

УДК 519.6

## АВТОМАТИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ МНОГОГРАННЫХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ СЕТОК С ПРИЗМАТИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

Н. В. Попова  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

При численном моделировании течений жидкости или газа, описываемых уравнениями Эйлера или Навье—Стокса, решению основных уравнений и анализу результатов предшествует построение расчетной сетки. Приводится описание автоматического генератора неструктурированных сеток из произвольных многогранников, получаемых на основе разбиения тетраэдров и призм.

Генерация объемной сетки осуществляется от границ поверхностной треугольной сетки, аппроксимирующей замкнутую расчетную область произвольной формы. Выделяются два основных этапа: построение первичной изотропной тетраэдральной сетки с призматическими слоями и построение вторичной многогранной сетки по гибридной схеме. Для построения призматической сетки применяется метод протягивания поверхностной треугольной сетки вдоль нормалей на заданное расстояние. Промежуточные узлы вычисляются по заданному закону распределения. Для построения тетраэдральной сетки применяется метод подвижного фронта. Предусматриваются области локального сгущения или разрежения ячеек. Преобразование к многогранной сетке осуществляется преимущественно по схеме *centroid dual*, вблизи поверхности в областях с геометрическими особенностями — по схеме *median dual*. Описывается классификация узлов первичной сетки и соответствующие способы формирования многогранных ячеек. Приводится результат построения сетки на примере соединительной детали трубопровода.

Генератор используется в препроцессоре пакета программ инженерного анализа и суперкомпьютерного моделирования "Логос".

*Ключевые слова:* пакет программ "Логос", препроцессор, неструктурированные сетки, произвольные многогранники, тетраэдральная сетка, призматический слой, триангуляция Делоне с ограничениями, *median dual*, *centroid dual*.

### Введение

Для моделирования течений жидкости и газа, описываемых уравнениями Эйлера (невязкая среда) или Навье—Стокса (вязкая среда), применяются различные типы сеток [1–4]. При использовании методов теории пограничного слоя [5] с разделением области течения на невязкую зону и пограничный слой широко применяются неструктурированные сетки. Неструктурированные пространственные сетки различаются по форме ячеек и методам построения. Это, например, многогранные сетки на основе адаптивного декартова шаблона, состоящие

из усеченных шестигранников и многоугольных призм [6]; сетки, состоящие из тетраэдров и треугольных призм вблизи поверхности тел [7]; многогранные сетки, состоящие из ячеек произвольной формы: ячеек Вороного для произвольно заданных центров [8, 9]; ячеек, полученных в результате перестроения первичной сетки [10–12]. Сетки из произвольных многогранников в последние два десятилетия широко применяются в расчетных областях высокой геометрической сложности (в ANSYS FLUENT [10], STAR-CCM+ [13] и др.). На рис. 1 изображены примеры поверхностей объемных сеток различных типов, генерация которых реализована в рамках

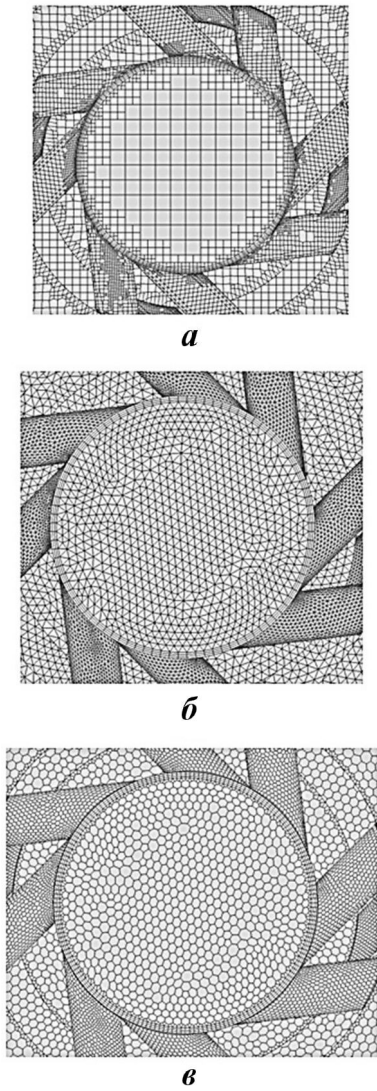


Рис. 1. Примеры поверхностей неструктурированных сеток: *a* — из усеченных шестигранников и многоугольных призм; *б* — из тетраэдров и треугольных призм; *в* — из произвольных многогранников

препроцессора пакета программ "Логос" [14, 15] для решения задач аэро- и гидродинамики.

В данной статье представлен метод построения многогранных сеток, состоящих из ячеек произвольной формы, не имеющих ограничений по количеству узлов и граней. Ячейки формируются на основе первичной сетки из тетраэдров и треугольных призм по гибридной схеме: преимущественно это *centroid dual* [1, 16], а вблизи поверхности в областях с геометрическими особенностями — *median dual* [16].

По схеме *median dual* узлами вторичной сетки (вершинами *двойственных* многогранных ячеек) являются центры тетраэдральных ячеек,

центры треугольных граней, середины ребер первичной сетки. Двойственная ячейка строится таким образом, что центры ячеек сетки с общим узлом соединены друг с другом через середины разделяющих их граней (рис. 2, *a*).

По схеме *centroid dual* узлы вторичной сетки — центры тетраэдров, а также центры граней и середины ребер на поверхности первичной сетки (рис. 2, *б*).

На рис. 3 изображены схемы разбиения тетраэдральной и призматической ячеек.

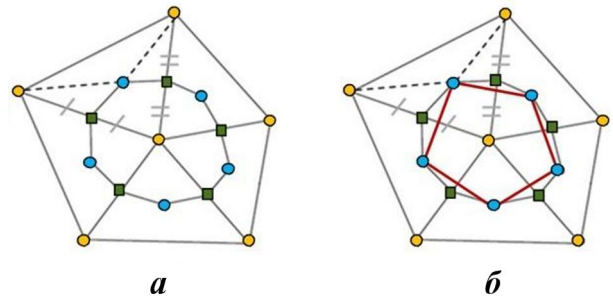


Рис. 2. Построение двойственной ячейки: *a* — по схеме *median dual*; *б* — по схеме *centroid dual*

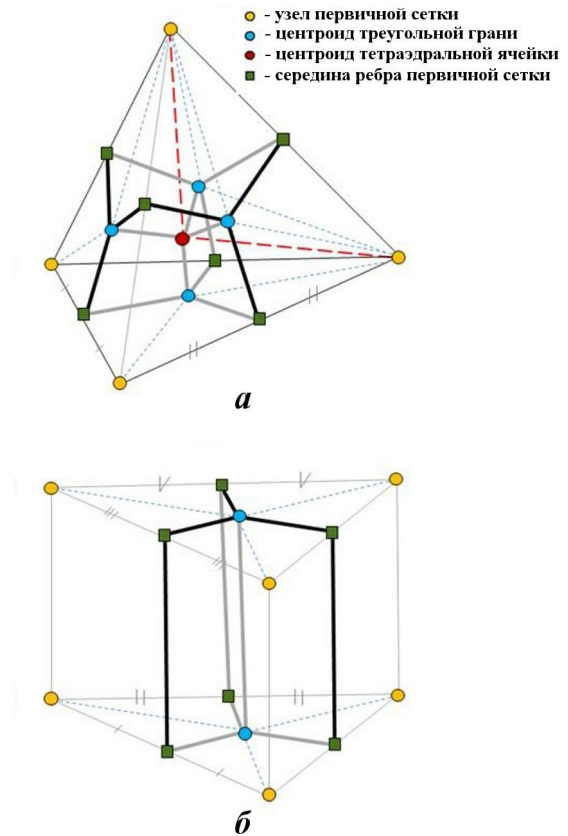


Рис. 3. Схемы разбиения: *a* — тетраэдральной ячейки; *б* — призматической ячейки

В программной реализации основной цикл выполняется по узлам первичной сетки: для каждого узла определяются типы соседствующих ячеек, ячейки разделяются, объединяются и формируются двойственные ячейки. Объединение вторичных сеток невязкой и пограничной зон производится естественным образом.

### Структура сетки, исходные данные и этапы построения

Пусть дана расчетная область  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  произвольной формы,  $\Omega = \Omega^P \cup \Omega^T$ , где  $\Omega^P$  — область вязкого течения вблизи поверхности обтекаемого тела,  $\Omega^T$  — область невязкого течения. Поверхность  $\Omega$  является замкнутой и аппроксимируется множеством треугольников  $B = (V, E)$ ,  $E = \{[\vec{v}, \vec{w}] : \vec{v}, \vec{w} \in V\}$ , где  $V$  — множество узлов,  $E$  — множество ребер.

Сетка, аппроксимирующая поверхность геометрической модели треугольными ячейками (треугольниками), разделена на границы:  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , где  $n$  — количество границ. Каждая граница представляет собой набор треугольников, для которых задано смещение, равное толщине пограничного слоя. Подвижной границей будем называть набор треугольников, для которого толщина пограничного слоя задана ненулевой.

От границ сетки  $B$  осуществляется построение первичной сетки  $G_{prim} = G^P \cup G^T$ , где  $G^P \subset \Omega^P$  — сетка из призматических ячеек,  $G^T \subset \Omega^T$  — сетка из тетраэдральных ячеек. Сетку  $G^T$  будем называть ядром первичной сетки.

Объемная (вторичная) сетка  $G_{dual}$  есть разбиение пространства на двойственные ячейки.

Каждая двойственная ячейка образуется множеством точек, координаты которых являются средними арифметическими координат узлов ребер, граней, ячеек первичной сетки.

Границы объемных сеток соответствуют границам исходной поверхностной сетки (рис. 4 [17]).

Пусть  $C = \{c_i\}$ ,  $C \subset \Omega$  — множество характерных кривых — ломаных линий  $c_i$ , проходящих по ребрам поверхностной сетки и описывающих особенности геометрической модели — линии стыковки границ, острые кромки и детали геометрии. При этом  $C = C^U \cup C^A$ , где  $C^U$  — характерные кривые, заданные пользователем;  $C^A$  — характерные кривые, определяемые автоматически в генераторе [6, 7]. Требованием к построению объемной сетки является учет характерных геометрических особенностей модели.

Для описания поверхностной сетки используется структура данных *узлы и треугольники* [18]. Для каждого треугольника хранятся три указателя на образующие его узлы и три указателя на соседние треугольники, а также целое число, соответствующее порядковому номеру границы. Для описания ячеек первичной объемной сетки хранятся указатели на узлы: четыре — для тетраэдра, шесть — для призмы. Вырожденные призмы первичной сетки и многогранники вторичной сетки описаны набором граней; каждой грани соответствует множество указателей на образующие ее узлы.

Начальными данными для построения объемной сетки из произвольных многогранников являются:

- точность модели (минимально допустимый размер ребра аппроксимации);
- характерные кривые  $C^U$ ;

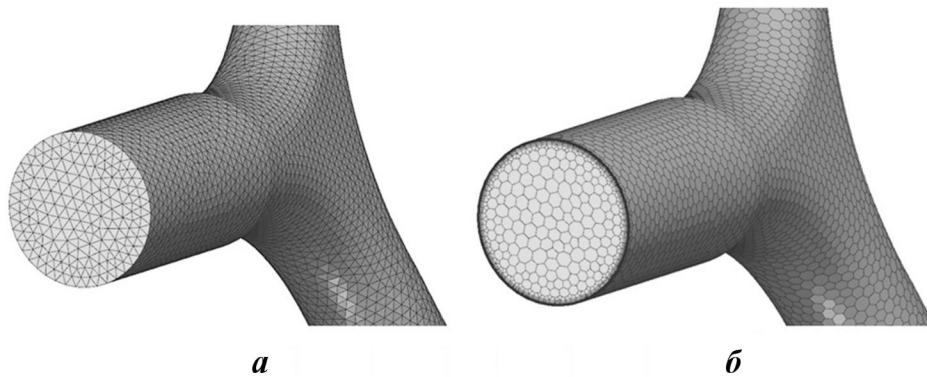


Рис. 4. Распределение граней по границам поверхностной аппроксимации модели (а) и на поверхности многогранной сетки (б)

- пороговый угол между треугольниками и пороговый дефицит угла  $d = 2\pi - \sum_i \alpha_i$ , где  $\alpha_i$  — угол между соседними ребрами треугольников, сходящихся в данном узле сетки  $B$ , для автоматического определения характерных кривых  $C^A$ ;
- толщина пограничного слоя для каждой границы  $b_i, i = \overline{1, n}$ ;
- количество  $N$  призматических слоев вблизи поверхности тела;
- коэффициент  $\lambda$  сгущения призматических слоев;
- максимальный размер  $l$  ребра тетраэдра первичной сетки  $G_{prim}$ ;
- тип и положение контрольной области  $H \subset \Omega^T$  (параллелепипед, конус, цилиндр, сфера, тонкостенные варианты данных тел, многогранник и ограниченное треугольной аппроксимацией произвольное геометрическое тело) для локального сгущения или разрежения ячеек тетраэдральной сетки;
- локальный размер  $l'$  ребра ячеек на поверхности и внутри контрольной области  $H \subset \Omega^T$  (при  $l' < l$  сгущение ячеек, при  $l' > l$  — разрежение).

Процесс генерации объемной неструктурированной многогранной сетки состоит из следующих этапов:

1. Построение первичной сетки  $G_{prim}$ :
  - 1) определение множества  $C$  характерных кривых;
  - 2) построение треугольной поверхностной сетки  $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ , смещенной относительно исходной сетки  $B$ ;
  - 3) построение призматической сетки  $G^P$  между подвижными границами исходной и смещенной поверхностных сеток;
  - 4) построение тетраэдральной сетки  $G^T$  от границ смещенной поверхностной сетки;
  - 5) объединение сеток  $G_{prim} = G^P \cup G^T$ ;
  - 6) формирование границ первичной объемной сетки:  $f : B \rightarrow B_{prim}, B_{prim} = \{b_{prim_1}, \dots, b_{prim_n}\}$ .
2. Построение вторичной сетки  $G_{dual}$ :
  - 1) классификация узлов первичной сетки;
  - 2) вычисление координат узлов вторичной сетки;
  - 3) формирование ячеек вторичной сетки;
  - 4) формирование границ многогранной сетки:  $g : B_{prim} \rightarrow B_{dual}, B_{dual} = \{b_{dual_1}, \dots, b_{dual_n}\}$ .

## Построение первичной сетки

При построении смещенной поверхности  $B'$  учитываются характерные кривые [6, 7]. Смещенная сетка строится методом протягивания вдоль нормалей, определенных в узлах исходной сетки  $B$ . На рис. 5 показано взаимное расположение исходной и смещенной сеток.

В некоторых областях исходной поверхности невозможно построить смещенную поверхность заданного качества. В таких случаях происходит *схлопывание* части смещенной поверхности  $B'$ , т. е. ее приближение к исходной поверхности  $B$ , при котором для подмножества узлов  $\{v'\}$  справедливо равенство  $\vec{v} = \vec{v}'$ , где  $\vec{v}, \vec{v}'$  — соответствующие узлы исходной и смещенной поверхностей. Схлопывание поверхности осуществляется при выполнении хотя бы одного из условий: 1) смещение в узле меньше минимального порогового значения; 2) угол между нормалью к плоскости треугольника и вектором смещения в одной из его вершин больше значения  $\sim \pi/2$ .

Призматическая сетка  $G^P$  формируется между поверхностной сеткой  $B$  и смещенной сеткой  $B'$ . Координаты узлов каждого слоя призматической сетки вычисляются по формуле  $\vec{v}_i = \vec{v}_B + (\vec{v}_{B'} - \vec{v}_B) \sigma_i$ , где  $\vec{v}_B, \vec{v}_{B'}$  — соответствующие узлы на сетках  $B, B'$ ;  $\sigma_i$  — коэффициент сдвига. При равномерном распределении слоев  $\sigma_i = i/N, i = \overline{1, N}$ , где  $N$  — количество слоев.

В противном случае  $\sigma_i = \frac{\lambda^i - 1}{\lambda^N - 1}, i = \overline{1, N-1}$ ,  $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ , где  $\lambda$  — коэффициент сгущения слоев. На основе упорядоченной последовательности узлов формируются призмы, основаниями которых являются треугольники  $i$ -го и  $(i + 1)$ -

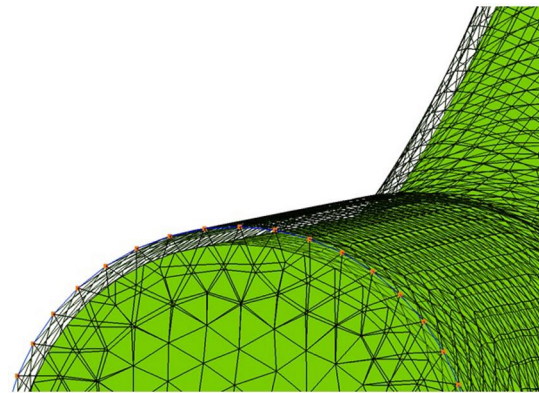


Рис. 5. Вид исходной сетки с наложением смещенной сетки



го слоев. Треугольная призма вырождается в пирамиду в особых узлах. Особый узел появляется, когда вектор смещения узлов исходной сетки остается неопределенным или когда хотя бы один узел треугольной призматической грани принадлежит множеству  $\{v'\}$ , т. е. нет возможности построить призму, удовлетворяющую критериям для расчета. На рис. 6 показаны фрагмент поверхности первичной сетки и вид призматических слоев при схлопывании смещенной сетки в особых узлах  $\vec{v}_{0_1}, \vec{v}_{0_2}$ .

Изотропная тетраэдральная сетка  $G^T$  строится от треугольников смещенной поверхности  $B'$  методом подвижного фронта в связке с критерием Делоне [19] внутрь области  $\Omega^T$  с размером ребра ячеек  $l$  [20]. Если задана контрольная область  $H$ , в которой осуществляется локальное сгущение или укрупнение ячеек, то при выполнении алгоритма построения тетраэдральной сетки последовательно формируются:

- 1) вспомогательная треугольная сетка  $B^H$  на поверхности контрольной области  $H$  с размером ребра ячеек  $l', l' \neq l$ ;
- 2) тетраэдральная сетка  $G^H$  внутри контрольной области  $H$  с ограничением  $B^H$  и максимальным размером ребра тетраэдров  $l'$ ;
- 3) тетраэдральная сетка  $G^T$  с ограничениями  $B', B^H$  и целевым размером  $l$ .

Первичная объемная сетка представляет собой объединение сеток  $G^P \cup G^T$  путем поиска и объединения ближайших узлов, удовлетворяющих условию  $|\vec{v}^P - \vec{v}^T| < \varepsilon$ , где  $\vec{v}^P, \vec{v}^T$  — узлы на поверхностях призматической и тетраэдральной сеток;  $\varepsilon$  — заданная точность. Сетки  $G^P, G^T$  согласуются по треугольникам смещенной сетки  $B'$ .

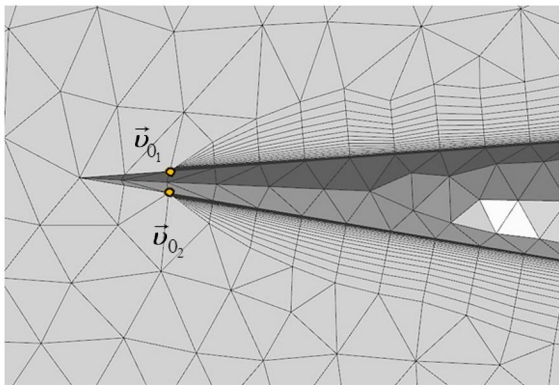


Рис. 6. Вид призматических слоев при схлопывании смещенной поверхности

Под формированием границ  $f : B \rightarrow B_{prim}$ ,  $B_{prim} = \{b_{prim_1}, \dots, b_{prim_n}\}$ , на поверхности первичной объемной сетки понимается распределение  $f$  поверхностных граней объемной сетки в соответствии с заданными границами модели  $b_1, \dots, b_n$ . Распределение осуществляется для каждой поверхностной грани объемной сетки путем поиска ближайшего треугольника границы  $b_i \in B$  исходной поверхности. Граница объемной сетки  $b_{prim_i}$  формируется из набора граней, для которых граница  $b_i$  является ближайшей.

На рис. 7, *a* изображено сечение первичной сетки с локальным измельчением в контрольной области в форме тонкостенного параллелепипеда, на рис. 7, *б* — сечение вторичной сетки.

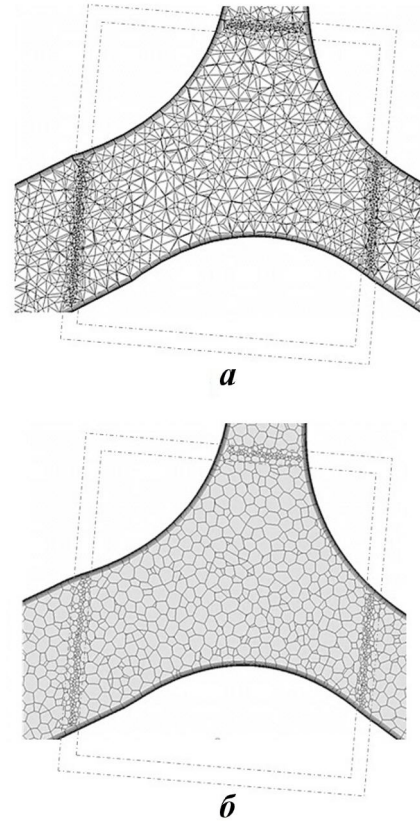


Рис. 7. Сечение объемных сеток с локальным измельчением: *a* — первичная сетка; *б* — вторичная сетка

### Построение вторичной сетки

Множество узлов вторичной сетки составляют:

- центроиды тетраэдральных ячеек;
- центроиды треугольных граней первичной сетки;

- середины некоторых ребер треугольных граней первичной сетки;
- узлы первичной сетки на негладкой поверхности, включая соответствующие узлы внутренних призматических слоев;
- узлы первичной сетки на краю смежных граней, включая соответствующие узлы внутренних призматических слоев;
- особые узлы первичной сетки.

Ячейка вторичной сетки в области  $\Omega^T$  формируется вокруг узла ядра первичной сетки, ячейка в области  $\Omega^P$  — вокруг ребра, соединяющего основания призмы, из так называемых *вкладов*.

Вклады — это замкнутые тела, на которые разбиваются тетраэдры и призмы первичной сетки. Любую грань вклада будем называть *опорной*.

Назовем опорную грань, находящуюся внутри первичной ячейки, *образующей*; опорную грань, лежащую на поверхности первичной ячейки, — *закрывающей*.

Для тетраэдральной ячейки количество образующих граней равно количеству ребер тетраэдра. Ребрами образующей грани относительно ребра  $V_1V_2$  первичной ячейки (рис. 8, а) являются два отрезка  $M_1C_1$ ,  $M_1C_2$ , соединяющие середину  $M_1$  данного ребра с центроидами  $C_1$ ,  $C_2$  граней тетраэдра, смежных по этому ребру, а также два отрезка  $OC_1$ ,  $OC_2$ , соединяющие центр  $O$  тетраэдра с  $C_1$  и  $C_2$ .

Количество замыкающих граней всех вкладов тетраэдральной ячейки равно  $3k$ , где  $k$  — количество граней ячейки. Ребрами замыкающей грани при тетраэдральной ячейке (рис. 8, б) являются два отрезка  $C_1M_1$ ,  $C_1M_2$ , соединяющие центр  $C_1$  грани тетраэдра с серединами  $M_1$ ,  $M_2$  ребер этой грани, имеющих общий узел  $V_1$ , а также два отрезка  $V_1M_1$  и  $V_1M_2$ .

Для призмы количество образующих граней равно количеству ребер основания. Ребрами образующей грани (рис. 9, а) являются отрезок  $C_1C_2$ , соединяющий центры треугольных оснований, отрезок  $M_1M_2$ , соединяющий середины

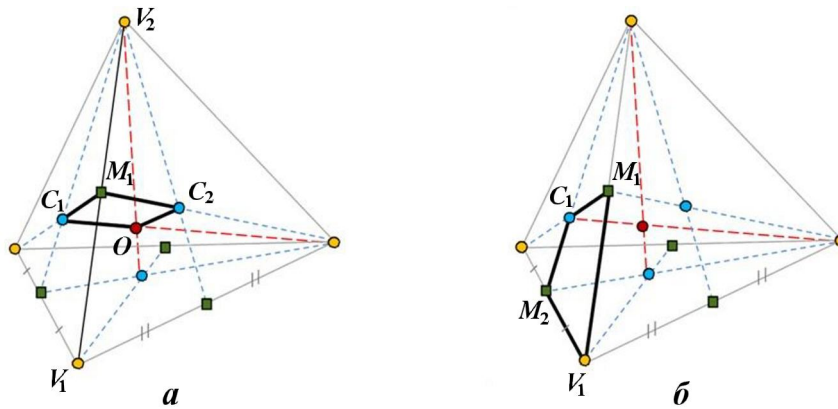


Рис. 8. Примеры опорных граней в тетраэдральной ячейке: а — образующая; б — замыкающая

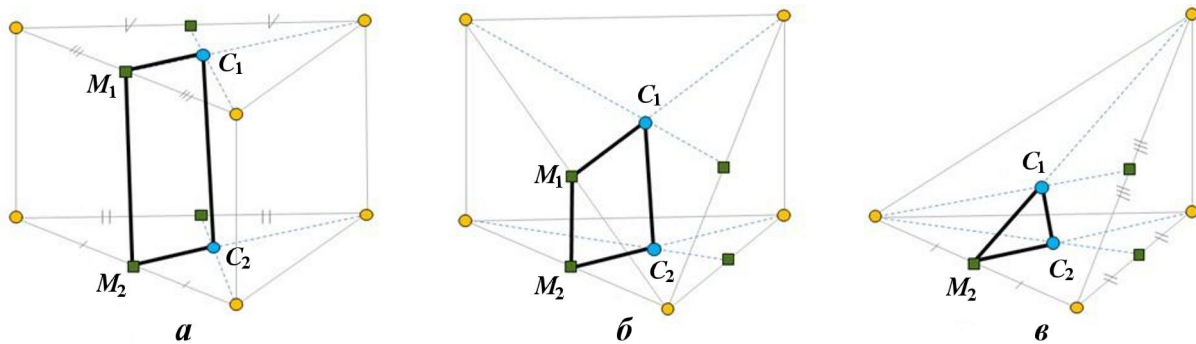


Рис. 9. Примеры образующих граней в призматической ячейке: а — без особых узлов; б — с одним особым узлом; в — с двумя особыми узлами

соответствующих ребер оснований, а также два отрезка  $M_1C_1$  и  $M_2C_2$ . На рис. 9, б, в изображены образующие грани для ячеек с особыми узлами.

Количество замыкающих граней всех вкладов призмы равно  $2p + 6$ , где  $p$  — количество боковых граней призмы. Замыкающая грань вклада при основании призмы образуется аналогично замыкающей грани вклада тетраэдра (например,  $C_1M_3V_1M_1$  на рис. 10, а, б и  $C_1M_2V_3M_4$  на рис. 10, в). Замыкающие грани при боковой грани призмы формируются добавлением отрезка, соединяющего середины соответствующих ребер оснований (например,  $M_1V_1V_2M_2$  на рис. 10, а, б и  $M_4V_3M_5$  на рис. 10, в).

Вклады формируются из опорных граней по приведенным далее схемам.

На рис. 11, а показана схема I формирования вклада тетраэдральной ячейки относительно узла. Вклад ячейки с узлами  $V_1, V_2, V_3, V_4$  в двойственную ячейку вокруг узла  $V_1$  составляет замкнутое тело, ограниченное образующими гранями  $OC_3M_1C_1, OC_2M_2C_3, OC_1M_3C_2$  и

замыкающими гранями  $V_1M_3C_1M_1, V_1M_2C_2M_3, V_1M_1C_3M_2$ , где  $C_1, C_2, C_3$  — центры треугольных граней с общим узлом  $V_1$ ;  $M_1, M_2, M_3$  — середины ребер с общим узлом  $V_1$ ;  $O$  — центроид тетраэдра. Вклады для узлов  $V_2, V_3, V_4$  формируются аналогично.

На рис. 11, б — схема II формирования вклада призматической ячейки относительно ребра. Вклад ячейки с узлами  $V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}$  вокруг ребра  $V_5V_8$  составляет замкнутое тело, ограниченное образующими гранями  $M_4M_6C_5C_4, M_5C_4C_5M_7$  и замыкающими гранями  $V_5M_4C_4M_5, V_8M_7C_5M_6, V_8M_6M_4V_5, V_5M_5M_7V_8$ , где  $C_4, C_5$  — центры треугольных оснований призмы;  $M_4, M_5, M_6, M_7$  — середины ребер, смежных с ребром  $V_5V_8$ . Вклады для ребер  $V_6V_9, V_7V_{10}$  формируются аналогично.

На рис. 12, а показана схема III формирования вклада вырожденной ячейки с одним особым узлом. Вклад ячейки с узлами  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  в двойственную многогранную ячейку вокруг особого узла  $V_3$  составляет замкнутое тело, ограниченное образующими гранями

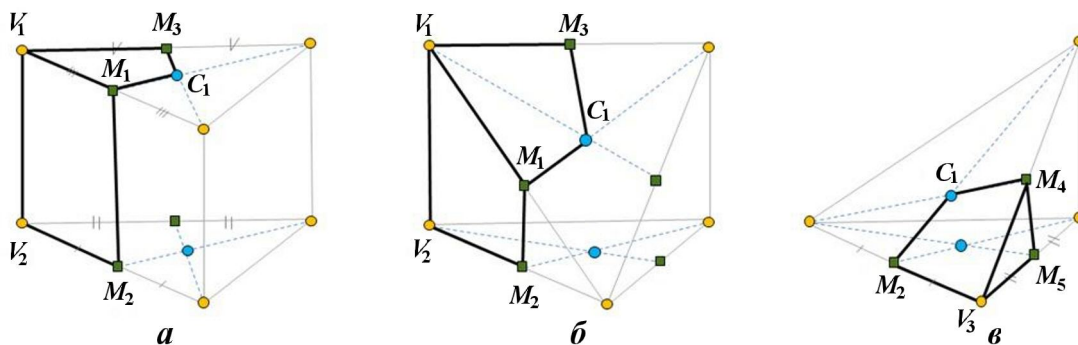


Рис. 10. Примеры двойственных замыкающих граней в призматической ячейке: а — без особых узлов; б — с одним особым узлом; в — с двумя особыми узлами

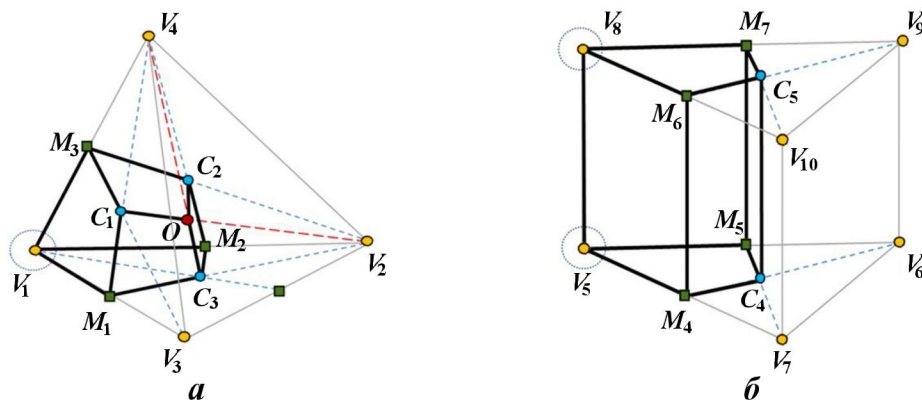


Рис. 11. Формирование вклада: а — внутри тетраэдра; б — внутри призмы

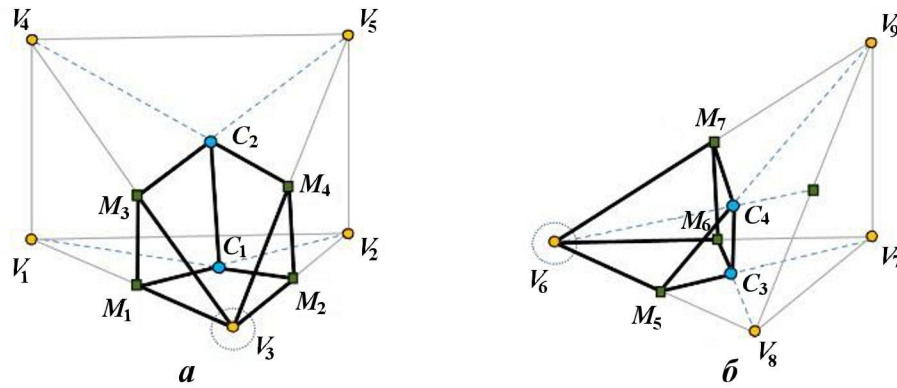


Рис. 12. Формирование вклада внутри вырожденной призмы с одним (а) и двумя (б) особыми узлами

$M_1M_3C_2C_1$ ,  $C_1M_2M_4C_2$ , замыкающими гранями  $V_3M_2C_1M_1$ ,  $V_3M_3C_2M_4$ ,  $V_3M_4M_2$ ,  $V_3M_1M_3$ , где  $C_1, C_2$  — центры треугольных оснований призмы;  $M_1, M_2, M_3, M_4$  — середины ребер оснований с общим узлом  $V_3$ . Для ребер  $V_1V_4, V_2V_5$  вклады формируются по схеме II.

На рис. 12, б — схема IV формирования вклада вырожденной ячейки с двумя особыми узлами. Вклад ячейки с узлами  $V_6, V_7, V_8, V_9$  вокруг узла  $V_6$  составляет замкнутое тело, ограниченное замыкающими гранями  $V_6M_7C_4M_5$ ,  $V_6M_5C_3M_6$ ,  $C_3C_4M_7M_6$ ,  $C_3M_5C_4$ ,  $V_6M_6M_7$ , где  $C_3, C_4$  — центры треугольных оснований;  $M_5, M_6, M_7$  — середины ребер с общим узлом  $V_6$ . Вклад для узла  $V_8$  формируется аналогично. Для ребра  $V_7V_9$  вклад формируется по схеме II.

Многогранная ячейка вторичной сетки в области  $\Omega^P$  в первом приближении является объединением  $\bigcup_{i=1}^p D_i^P$ , где  $p$  — количество призматических ячеек с общим боковым ребром, соединяющим основания призмы;  $D_i^P$  — вклад  $i$ -й призматической ячейки первичной сетки. Многогранная ячейка вторичной сетки в области  $\Omega^T$  в первом приближении является объединением  $\bigcup_{j=1}^t D_j^T$ , где  $t$  — количество тетраэдральных ячеек с общим узлом,  $D_j^T$  — вклад  $j$ -й тетраэдральной ячейки первичной сетки.

Полученные в результате объединения вкладов многогранники оптимизируются за счет уменьшения количества граней. Для любых двух ячеек, имеющих общую грань, выполняется обобщение их образующих граней, смежных по ребру общей грани. Образующие грани группируются вокруг ребра первичной сетки. Количество образующих граней для обобщения равно количеству ячеек первичной сетки, смежных по

ребру. На гладкой поверхности первичной сетки проводится обобщение замыкающих граней. На негладкой поверхности или на краю границ первичной сетки, включая внутренние призматические слои, замыкающие грани сохраняются. Сохранение опорных граней без обобщения будем называть *детализацией граней*. На рис. 13 изображен фрагмент поверхности многогранной сетки с обобщением и детализацией граней.

На рис. 14, а изображен многогранник без обобщения опорных граней на основе двух тетраэдральных ячеек с центроидами  $O_1, O_2$ .

На рис. 14, б, в показано обобщение граней. В общем случае обобщенная грань образующих граней формируется центроидами тетраэдров, смежных по ребру (грань  $O_1O_2C_4C_1$  на рис. 14, б). Обобщенная грань смежных замыкающих граней образуется центроидами треугольных граней с общим узлом первичной сетки (грань  $V_1M_3C_1C_4M_4$  на рис. 14, в).

На рис. 15, а изображен многогранник без обобщения граней на основе двух призматических ячеек. На рис. 15, б образующие грани обоб-

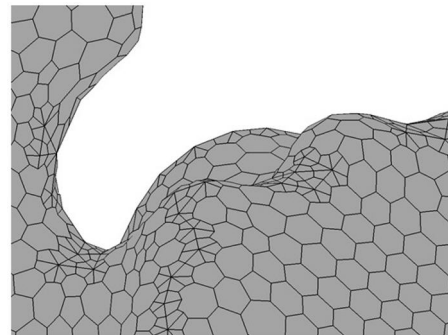


Рис. 13. Фрагмент поверхности многогранной сетки с обобщением и детализацией граней



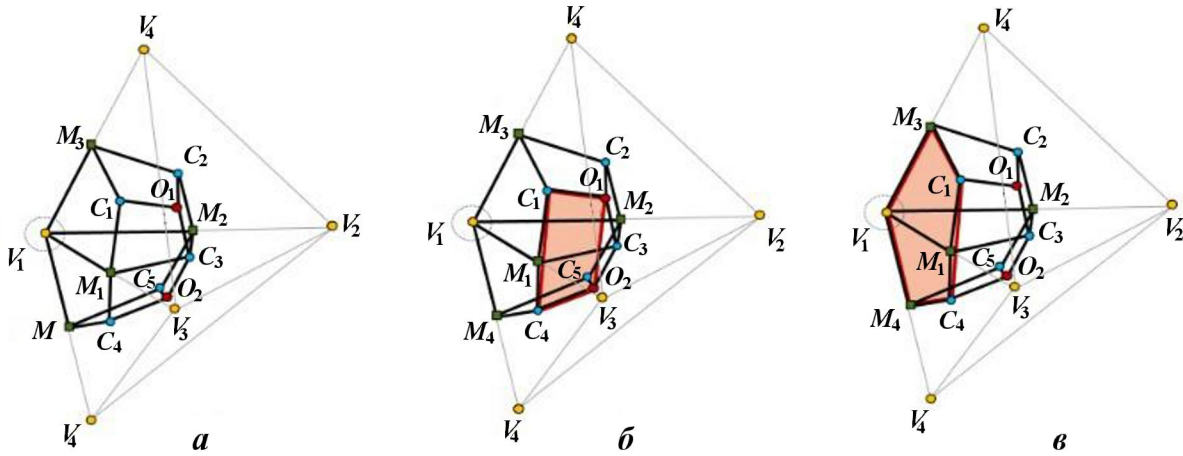


Рис. 14. Многогранники, построенные относительно узла: *a* — без обобщения опорных граней; *б* — с обобщением образующих граней; *в* — с обобщением замыкающих граней

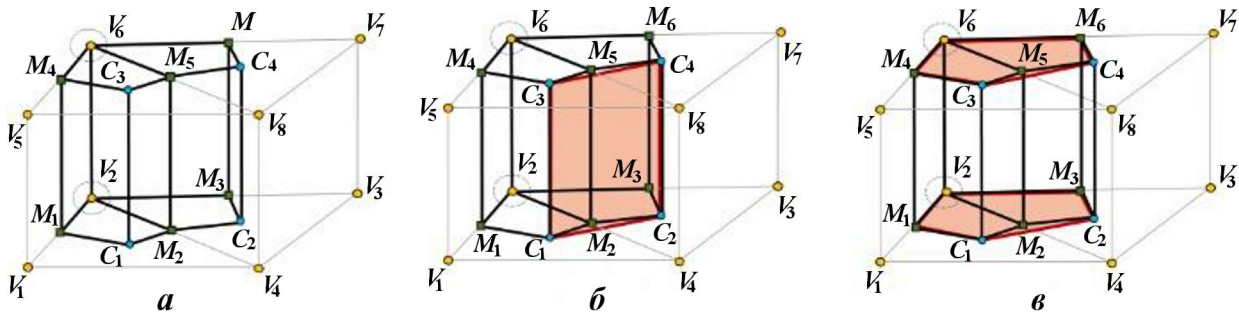


Рис. 15. Многогранники, построенные относительно ребра: *a* — без обобщения опорных граней; *б* — с обобщением образующих граней; *в* — с обобщением замыкающих граней

щаются в грань  $C_1C_3C_4C_2$ . Замыкающие грани призматических ячеек обобщаются аналогично граням тетраэдральных ячеек (рис. 15, в). Обобщение опорных граней для вырожденных призм не осуществляется.

При построении вторичной сетки узлы первичной сетки, вокруг которых формируются двойственные ячейки, классифицируются в зависимости от их положения (внутри ядра, на гладкой или негладкой поверхности, вблизи характерных особенностей или на краю смежных граней, включая внутренние призматические слои). Каждому узлу первичной сетки присваивается один из типов: *A* — *внутренний узел*; *B* — *внешний узел с обобщением*; *C* — *внешний узел с детализацией*.

Будем называть внутренними треугольными гранями первичной сетки те грани, по которым соседствуют две тетраэдральные ячейки. Будем называть внутренним узлом первичной сетки (типа *A*) тот узел, который принадлежит только внутренним граням. Остальные узлы сетки

считаем внешними (типа *B* или *C*). Внешним узлом с обобщением называется узел на гладкой поверхности, вокруг которого производится обобщение опорных граней. В противном случае узел считается внешним с детализацией. Узлам треугольных оснований вырожденных призматических ячеек присваивается тип *C*.

При построении вторичной сетки вокруг узла типа *A* или *B* формируется одна двойственная ячейка, вокруг узла типа *C* — одна или несколько. Для узлов типа *C* один многогранник с детализацией граней на негладкой поверхности формируется на краю смежных границ области  $\Omega^T$ , несколько — на краю смежных границ области  $\Omega^P$  или вокруг особых узлов. Формирование ячеек относительно узла, общего для тетраэдральных и призматических ячеек, проводится отдельно для каждого типа ячеек первичной сетки. Случай формирования нескольких многогранников вокруг ребра или узла будем называть *детализацией ячеек*, которая характеризуется сохранением вкладов.

На рис. 16 изображены примеры типовых многогранников, образованных из тетраэдров:  $D_1$  — внутри ядра,  $D_2$  — на поверхности ядра с обобщением,  $D_3$  — на поверхности ядра с детализацией. Многогранник  $D_1$  сформирован вокруг внутреннего узла  $A$  первичной сетки. Количество граней двойственной ячейки равно количеству ребер, исходящих из узла  $A$ . Узлами граней являются центроиды тетраэдров, смежных по ребру. Многогранник  $D_2$  построен относительно внешнего узла  $B$  с обобщением. Количество граней двойственной ячейки равно  $e + 1$ , где  $e$  — количество ребер, исходящих из узла  $B$ . Узлами внешней грани являются центроиды треугольных граней на поверхности. Многогранник  $D_3$  — относительно внешнего узла  $C$  с детализацией. Количество граней двойственной ячейки равно  $2e_1 + e_2$ , где  $e_1$  — количество внешних ребер, исходящих из узла  $C$ ,  $e_2$  — количество внутренних ребер, т. е. ребер, разделяющих внутренние грани. Узлами внешней грани являются центроиды и середины ребер треугольных граней на поверхности первичной тетраэдральной сетки.

На рис. 17 изображены примеры типовых многогранников из призматических ячеек сетки:

$D_4$  — на поверхности с обобщением,  $D_5$  — на поверхности с детализацией. Количество граней ячейки  $D_4$  с обобщением равно  $e + 2$ , где  $e$  — количество ребер, исходящих из узла  $B$ . Узел  $B$  является вершиной ребра первичной сетки, вокруг которого формируется ячейка в форме многоугольной призмы. Узлами оснований такой призмы являются центроиды треугольных граней. Относительно узла  $C$  сформировано множество двойственных четырехугольных призм. Узлами оснований являются непосредственно узел  $C$  первичной сетки, середины ребер с общим узлом  $C$ , центроиды треугольных граней.

На основе известного распределения поверхностных граней первичной сетки согласно границам исходной поверхностной сетки  $f : B \rightarrow B_{prim}$ ,  $B_{prim} = \{b_{prim_1}, \dots, b_{prim_n}\}$ , формируются границы на поверхности вторичной сетки:  $g : B_{prim} \rightarrow B_{dual}$ ,  $B_{dual} = \{b_{dual_1}, \dots, b_{dual_n}\}$ .

Пусть  $\{\vec{c}_\alpha\}$  — множество, состоящее из центроидов треугольных граней на поверхности первичной сетки, где  $\alpha$  — количество треугольных граней на поверхности. Каждому элементу данного множества ставится в соответствие порядковый номер границы  $i \in [1, n]$  первичной сетки

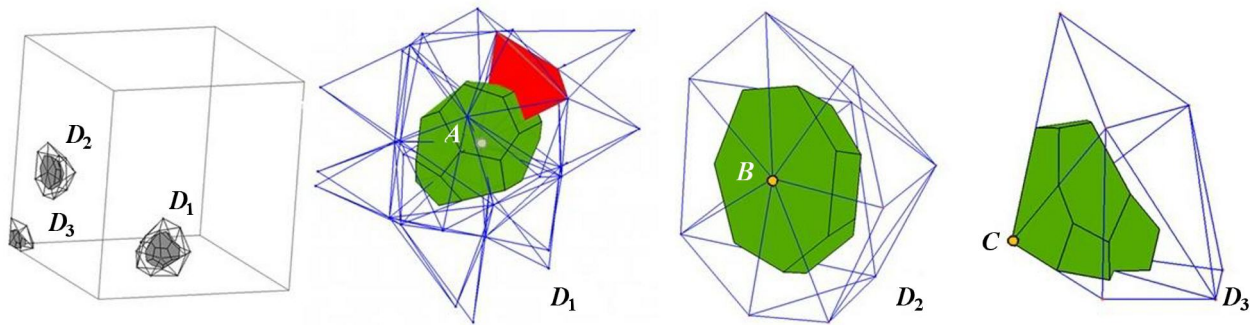


Рис. 16. Типы многогранников на основе тетраэдров

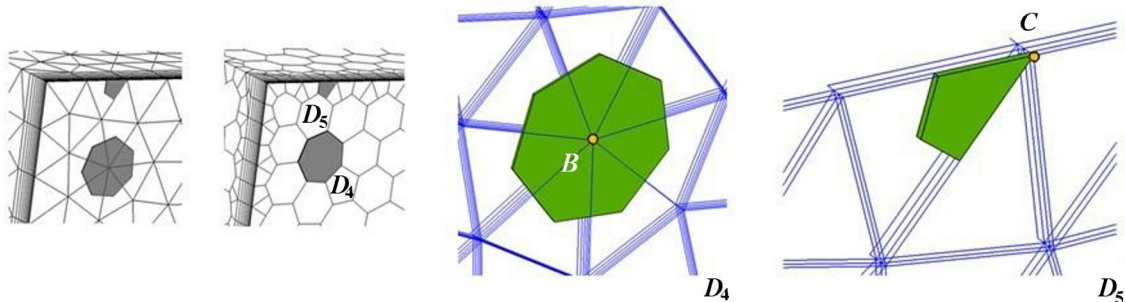


Рис. 17. Типы многогранников на основе призм

ки. Пусть  $\{\vec{m}_\beta\}$  — множество, состоящее из середин ребер четырехугольных граней призматических ячеек на поверхности первичной сетки, где  $\beta$  — количество ребер четырехугольных граней на поверхности. Каждому элементу данного множества ставится в соответствие набор порядковых номеров границ первичной сетки. Узлами грани на поверхности вторичной сетки являются в том числе элементы множеств  $\{\vec{c}_\alpha\}$  и  $\{\vec{m}_\beta\}$  (рис. 18). Грань вторичной сетки, основанной на треугольных гранях, принадлежит  $i$ -й границе, если хотя бы для одного узла грани  $\vec{c} \in \{\vec{c}_\alpha\}$  найдется соответствие  $(\vec{c}_\alpha, i)$ . Грань вторичной сетки, основанной на четырехугольных гранях, принадлежит  $i$ -й границе, если хотя бы для одного узла грани  $\vec{m} \in \{\vec{m}_\beta\}$  найдется соответствие  $(\vec{m}_\beta, (i, j))$ ,  $j \in [1, n]$ .

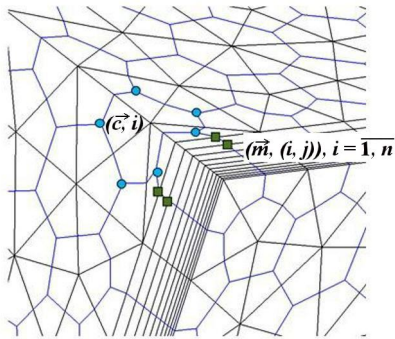


Рис. 18. Элементы множеств узлов  $\{\vec{c}_\alpha\}$ ,  $\{\vec{m}_\beta\}$  на поверхности для распределения граней по границам модели

### Оценка корректности многогранной сетки

В работе [1] описаны топологические и геометрические критерии, общие для сеток любого типа: появление узла на грани и грани в каждой ячейке не более одного раза, разделение двух ячеек не более чем одной гранью, топологическая замкнутость ячеек, положительность объемов ячеек, замкнутость границ, выпуклость и ориентация ячеек. В работе [21] отмечены такие свойства ячеек, как выпуклость, звездность (узлы ячейки находятся в прямой видимости из центра [22]), несамопересечение. В работе [23] упоминаются такие критерии, как округлость ячеек, мера неплоских граней, мера неортогональности грани и двойственного ей ребра, мера уклонения пересечения плоскости грани и двойственного узла от идеального положения (имеется в

виду ячейка Вороного). В работе [11] для проверки корректности многогранника применяется *звездчатый критерий (star-shaped test)*. Многогранник разбивается на тетраэдры соединением узлов каждого ребра с центроидом многоугольной грани и соединением полученных треугольников с центроидом многогранника [12]. Многогранник является корректным, если объем каждого тетраэдра является положительным.

В данном генераторе для контроля корректности сетки реализованы такие критерии, как замкнутость, связность ячеек путем поиска свободных ребер и граней сетки. В невыпуклых областях предусмотрена детализация граней и ячеек многогранной сетки.

### Пример построения объемной сетки

Для верификации генератора в рамках препроцессора пакета программ "Логос" была взята модель соединительной детали трубопровода [18]. На рис. 19 — вид объемной многогранной сетки на поверхности модели и на поверхности группы ячеек относительно плоскости сим-

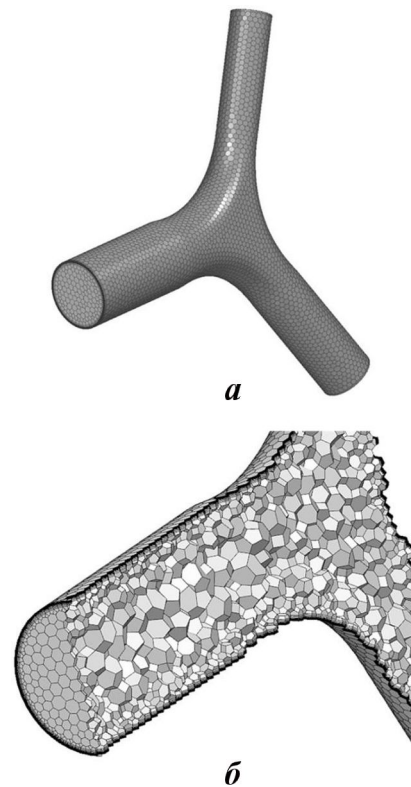


Рис. 19. Вид объемной сетки: *a* — на поверхности модели; *б* — на поверхности группы ячеек относительно плоскости симметрии

метрии. Поверхностная сетка содержит 5 тыс. узлов, 10 тыс. треугольных граней, объемная первичная сетка — 55 тыс. узлов, 130 тыс. ячеек, объемная многогранная сетка — 140 тыс. узлов, 60 тыс. ячеек. Время построения объемной многогранной сетки (ПК Intel Core i5-4440 CPU 3,10 GHz) — 10 с, из них 5 с — построение первичной сетки. Расход оперативной памяти 365 Мб. Многогранная сетка не имеет топологических и геометрических ошибок, для всех ячеек выполняется критерий *star-shaped test*.

### Заключение

В препроцессоре пакета программ "Логос", используемого для инженерного анализа и суперкомпьютерного моделирования в интересах высокотехнологичных отраслей промышленности и предприятий оборонно-промышленного комплекса, реализован генератор неструктурированных объемных сеток из произвольных многогранников для трехмерного моделирования течений жидкостей и газов. Генерация сетки в замкнутой области произвольной формы осуществляется в два основных этапа: 1) построение первичной тетраэдральной сетки с призматическими слоями [7]; 2) преобразование первичной сетки во вторичную многогранную сетку по гибридной схеме (*median dual, centroid dual*). Описан метод формирования двойственных ячеек с обобщением граней на примере пар первичных ячеек. Перечислены некоторые способы оценки корректности многогранной сетки. Приведен результат построения сетки для моделирования течения жидкости внутри соединительной детали трубопровода.

### Список литературы

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит, 2012.  
*Volkov K. N., Emelyanov V. N. Vychislitelnye tekhnologii v zadachakh mekhaniki zhidkosti i gaza. M.: Fizmatlit, 2012.*
2. Liseikin V. D. Grid Generation Methods. Scientific Computation. Second Edition. Springer, 2010.
3. Sadreghighi I. Mesh Generation in CFD. [https://www.researchgate.net/publication/318456955\\_Mesh\\_Generation\\_in\\_CFD](https://www.researchgate.net/publication/318456955_Mesh_Generation_in_CFD).

4. Blazek J. Computational Fluid Dynamics. Principles and Applications. Elsevier Science, 2001.
5. Прандтль Л. Теория несущего крыла. Часть I. Движение жидкости при очень малом трении. М., Ленинград: ГНТИ, 1931.  
*Prandtl L. Teoriya nesushchego kryla. Chast I. Dvizhenie zhidkosti pri ochen malom trenii. M., Leningrad: GNTI, 1931.*
6. Смолкина Д. Н., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Попова Н. В., Турусов М. Р. Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ "ЛОГОС" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 2. С. 25—39.  
*Smolkina D. N., Borisenko O. N., Cherenkova M. V., Giniyatullina A. G., Kuzmenko M. V., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Popova N. V., Turusov M. R. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh mnogogrannykh setok v preprotssore paketa programm "LOGOS" // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 2. S. 25—39.*
7. Попова Н. В., Борисенко О. Н., Корнеева И. И., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Лазарев В. В., Гиниятуллина А. Г. Автоматический генератор неструктурированных тетраэдральных сеток с призматическими слоями в препроцессоре пакета программ "ЛОГОС" // Там же. 2020. Вып. 1. С. 43—57.  
*Popova N. V., Borisenko O. N., Korneeva I. I., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Lazarev V. V., Giniyatullina A. G. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh tetraedralnykh setok s prizmaticheskimi sloyami v preprotssore paketa programm "LOGOS" // Tam zhe. 2020. Vyp. 1. S. 43—57.*
8. Ерёменко А. Ю., Мотлохов В. Н., Расказова В. В., Софронов И. Д. Методика решения задач трехмерной нестационарной газовой динамики на нерегулярных лагранжевых сетках // Там же. 1998. Вып. 4. С. 44—57.



- Eryemenko A. Yu., Motlokhov V. N., Rasskazova V. V., Sofronov I. D.* Metodika resheniya zadach tryekhmernoy nes-tatsionarnoy gazovoy dinamiki na neregulyarnykh lagranzhevyykh setkakh // Tam zhe. 1998. Vyp. 4. S. 44–57.
9. *Voropinin A. A., Sokolov S. S., Shmelёva A. K.* Построение трехмерной сетки на основе диаграммы Вороного в невыпуклых областях // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 2. С. 40–54.  
*Voropinin A. A., Sokolov S. S., Shmelёva A. K.* Postroenie tryekhmernoy setki na osnove diagrammy Voronogo v nevyuklyklykh oblastiakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 2. S. 40–54.
10. ANSYS: Converting the Domain to a Polyhedra. <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/node200.htm>.
11. *Garimella R. V., Kim J., Berndt M.* Polyhedral mesh generation and optimization for non-manifold domains // Proc. 22nd Int. Meshing Roundtable / Ed. by J. Sarrate and M. Staten. Springer International Publishing, 2014. P. 313–330.
12. *Balafas G.* Polyhedral Mesh Generation for CFD-Analysis of Complex Structures. Master Thesis. Technische Universitat Munichen, 2014.
13. STAR-CCM+: Siemens PLM Software. <https://mdx.plm.automation.siemens.com/star-ccm-plus>.
14. *Kozelkov A. S., Kurulin V. V., Tyatyushkina E. S., Puchkova O. L., Lashkin S. V.* Реализация метода расчета вязкой несжимаемой жидкости с использованием многосеточного метода на основе алгоритма SIMPLE в пакете программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 4. С. 44–56.  
*Kozelkov A. S., Kurulin V. V., Tyatyushkina E. S., Puchkova O. L., Lashkin S. V.* Realizatsiya metoda raschyeta vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti s ispolzovaniem mnogosetochnoy metoda na osnove algoritma SIMPLE v pakete programm LOGOS // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2013. Vyp. 4. S. 44–56.
15. *Фархутдинов В. Ф., Тарасов В. И., Соловьёв А. Н., Борисенко О. Н., Лазарев В. В., Логинов Д. В., Аверина Н. С., Марунин А. В., Гриднев А. И., Федякина М. Г., Кузнецов М. Г., Черенкова М. В., Фролова Е. А., Лукичев А. Н., Смолкина Д. Н., Купалова А. Г., Кузьменко М. В., Ховрин Н. А., Сергеева А. С., Попова Н. В., Баканова Т. Ю.* Обзор возможностей по обработке геометрических и построению сеточных моделей в ЛОГОС.Препост // Тр. XIV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 585–592.  
*Farkhutdinov V. F., Tarasov V. I., Solov'yev A. N., Borisenko O. N., Lazarev V. V., Loginov D. V., Averina N. S., Marunin A. V., Gridnev A. I., Fedyakina M. G., Kuznetsov M. G., Cherenkova M. V., Frolova E. A., Lukichyev A. N., Smolkina D. N., Kupalova A. G., Kuzmenko M. V., Khovrin N. A., Sergeeva A. S., Popova N. V., Bakanova T. Yu.* Obzor vozmozhnostey po obrabotke geometricheskikh i postroeniyu setochnykh modeley v LOGOS.Prepост // Тр. XIV Mezhd. конф. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2013. S. 585–592.
16. *Barth T. J.* Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations // VKI Lecture Series. 1994. No 1994-05.
17. Design Community, CAD Library, 3D Printing Software: GrabCAD. <https://grabcad.com>.
18. *Скворцов А. В.* Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.  
*Skvortsov A. V.* Triangulyatsiya Delone i ee primenenie. Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 2002.
19. *Делоне Б. Н.* О пустоте сферы // Изв. АН СССР, ОМЭН. 1934. № 4. С. 793–800.  
*Delone B. N.* O pustote sfery // Izv. AN SSSR, OMEN. 1934. № 4. S. 793–800.
20. Computing objects: CM2MeshTools. <https://www.computing-objects.com>.
21. *Новиков И. Г., Панов А. И., Соколов С. С.* Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения дифференци-

- руемых связей // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2005. Т. 45, № 8. С. 1487–1500.  
*Novikov I. G., Panov A. I., Sokolov S. S.* Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения дифференцируемых связей // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 2005. Т. 45, № 8. С. 1487–1500.
22. *Сokolov S. S., Panov A. I., Voropinov A. A., Novikov I. G., Sobolev I. V., Yalozo A. V.* Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов 2005. Вып. 3. С. 37–52.  
*Sokolov S. S., Panov A. I., Voropinov A. A., Novikov I. G., Sobolev I. V., Yalozo A. V.* Metodika TIM raschyeta tryekhmernykh zadach mekhaniki sploshnykh sred na nestrukturirovannykh mnogogrannykh lagranzhevyykh setkakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
23. *Гаранжа В. А., Кудрявцева Л. Н., Цветкова В. О.* Построение гибридных расчетных сеток Вороного. Алгоритмы и нерешенные проблемы // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2019. Т. 59, № 12. С. 2024–2044.  
*Garanzha V. A., Kudryavtseva L. N., Tsvetkova V. O.* Postroenie gibridnykh raschyetnykh setok Voronogo. Algoritmy i nereshyennyye problemy // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 2019. Т. 59, № 12. С. 2024–2044.

Статья поступила в редакцию 03.03.21.

AUTOMATIC GENERATOR OF UNSTRUCTURED POLYHEDRAL MESHES ON THE BASE OF TETRAHEDRAL MESHES WITH PRISMATIC LAYERS / N. V. Popova ((FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

In the numerical simulation of fluid flows described by Eulerian, or Navier-Stokes equations the computational mesh generation is performed prior to the solution of basic equations and analysis of results. The paper describes an automatic generator of unstructured meshes consisting of arbitrarily-shaped polyhedrons on the base of partitioning tetrahedrons and prisms.

A 3D mesh is generated beginning from the boundaries of a surface triangular mesh approximating an arbitrary closed computational domain. There are two main stages of the process: generation of a primary isotropic tetrahedral mesh with prismatic layers and generation of a secondary polyhedral mesh using a hybrid scheme. To build a prismatic mesh, the method of stretching a surface triangular mesh at a given distance along normals is used. Intermediate nodes are calculated according to the given distribution law. To build a tetrahedral mesh, the method of a moving front is used. Local areas of concentrated, or coarsened cells are provided for. The transformation into a polyhedral mesh is primarily performed using the *centroid dual* scheme and the near-surface transformation in regions with specific geometric features is performed using the *median dual* scheme. Classification of the primary mesh nodes and the corresponding ways of generating polyhedral cells are described. The mesh generation result is presented by the example of a joining piece of pipeline.

The automatic mesh generation is used in the preprocessor of the "Logos" software package for engineering analysis and supercomputer simulation.

*Key words:* "Logos" software package, preprocessor, unstructured meshes, arbitrarily-shaped polyhedrons, a tetrahedral mesh, a prismatic layer, Delaunay triangulation with restrictions, *median dual*, *centroid dual*.

---