k; \\ \frac{H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}^{n+1} - H_{\varphi_{i+1/2,j+1/2,k}}^{n+2/3}}{\tau} &= -d_{i+1/2,j+1/2}^{(H)} \frac{g_{i+1/2,j+1/2}^{(H)} E_{u_{i+1/2,j+1/2,k}} - g_{i,j+1/2}^{(H)} E_{u_{i,j+1/2,k}}}{\Delta v_{i+1/2}}; \\ \frac{E_{\varphi_{i,j,k+1/2}}^{n+1} - E_{\varphi_{i,j,k+1/2}}^{n+2/3}}{\tau} &= d_{i,j}^{(E)} \frac{g_{i+1/2,j}^{(E)} H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}} - g_{i-1/2,j}^{(E)} H_{u_{i-1/2,j,k+1/2}}}{\Delta v_i}; \\ \frac{H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}}^{n+1} - H_{u_{i+1/2,j,k+1/2}}^{n+1/3}}{\tau} &= a_{i+1/2,j}^{(H)} \frac{E_{\varphi_{i+1/2,j,k+1/2}} \sqrt{v_{i+1/2}^2 - 1} - E_{\varphi_{i,j,k+1/2}} \sqrt{v_i^2 - 1}}{\Delta v_{i+1/2}}. \end{aligned}$$

В правых частях уравнений

$$E_u = \alpha E_u^{n+1} + \beta E_u^{n+1/3}; \quad H_\varphi = \alpha H_\varphi^{n+1} + \beta H_\varphi^{n+2/3}; \quad E_\varphi = \alpha E_\varphi^{n+1} + \beta E_\varphi^{n+2/3}; \quad H_u = \alpha H_u^{n+1} + \beta H_u^{n+1/3}.$$

Уравнения второго и третьего этапов решаются с помощью метода прогонки.

Результаты расчетов тестовых задач

Геометрию полости излучающего модуля выберем в виде замкнутого эллипсоида вращения (рис. 7) со следующими параметрами: фокусное расстояние $F = 12,8$ см; границы эллипсоида в эллиптических координатах $u_s = 1$, $v_s = 1,347$.

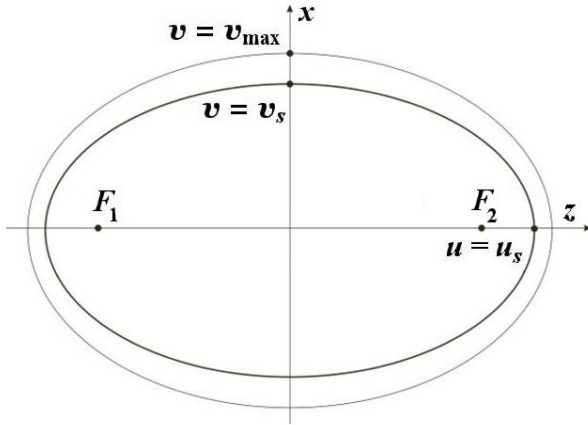


Рис. 7. Геометрия задачи в декартовых координатах (сечение в плоскости $y = 0$)

Эллипсоид выбран полностью замкнутым, чтобы в тестовой задаче избавиться от дополнительных волн, дифрагированных с края выходной апертуры.

Для первой тестовой задачи используем осесимметричное решение в виде дипольных гармоник, поскольку СШП ЭМИ имеет вид сходящейся к фокусу F_2 волны со сферическим фронтом. В сферической системе координат (r, θ, φ) с центром в F_2 и осью Oz , проходящей через фокусы, потенциалы электромагнитного поля в калибровке Лоренца имеют вид (принята система единиц, в которой скорость света $c = 1$) [8]

$$\varphi = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{r}; \quad A_r = -\cos \theta \frac{\dot{p}}{r}; \quad A_\theta = \sin \theta \frac{\dot{p}}{r}.$$

Здесь функция p — суперпозиция сходящейся и расходящейся волн: $p \rightarrow p(t+r) - p(t-r)$. Решение задачи в такой постановке не имеет особенностей.

В качестве функции источника выбрана модельная функция, у которой третья производная по времени равна нулю в нулевой момент: $p(\tau) = \begin{cases} \tau^4 e^{-\tau}, & \tau \geq 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$

Тогда компоненты электромагнитного поля в сферической системе координат выражаются следующим образом:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \dot{A}_r = 2 \cos \theta \left(\frac{\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)}{r^2} - \frac{p(\tau) - p(\tau_1)}{r^3} \right); \quad (20)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \dot{A}_\theta = \sin \theta \left(-\frac{\ddot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau_1)}{r} + \frac{\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)}{r^2} - \frac{p(\tau) - p(\tau_1)}{r^3} \right); \quad (21)$$

$$H_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_r = \sin \theta \left(\frac{\ddot{p}(\tau) + \ddot{p}(\tau_1)}{r} - \frac{\dot{p}(\tau) - \dot{p}(\tau_1)}{r^2} \right), \quad (22)$$

где $\tau = t + r - R$; $\tau_1 = t - r - R$. Сдвиг по времени выбран таким образом, чтобы нулевой момент времени совпадал с началом процесса (возбуждением дальней от фокуса F_2 точки поверхности) [8].

Сферические и эллиптические координаты связаны соотношениями [5]

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{v^2-1}}{v-u}; & \cos \theta &= \frac{vu-1}{v-u}; & r &= F(v-u); & R &= F(v_s-1); \\ a_u &= -\frac{a_r\sqrt{1-u^2}+a_\theta\sqrt{v^2-1}}{\sqrt{v^2-u^2}}; & a_v &= \frac{a_r\sqrt{v^2-1}-a_\theta\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{v^2-u^2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Применяя (23) к (20)–(22) и сдвигая временной аргумент на задержку сигнала, $t \rightarrow t - 2F$, для компонент поля в эллиптической системе координат можно получить

$$\begin{aligned}
 E_u &= \frac{\sqrt{1-u^2}}{F^3\sqrt{v^3-u^2}} \left\{ \frac{\ddot{p}(\tau) F^2 (v^2-1)}{s^2} - \dot{p}(\tau) F \left[\frac{3(v^2-1)}{s^3} - \frac{2v}{s^2} \right] - p(\tau) \left[-\frac{3(v^2-1)}{s^4} + \frac{2v}{s^3} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\ddot{p}(\tau_1) F^2 (v^2-1)}{s^2} - \dot{p}(\tau_1) F \left[\frac{3(v^2-1)}{s^3} - \frac{2v}{s^2} \right] + p(\tau_1) \left[-\frac{3(v^2-1)}{s^4} + \frac{2v}{s^3} \right] \right\}; \\
 E_v &= \frac{\sqrt{v^2-1}}{F^3\sqrt{v^2-u^2}} \left\{ \frac{\ddot{p}(\tau) F^2 (1-u^2)}{s^2} - \dot{p}(\tau) F \left[\frac{3(1-u^2)}{s^3} - \frac{2u}{s^2} \right] - p(\tau) \left[-\frac{3(1-u^2)}{s^4} + \frac{2u}{s^3} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\ddot{p}(\tau_1) F^2 (1-u^2)}{s^2} - \dot{p}(\tau_1) F \left[\frac{3(1-u^2)}{s^3} - \frac{2u}{s^2} \right] + p(\tau_1) \left[-\frac{3(1-u^2)}{s^4} + \frac{2u}{s^3} \right] \right\}; \\
 H_\varphi &= \frac{\sqrt{v^2-1}\sqrt{1-u^2}}{F s^2} \left(\ddot{p}(\tau) - \frac{\dot{p}(\tau)}{F s} + \ddot{p}(\tau_1) + \frac{\dot{p}(\tau_1)}{F s} \right),
 \end{aligned} \tag{24}$$

где $\tau = t + F(v-u) - F(v_s-1) - 2F$; $\tau_1 = t - F(v-u) - F(v_s-1) - 2F$; $s = v-u$.

При этом граничное условие для компонент поля следует форме и временной зависимости сходящейся дипольной волны:

$$E_u(v=v_s) = -\frac{\sqrt{1-u^2}}{F^2\sqrt{v_s^2-u^2}} \left\{ \frac{\ddot{p}(\tau) F (v_s^2-1)}{s_0^2} - \dot{p}(\tau) \left[\frac{3(v_s^2-1)}{s_0^3} - \frac{2v_s}{s_0^2} \right] - \frac{p(\tau)}{F} \left[-\frac{3(v_s^2-1)}{s_0^4} + \frac{2v_s}{s_0^3} \right] \right\},$$

где $s_0 = v_s - u$; $\tau = t - F(1+u)$.

Численные расчеты модельной задачи проводились на квазиравномерной сетке при уменьшении шагов от $\Delta v = 0,02/F$, $\Delta u = 0,02/F$ до $\Delta v = 0,001/F$, $\Delta u = 0,001/F$ к фокусу и при $\Delta\varphi = 45^\circ$, $\Delta t = 0,02$. Граница расчетной области полагалась равной $v_{\max} = 1,5$. Сравнение численного и аналитического решений проводилось в точках с координатами $(x, z) = (5,776; 6,4)$ и $(2,8875; 9,6)$. Из рис. 8 видно, что наблюдается хорошее согласие между аналитическим решением (24) и результатами численных расчетов. Временные зависимости имеют двухимпульсную структуру, что наглядно демонстрирует сходящуюся к фокусу и расходящуюся из фокуса волны. Ограничение на временной интервал, в котором справедливо аналитическое решение: $0 \leq t \leq 2b$.

Для второй тестовой задачи используем решение в виде нижней неосесимметричной ТЕ-гармоники, которое в сферической системе координат с центром в фокусе F_2 и осью Oz , проходящей через оба фокуса, записывается как [8]

$$\begin{aligned}
 E_r &= 0; \quad E_\theta = -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{p}(\tau) - \dot{p}(\tau_1)}{r}; \quad E_\varphi = \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{\dot{p}(\tau) - \dot{p}(\tau_1)}{r}; \\
 H_r &= 2 \sin\theta \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{p(\tau) - p(\tau_1)}{r}; \quad H_\theta = \cos\theta \sin\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{p(\tau) - p(\tau_1)}{r}; \\
 H_\varphi &= \cos\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{p(\tau) - p(\tau_1)}{r}.
 \end{aligned}$$

В эллиптических координатах его можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 E_u &= \cos\varphi \frac{\sqrt{v^2-1}}{\sqrt{v^2-u^2}} \left[-\frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) - \dot{p}(\tau_1)) + \frac{1}{F s} (\ddot{p}(\tau) + \ddot{p}(\tau_1)) \right]; \\
 E_v &= \cos\varphi \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{v^2-u^2}} \left[-\frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) - \dot{p}(\tau_1)) + \frac{1}{F s} (\ddot{p}(\tau) + \ddot{p}(\tau_1)) \right]; \\
 E_\varphi &= \sin\varphi \frac{vu-1}{v-u} \left[-\frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) - \dot{p}(\tau_1)) + \frac{1}{F s} (\ddot{p}(\tau) + \ddot{p}(\tau_1)) \right];
 \end{aligned} \tag{25}$$

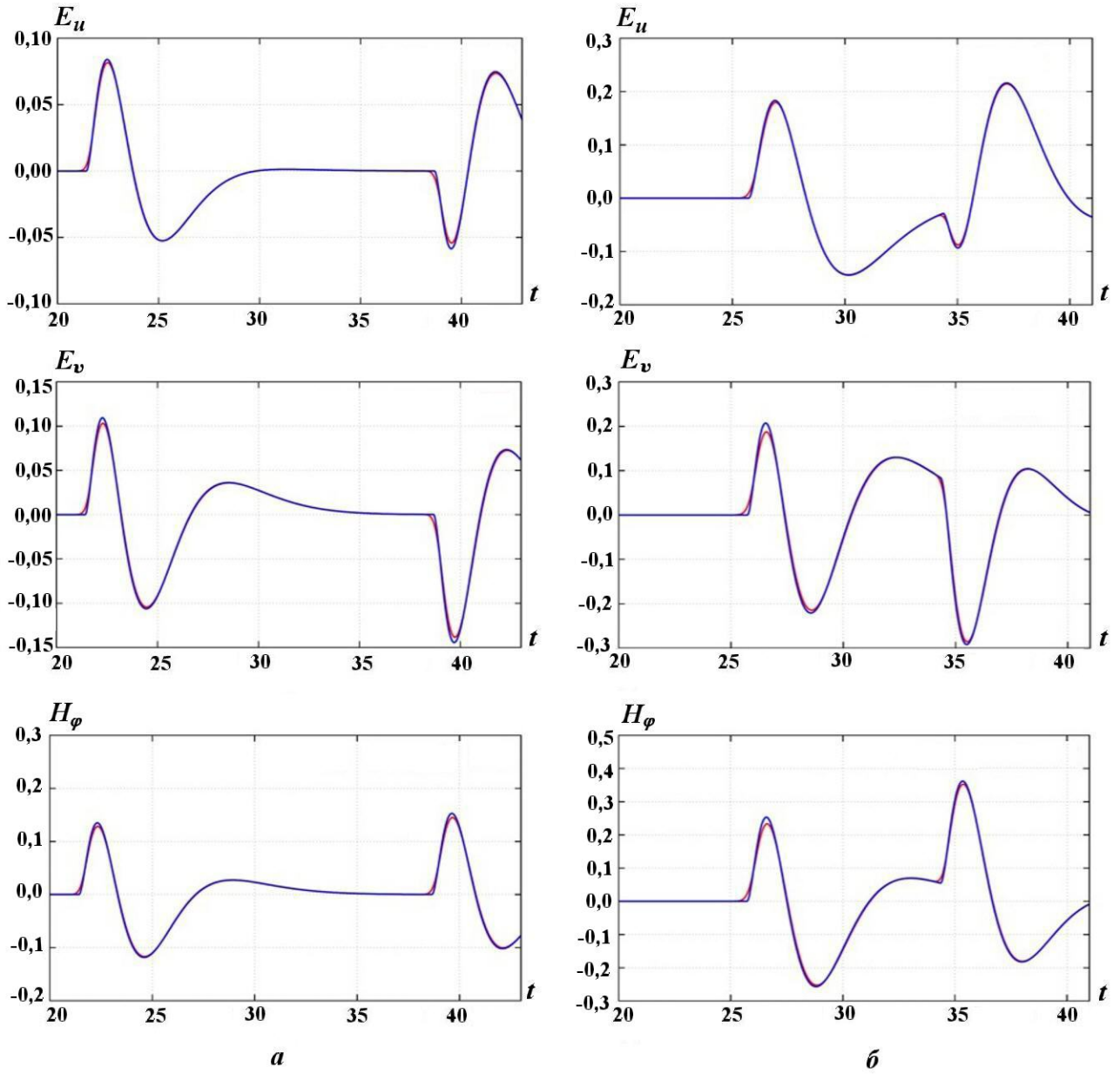


Рис. 8. Временные зависимости компонент E_u , E_v , H_φ электромагнитного поля: a — для точки $(x, z) = (5,776; 6,4)$; b — для точки $(x, z) = (2,8875; 9,6)$; — численное решение; — аналитическое решение

$$\begin{aligned}
 H_u &= -\frac{1}{\sqrt{v^2 - u^2}} \sin \varphi \left\{ 2 \frac{(1 - u^2) \sqrt{v^2 - 1}}{v - u} \left[-\frac{1}{F^3 s^3} (p(\tau) - p(\tau_1)) + \frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{v^2 - 1} \frac{vu - 1}{v - u} \left[\frac{1}{F^3 s^3} (p(\tau) - p(\tau_1)) - \frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)) + \frac{1}{F s} (\ddot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau_1)) \right] \right\}; \\
 H_v &= -\frac{1}{\sqrt{v^2 - u^2}} \sin \varphi \left\{ -2 \frac{\sqrt{1 - u^2} (v^2 - 1)}{v - u} \left[-\frac{1}{F^3 s^3} (p(\tau) - p(\tau_1)) + \frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{1 - u^2} \frac{vu - 1}{v - u} \left[\frac{1}{F^3 s^3} (p(\tau) - p(\tau_1)) - \frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)) + \frac{1}{F s} (\ddot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau_1)) \right] \right\}; \\
 H_\varphi &= \cos \varphi \left[\frac{1}{F^3 s^3} (p(\tau) - p(\tau_1)) - \frac{1}{F^2 s^2} (\dot{p}(\tau) + \dot{p}(\tau_1)) + \frac{1}{F s} (\ddot{p}(\tau) - \ddot{p}(\tau_1)) \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Граничное условие имеет вид

$$E_u(v = v_s) = \cos \varphi \frac{\sqrt{v_s^2 - 1}}{\sqrt{v_s^2 - u^2}} \left(-\frac{\dot{p}(\tau)}{F^2 s_0^2} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{F s_0} \right); \quad E_\varphi(v = v_s) = \sin \varphi \frac{v_s u - 1}{v_s - u} \left(-\frac{\dot{p}(\tau)}{F^2 s_0^2} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{F s_0} \right).$$

Сравнение численного и аналитического решений (25), (26) проводилось при $\varphi = 0$ в тех же точках, что и для двумерного случая (рис. 9, 10). Видно, что наблюдается хорошее согласие между аналитическим и численным решениями.

Поскольку данная тестовая задача трехмерная, решение изменяется также по углу φ . На рис. 11 изображены временные зависимости компоненты E_φ для точки $(x, z) = (2,8875; 9,6)$ при разных значениях угла φ . Видно, что при значениях $\varphi = 0$ и 180° решения совпадают, а при $\varphi = 45, 225, 90, 270, 135$ и 315° они отличаются знаком в силу гармонической зависимости от угла φ .

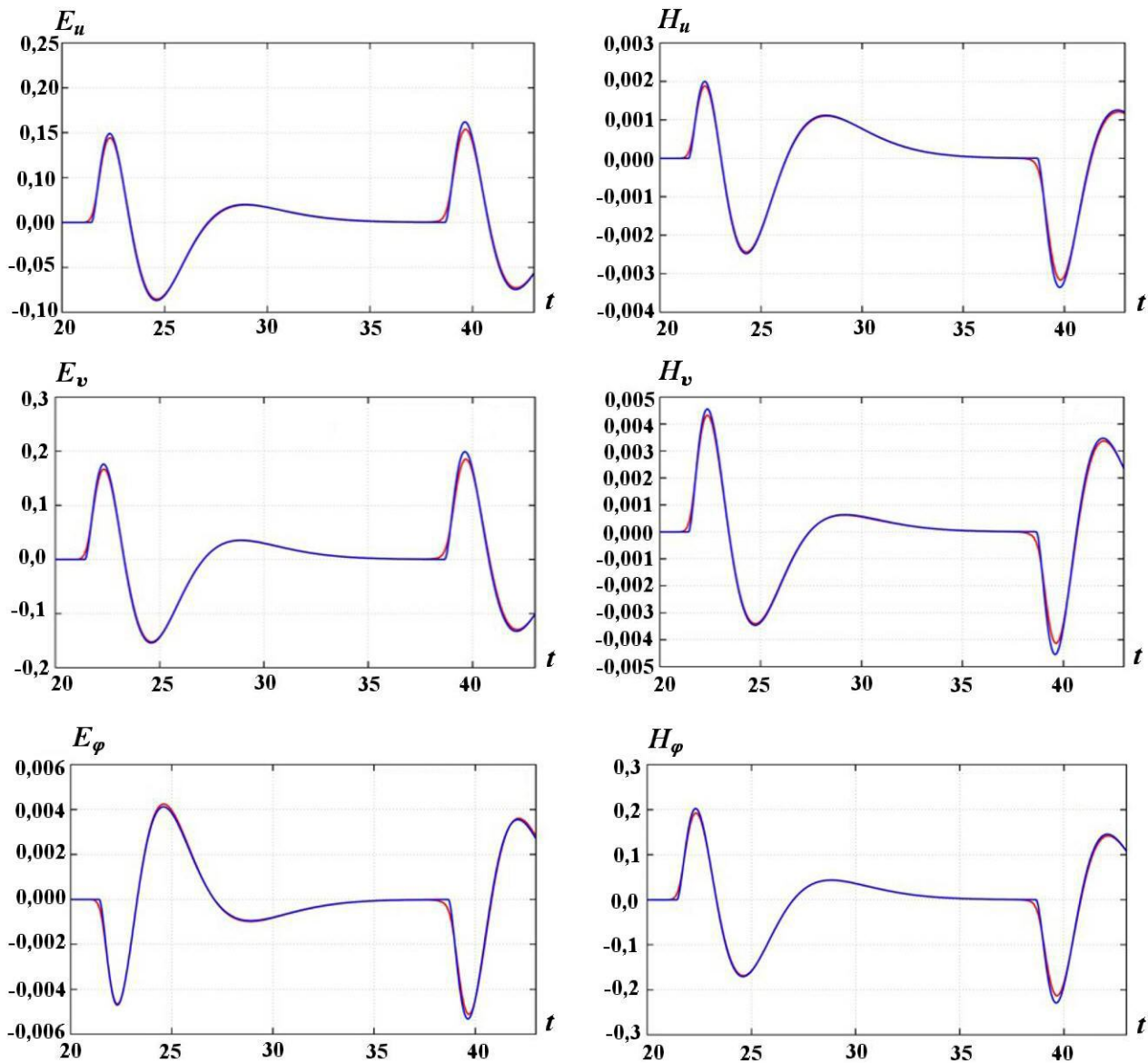


Рис. 9. Временные зависимости компонент $E_u, E_v, E_\varphi, H_u, H_v, H_\varphi$ электромагнитного поля для точки $(x, z) = (5,776; 6,4)$ при $\varphi = 0$: — численное решение; — аналитическое решение

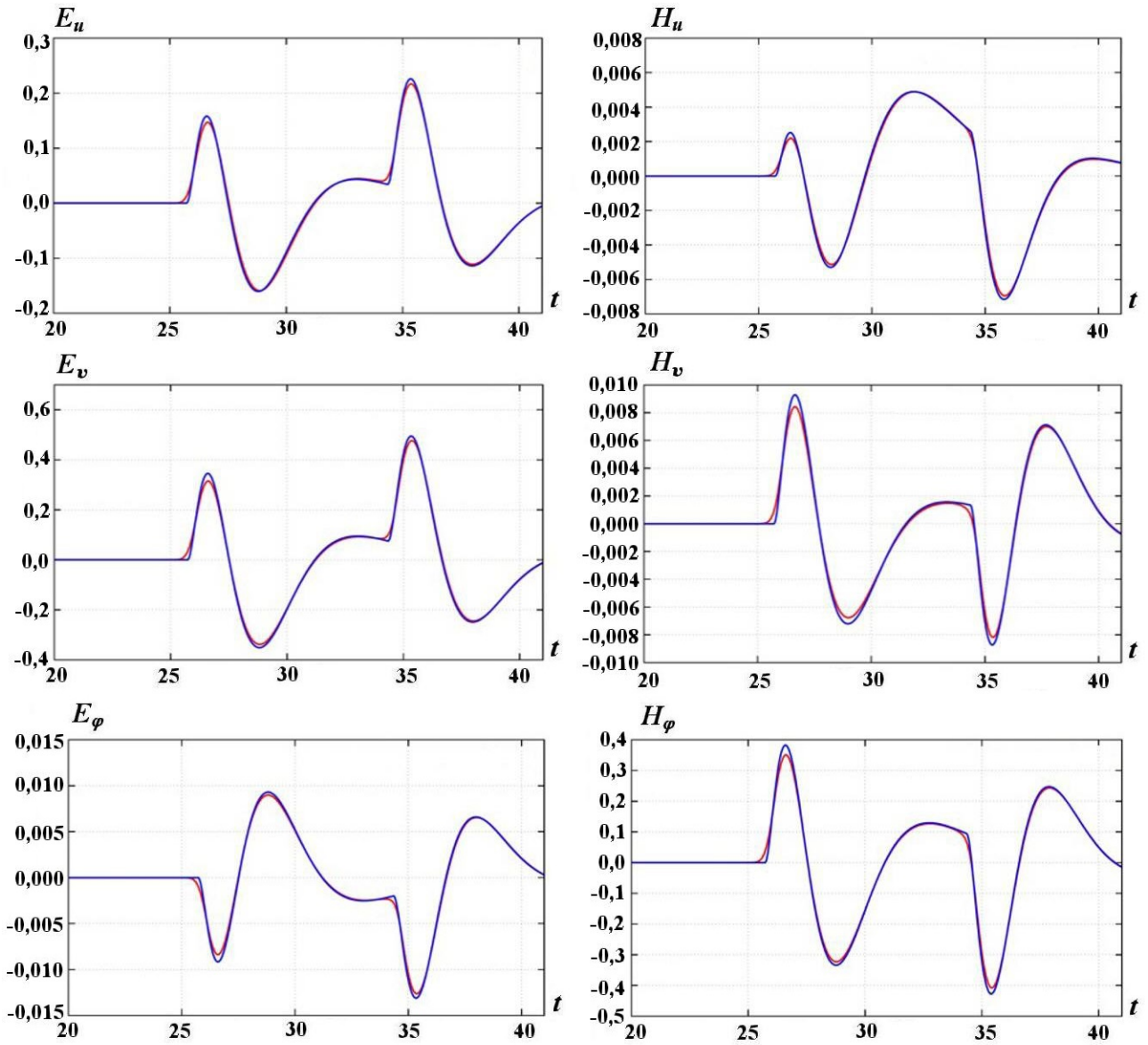


Рис. 10. Временные зависимости компонент E_u , E_v , E_φ , H_u , H_v , H_φ электромагнитного поля для точки $(x, z) = (2,8875; 9,6)$ при $\varphi = 0$: — численное решение; — аналитическое решение

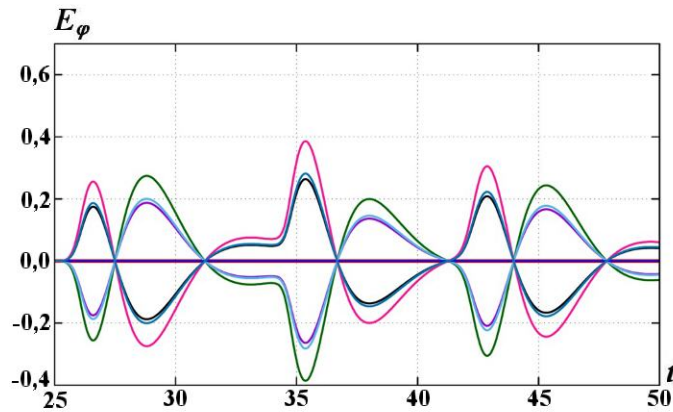


Рис. 11. Временные зависимости компоненты E_φ для точки $(x, z) = (2,8875; 9,6)$ при разных значениях угла φ : — $\varphi = 0^\circ$; — $\varphi = 45^\circ$; — $\varphi = 90^\circ$; — $\varphi = 135^\circ$; — $\varphi = 180^\circ$; — $\varphi = 225^\circ$; — $\varphi = 270^\circ$; — $\varphi = 315^\circ$

Заключение

Сформулирована постановка задачи для численного моделирования генерации и распространения СШП ЭМИ в эллиптическом излучателе. Изложены метод и алгоритм решения поставленной задачи, основанный на интегрировании однородных уравнений Максвелла в эллиптических координатах с использованием метода покоординатного расщепления. Источники электромагнитного поля задавались в виде эффективных граничных условий на внутренней поверхности излучателя. Для определения граничных условий на оси симметрии эллипсоида решалась система уравнений Максвелла для проинтегрированных по углу компонент полей.

Представлено сравнение результатов расчетов тестовых задач в разных точках расчетной области с аналитическими решениями. Продемонстрировано их совпадение. Тем самым показано, что разработанный метод адекватно описывает физические процессы в излучателях эллипсоидальной формы.

Список литературы

1. Бессараб А. В., Гаранин С. Г., Мартыненко С. П., Прудкой Н. В., Солдатов А. В., Терехин В. А., Трутнев Ю. А. Генератор сверхширокополосного ЭМИ, иницируемый пикосекундным лазером // Докл. АН. 2006. Т. 411, № 5. С. 609–612.
Bessarab A. V., Garanin S. G., Martynenko S. P., Prudkoy N. V., Soldatov A. V., Terekhin V. A., Trutnev Yu. A. Generator sverkhshirokopolosnogo EMI, initsiiruemy pikosekundnym lazerom // Dokl. AN. 2006. T. 411, № 5. S. 609–612.
2. Бессараб А. В., Гаранин С. Г., Мартыненко С. П., Соловьёв А. А., Солдатов А. В., Терехин В. А., Трутнев Ю. А. Методы расчета генератора сверхширокополосного ЭМИ, иницируемого пикосекундным лазером // Там же. № 6. С. 758–761.
Bessarab A. V., Garanin S. G., Martynenko S. P., Solovyev A. A., Prudkoy N. V., Soldatov A. V., Terekhin V. A., Trutnev Yu. A. Metody raschyeta generatora sverkhshirokopolosnogo EMI, initsiiruемого pikosekundnym lazerom // Tam zhe. № 6. S. 758–761.
3. Голубев А. И., Долженков И. В., Солдатов А. В. Разностный метод вычисления распределения электромагнитного поля в полости параболического излучателя // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 3. С. 3–18.
Golubev A. I., Dolzhenkov I. V., Soldatov A. V. Raznostny metod vychisleniya raspredeleniya elektromagnitnogo polya v polosti parabolicheskogo izluchatelya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2008. Vyp. 3. S. 3–18.
4. Солдатов А. В. Эффективные граничные условия для задач электродинамики с приповерхностными источниками // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 5. С. 1–4.
Soldatov A. V. Effektivnyye granichnye usloviya dlya zadach elektrodinamiki s pripoverkhnostnymi istochnikami // Dokl. AN. 2007. T. 413, № 5. S. 1–4.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, 1970.
6. Holland R. THREDS: A finite-difference time-domain EMP code in 3D-spherical coordinates // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1983. Vol. NS-30, No 6. P. 4592–4595.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
Marchuk G. I. Metody vychislitelnoy matematiki. M.: Nauka, 1980.
8. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
Dzhekson Dzh. Klassicheskaya elektrodinamika. M.: Mir, 1965.

Статья поступила в редакцию 12.02.21.

AN ALGORITHM FOR NUMERICAL SIMULATION OF THE ULTRAWIDEBAND ELECTROMAGNETIC PULSE GENERATION AND PROPAGATION IN CAVITY OF ELLIPSOID OF REVOLUTION / I. V. Dolzhenkov, N. A. Kravets, A. V. Soldatov, E. S. Stolmakova (FSUE "RFNC-VNIIEF ", Sarov, N. Novgorod region).

A computational method based on the numerical solution of homogeneous 3D Maxwell's equations in elliptic coordinates for the electrodynamics simulation in the cavity of ellipsoid of revolution is presented.

The electromagnetic field sources are specified as boundary conditions on the interior surface of ellipsoid. Natural boundary conditions are used on the ellipsoid symmetry axis: 1) the electromagnetic and magnetic field components must remain limited; 2) vector components of the electromagnetic and magnetic fields oriented along axis of symmetry must not depend on the azimuthal angle.

Approximating formulas for spatial derivatives have been developed on the base of integral consequences of Maxwell's equations written for elementary difference-grid cells. For the time approximation of derivatives, the coordinate-wise splitting method is used. The resultant equations in each stage are solved with the sweep method.

The proposed method applicability and accuracy are demonstrated by results of computations for an informative problem having an analytical solution.

Key words: ultrawideband electromagnetic radiation, elliptic system of coordinates, Maxwell's equations, numerical simulation.
