

УДК 519.6

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ГАЗОВОЙ ЦЕНТРИФУГЕ.  
ЧАСТЬ 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ  
МОДЕЛЬНОЙ ЦЕНТРИФУГИ "ИГУАССУ"**

Ю. В. Янилкин, В. П. Стаценко, Ю. Д. Чернышёв, С. П. Беляев,  
В. Ю. Колобянин, А. В. Кондрашенко, О. О. Топорова, И. Ю. Турутина  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Данная статья является продолжением первой части работы авторов, посвященной трехмерному численному моделированию течений в газовой центрифуге. Во второй части приводятся описание шести трехмерных и двумерных тестовых задач для однокамерной и двухкамерной модельной центрифуги "Игуассу" и результаты их моделирования по трехмерной методике, описание которой дано в первой части работы. Рассмотрены следующие задачи: твердотельное вращение газа с постоянной температурой; установление твердотельного вращения; газодинамическая задача с учетом теплопроводности, для которой получено аналитическое решение; однокамерная модель ротора газовой центрифуги, для которой также получено аналитическое решение; задача с двухкамерной моделью ротора газовой центрифуги, в которой исследовалось влияние места сшивки двумерной и трехмерной областей решения и сходимость численного решения при измельчении счетной сетки; одномерная диффузионная задача с аналитическим решением. Для всех тестов получено приемлемое согласие с аналитическими решениями.

*Ключевые слова:* газодинамическая центрифуга, центрифуга "Игуассу", разделительная камера, отборная камера, отвальная камера, вязкая жидкость, теплообмен, численное моделирование.

### Введение

Численное моделирование течений в газовой центрифуге (ГЦ) представляет собой достаточно сложную задачу. В настоящее время известно несколько двумерных (2D) методов моделирования течений в разделительной камере [1–3]. Что касается трехмерных (3D) течений в отборной и отвальной камерах, то для их расчетов используют приближенные граничные условия на границе с разделительной камерой [3]. 3D расчет [4] был выполнен лишь для части отборной камеры и части отборника с использованием приближенных граничных условий на границе счетной области.

В первой части работы авторов [5] предложена физико-математическая модель и численная методика для сквозного 3D моделирования течений в ГЦ, в которой учитывается газодинамическое движение рабочего газа и конвективный перенос тепла в нем. Эта модель построена на основе полной (с учетом теплопроводности) модели теплопереноса в газе и отборнике, а также вязкого теплообмена между газом и стенками ГЦ. Аппроксимация уравнений производится в специальной декартово-цилиндрической системе координат.

Данная работа является продолжением работы [5] и содержит результаты 3D и 2D численного моделирования течения газа в однокамерной и двухкамерной моделях ротора ГЦ с параметрами, характерными для модельной центрифуги "Игуассу" [6].

## Общая постановка расчетов центрифуги

В данной работе используются основные положения, принятые в [6]. У боковой стенки ротора давление гексафторида урана ( $\text{UF}_6$ ) должно быть  $p_0 \lesssim 100$  мм рт. ст. При радиусе ротора  $R \lesssim 10$  см свободный пробег молекул на некотором радиусе  $r = r_1$  становится сравним с радиусом ротора, если давление при  $r = r_1$  на шесть порядков меньше  $p_0$ . Это происходит при  $r_1 \approx 0,8R$ . В данной работе полагается (см. [5]), что уравнения газовой динамики, теплопроводности и диффузии применимы всюду. Именно так в [6] получено аналитическое выражение для профиля давления в поле центробежных сил (см. далее тест 1), а также приближенное аналитическое решение для движения газа вблизи боковой стенки длинного цилиндра (см. далее тест 2).

В расчетах данной работы коэффициент диффузии  $\text{UF}_6$  определяется эмпирическим соотношением [6, 7]  $\rho D = 1,117 \cdot 10^{-6} T^{0,925}$ . Здесь и далее, где не указано, температура измеряется в К, единицы измерения остальных величин — в системе СГС (г, см, с). Коэффициент теплопроводности [6, 7]  $\lambda = 6,07 \cdot 10^2 [1 + 0,0045(T - 273)]$ ; удельная теплоемкость  $c_p = 3,857 \cdot 10^6 + 943,9T - \frac{3,814 \cdot 10^{10}}{T^2} \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{К}}$ ; коэффициент вязкости [6, 7]  $\eta = 0,865 \cdot 10^{-6} T^{0,928}$ . Уравнение состояния  $p = \rho \varepsilon(\gamma - 1)$ , где  $\gamma = 1,0659 + 0,0067 \cdot 10^{-6} p$ ; для гексафторида урана более точным является выражение [6, 7]  $p(1 + Ap) = \rho \frac{R_0}{M} T$ , где  $A = 1,217/T^3$ ;  $M = 352$  г/моль — молярная масса гексафторида урана (для  $^{238}\text{U}$ );  $R_0 = 8,314 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{(\text{К} \cdot \text{моль})}$  — универсальная газовая постоянная.

Все расчеты проводились на неподвижной цилиндрической счетной сетке, схематически показанной на рис. 2, б в [5]. В областях отборной и отвалной камер, где течение 3D, эта сетка занимает всю пространственную область, в области 2D течения в разделительной камере — лишь несколько ячеек по углу. При этом в угловом направлении в том и другом случае реализуются циклические граничные условия.

### Тест 1. Твердотельное вращение газа с постоянной температурой

Расчетная область показана на рис. 1.

Все границы вращаются с угловой скоростью  $\Omega_0 = 1,1 \cdot 10^4$  рад/с. Граничные условия по газовой динамике: на всех указанных границах — условие прилипания, а также условие непротекания (*жесткая стенка*).

В начальный момент ( $t = 0$ ) компоненты скорости  $u_z = 0$ ,  $U_r = 0$ ,  $U_\varphi = \Omega_0 r$ ; температура  $T_0 = 312$  К. Начальные распределения давления и плотности газа брались из аналитического решения для газа с температурой  $T_0$ , вращающегося как твердое тело [7]:

$$p(r) = p_0 F_0(r); \quad \rho(r) = \rho_0 F_0(r).$$

Здесь

$$F_0(r) \equiv \exp\left(A \frac{r^2 - a^2}{a^2}\right), \quad A = \frac{M \Omega_0^2 a^2}{2 R_0 T_0},$$

$M = 352$  г/моль — молярная масса  $^{238}\text{UF}_6$ ;  $p_0$ ,  $\rho_0$  — начальные значения давления и плотности на боковой стенке ротора ( $r = a$ ) (см. рис. 1):

$$\rho_0 = \frac{M p_0}{R_0 T_0}; \quad p_0 = 1,6275 \cdot 10^5 \text{ дин/см}^2.$$

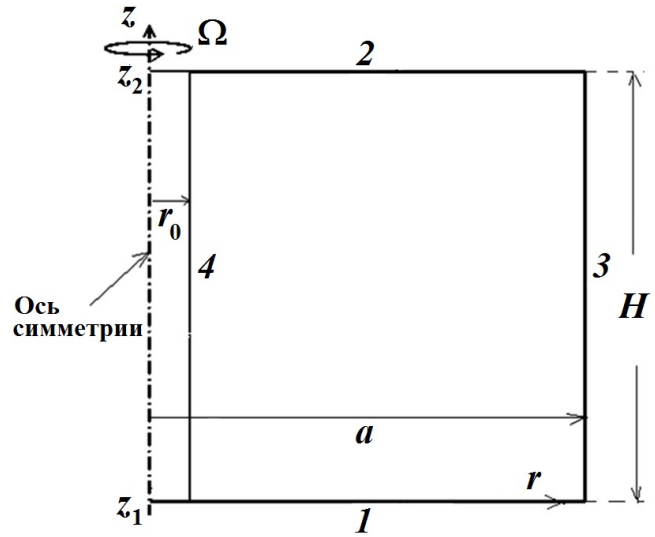


Рис. 1. Геометрия системы в тесте 1: 1 — нижний торец ротора; 2 — верхний торец; 3 — боковая стенка; 4 — внутренняя цилиндрическая поверхность

Рассматривается область высотой  $H = 6$  с радиусами  $r_0 = 1,5$ ,  $a = 6,5$  и углом  $\varphi = 6^\circ$ . Расчеты проведены на двух сетках:  $N_z \times N_r \times N_\varphi = 104 \times 72 \times 6$  (расчет  $N$ ) и  $340 \times 240 \times 6$  (расчет  $2N$ ).

На рис. 2 приводятся профили плотности в логарифмическом масштабе и радиальной компоненты скорости для обоих расчетов. Как видно, они практически совпадают с начальным распределением независимо от сетки, т. е. имеется хорошее согласие между численными и аналитическим решениями.

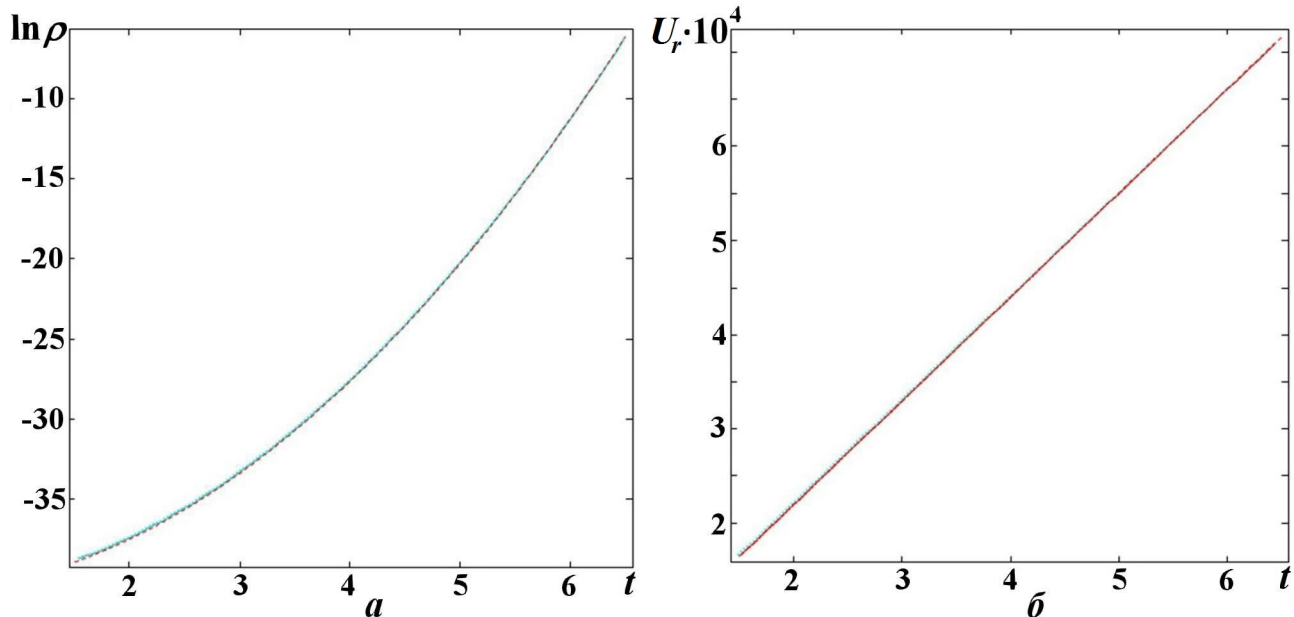


Рис. 2. Тест 1. Профили логарифма плотности (а) и радиальной компоненты скорости (б):  $-\cdot-\cdot-$  —  $t = 0$ ;  $\cdots$  —  $t = 0,1$  (расчет  $N$ );  $—$  —  $t = 0,04$  (расчет  $2N$ )

### Тест 2. Установление твердотельного вращения

Отличие теста 2 от теста 1 — лишь в начальном профиле логарифма плотности: он — линейный по радиусу (рис. 3, а). Как видно из рис. 3, а, при расчете даже на самой грубой сетке (расчет  $N$ ) уже к моменту  $t = 0,02$  устанавливается профиль логарифма плотности, практически совпадающий с аналитическим решением для твердотельного вращения. Для более подробных сеток время установления еще меньше.

Задача была также смоделирована в двухобластной постановке, в которой тестируется способ разбиения задачи на две области [5] — 2D и 3D; в соответствии с этим рассматривались две счетные области. В 2D области в силу предполагаемой осевой симметрии использовалось лишь 6 ячеек по углу, т. е. по существу решалась 2D задача. 2D область имела длину  $z = 0 \div 4,75$  с  $r_0 = 1,5$ ,  $a = 6,5$ . Бралась счетная сетка  $N_z \times N_r \times N_\varphi = 76 \times 72 \times 6$ , при этом по углу она соответствовала сетке из 3D области. В 3D области ( $z = 4,26 \div 6$ ) бралось 192 узла по углу  $\varphi$ , т. е. решалась полная 3D задача:  $N_z \times N_r \times N_\varphi = 28 \times 72 \times 192$ .

Как видно из рис. 3, б, в двухобластной постановке время установления аналитического решения несколько увеличивается по сравнению с однообластной постановкой, но к моменту  $t = 0,04$  устанавливается профиль логарифма плотности, практически совпадающий с аналитическим решением в среднем сечении как первой, так и второй области.

### Тест 3. Газодинамический тест с учетом теплопроводности

**Постановка задачи.** Газодинамическая постановка задачи соответствует тесту 1. Дополнительно в задаче учитывается теплопроводность. Граничные условия по теплу: на границе 1 (см. рис. 1)

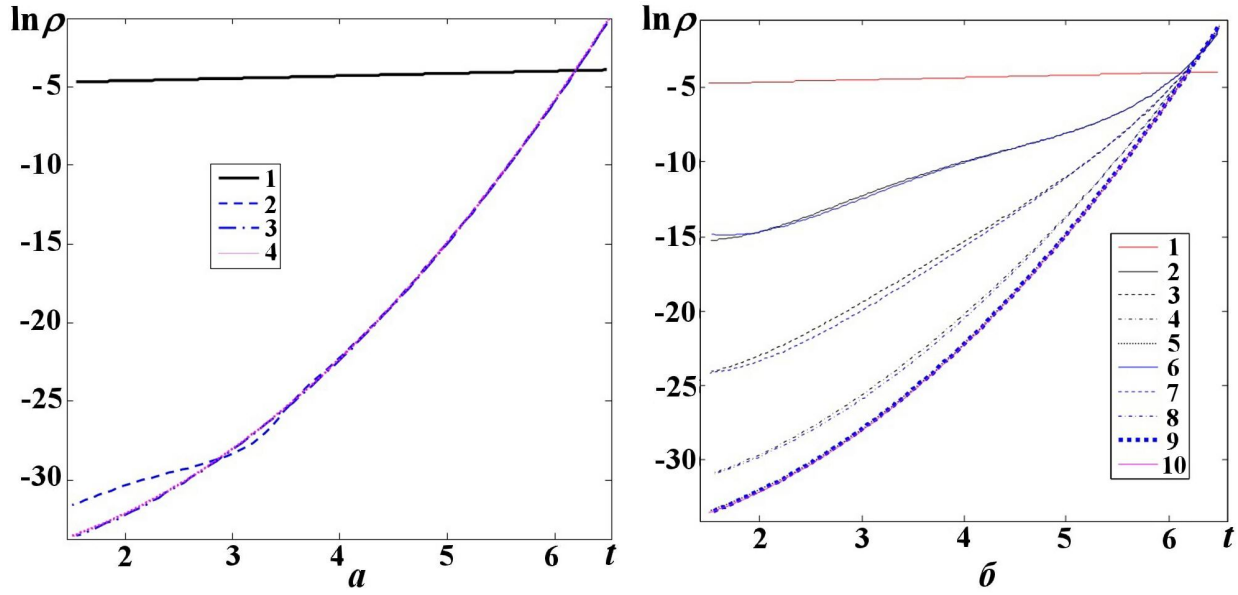


Рис. 3. Тест 2. Профили логарифма плотности:  $a$  — однообластной расчет  $N$ : 1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 0,01$ ; 3 —  $t = 0,02$ ; 4 — аналитическое решение;  $b$  — двухобластной расчет: 1 —  $t = 0$ ; 2–5 — 2D область: 2 —  $t = 0,005$ ; 3 —  $t = 0,015$ ; 4 —  $t = 0,0226$ ; 5 —  $t = 0,04$ ; 6–9 — 3D область: 6 —  $t = 0,005$ ; 7 —  $t = 0,015$ ; 8 —  $t = 0,0226$ ; 9 —  $t = 0,04$ ; 10 — аналитическое решение

$T = T_1$ , на границе 2  $T = T_2$ , на границах 3 и 4

$$T(z) = T_1 + \Delta T \frac{z - z_1}{H}, \quad H = z_2 - z_1, \quad \Delta T = (T_2 - T_1).$$

В газе начальная температура  $T_0(r, z) = T(z)$ .

Начальные распределения плотности и давления газа брались из квазистационарного решения для твердотельного вращения.

В расчетах приняты значения  $\rho_{00} = \rho_0 \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = 1,72574 \cdot 10^{-3}$  и  $p_0 = 1,27 \cdot 10^5$ , что соответствует средней температуре  $T_0 = \frac{T_2 + T_1}{2} = 312$  К. Это дает газосодержание (для идеального газа и

$$A_0 \ll 1, \text{ где } A_0 \equiv A \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right))$$

$$m \approx \frac{\pi H \rho_{00} a^2}{A_0} \left( 1 - \exp \left( A_0 \frac{r_0^2 - a^2}{a^2} \right) \right) \approx \frac{2\pi H \rho_{00}}{\Omega^2} \approx 0,35.$$

**Приближенное аналитическое решение.** При получении приближенного аналитического решения [3] для тонкого слоя (слой Стюартсона) вблизи боковой стенки ротора длинной центрифуги исходим из упрощений, описанных в [6]. При этом уравнение для осевой компоненты скорости  $u_z$ , которая не зависит от координаты  $z$  (решение рассматривается для точек вдали от торцов), имеет вид [6]

$$\frac{d^3 w}{d\xi^3} + \frac{d^2 w}{d\xi^2} = B e^{-\xi}, \quad (1)$$

где  $w \equiv \frac{u_z}{\Omega a}$ ;  $\xi \equiv A_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ ;  $B \equiv \frac{b}{8A_0^3 E_k}$ ,  $b \equiv \frac{a}{T_0} \frac{\Delta T}{H}$ ,  $E_k = \frac{\mu}{\rho_{00} \Omega a^2}$  — число Экмана,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости.

Как показано в [6], решение уравнения (1) имеет вид

$$w = B\xi e^{-\xi} + c_1(\xi - 1) + c_2 + c_3 e^{-\xi}. \quad (2)$$

Константы интегрирования находятся из трех граничных условий.

Первое условие — прилипания на боковой стенке  $\mathcal{Z}$  ротора (см. рис. 1) — означает, что

$$w(\xi = 0) = 0.$$

Тогда из (2) следует

$$c_1 = c_2 + c_3,$$

что позволяет записать (2) в виде

$$w = B\xi e^{-\xi} + c_1\xi + c_3(e^{-\xi} - 1). \quad (3)$$

Второе граничное условие отличается от принятого в [6], где предполагалось отсутствие конструкций на оси. Здесь учитывается наличие твердой трубки на оси, для поверхности  $\mathcal{4}$  которой (см. рис. 1) запишем условие прилипания

$$w(\xi = \xi_0) = 0, \quad \xi_0 \equiv A_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2}\right).$$

С учетом (3) имеем

$$c_1 = \frac{c_3}{\xi_0} (1 - e^{-\xi_0}) - B e^{-\xi_0}. \quad (4)$$

Третье условие — закон сохранения массы в безотборном режиме, который имеет вид [6]

$$L = 0 = \int_{r_0}^a \rho(r) u_z 2\pi r dr. \quad (5)$$

Принятые приближения означают, что плотность  $\rho(r)$  можно записать в виде

$$\rho(r) = \rho_{00} F_0(r),$$

где

$$F_0(r) \equiv \exp\left(A_0 \frac{r^2 - a^2}{a^2}\right) = e^{-\xi}.$$

Тогда (5) принимает вид

$$\int_{r_0}^a \rho_{00} e^{-\xi} u_z 2\pi r dr = \frac{\pi \rho_{00} \Omega a^3}{A_0} \int_0^{\xi_0} w e^{-\xi} d\xi = 0.$$

Отсюда и из выражений (3), (4) получаем формулу для  $c_3$ :

$$c_3 = \frac{B \left[ e^{-\xi_0} - e^{-2\xi_0} \left( \frac{\xi_0}{2} + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{4} \right]}{\frac{1 - e^{-\xi_0}}{\xi_0} \left[ 1 - e^{-\xi_0} (\xi_0 + 1) \right] - \frac{e^{-2\xi_0} - 1}{2} + e^{-\xi_0} - 1}. \quad (6)$$

**Результаты расчетов.** Далее приведены результаты расчетов по формулам (3), (4), (6). Для расчетов были выбраны характеристики модельной центрифуги типа "Игуассу":  $a = 6,5$ ;  $r_0 = 1,5$ ;

$H = 53$ ; разность температур на торцах варьировалась:  $\Delta T = 1$  и  $10$  К. В расчетах варьировалась счетная сетка  $N_z \times N_r \times N_\varphi$ , при этом по углу  $\varphi = 6^\circ$ . В начальный момент  $U_r = 0$ ,  $U_\varphi = 0$ ,  $u_z = \Omega_0 r$ ,  $\Omega_0 = 1,1 \cdot 10^4$ ; плотность соответствовала твердотельному вращению.

Профили осевой компоненты скорости в расчетах на сетке  $N_z \times N_r \times N_\varphi = 840 \times 72 \times 6$  показаны в сечении  $z = H/2$  на различные моменты времени на рис. 4. Там же показаны полученное выше аналитическое решение, а также решение [3], приведенное в [6].

Как видно, уже к моменту  $t = 0,05$  профиль осевой компоненты скорости практически устанавливается. Для  $\Delta T = 1$  К он оказывается довольно близок к полученному выше аналитическому решению и лишь качественно согласуется с ним в случае  $\Delta T = 10$  К. Подобное поведение численного решения представляется естественным, поскольку условие применимости такого решения  $\Delta T \ll T$  во втором случае не выполняется.

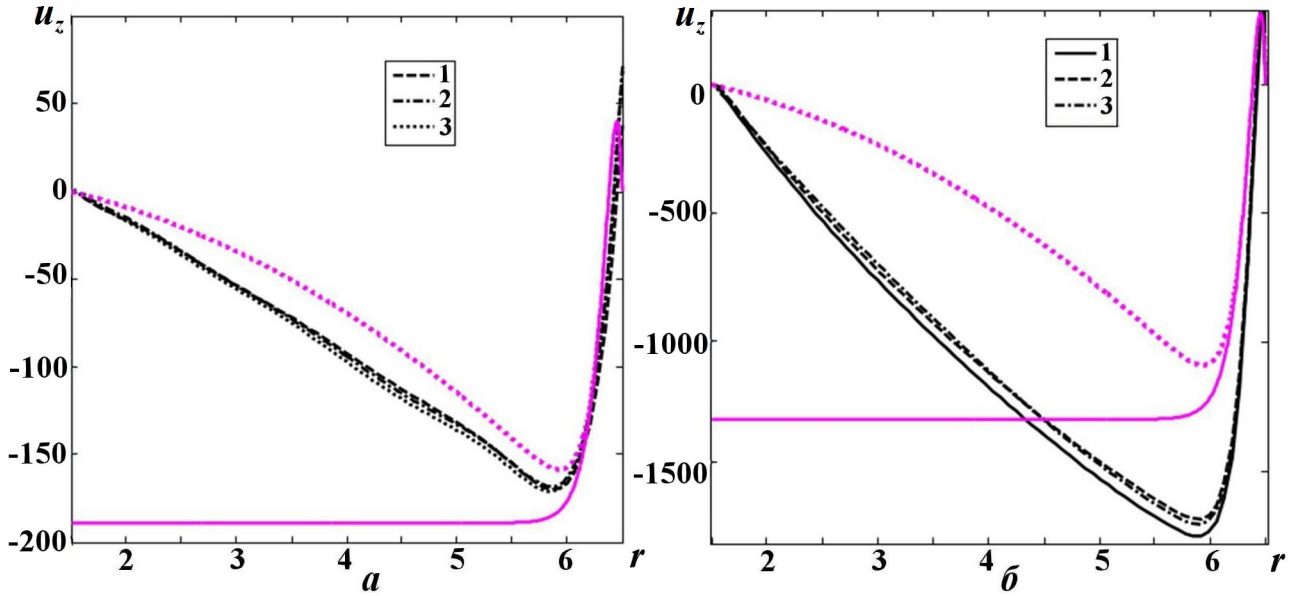


Рис. 4. Тест 3. Расчетные профили осевой компоненты скорости в задаче:  $a - \Delta T = 1$  К: 1 –  $t = 0,05$ ; 2 –  $t = 0,1$ ; 3 –  $t = 0,2$ ;  $b - \Delta T = 10$  К: 1 –  $t = 0,045$ ; 2 –  $t = 0,1$ ; 3 –  $t = 0,16$ ; — аналитическое решение из работы [3]; ..... — аналитическое решение из данной работы

#### Тест 4. Однокамерная модель ротора ГЦ

**Постановка задачи.** На рис. 5 изображена однокамерная модель ротора центрифуги "Игуасу" [1]. Радиус ротора  $R_0 = 6,5$  см, длина разделительной камеры  $L_0 = 44$  см, частота вращения  $\Omega = 1,1 \cdot 10^4$ . С внутренней стороны область ограничена неподвижным коллектором  $R_1 = 1$  см и источником питания с  $R_g = 2$  см,  $h_g = 2$  см. Расстояние от нижнего торца до источника питания  $L_g = 0,6L_0$ . Поток питания, равный

$$g_f = -2\pi \int_{r=1,7}^{r=2} \rho u_z r dr = 13 \cdot 10^{-3} \text{ Г/с},$$

с массовой концентрацией легкого изотопа  $c = c_0 = 0,5$  подается из кольцевого отверстия шириной  $0,3$  см в нижней части источника питания. Поток питания разделяется на поток  $g_f^+$  отбора легкой фракции и поток  $g_f^-$  отвала тяжелой фракции в пропорции  $\theta = 0,5$ :

$$g_f^+ = \theta g_f = -2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho c u_z r dr; \quad g_f^- = (1 - \theta) g_f = 2\pi \int_{r_5}^{r_6} \rho (1 - c) u_z r dr. \quad (7)$$

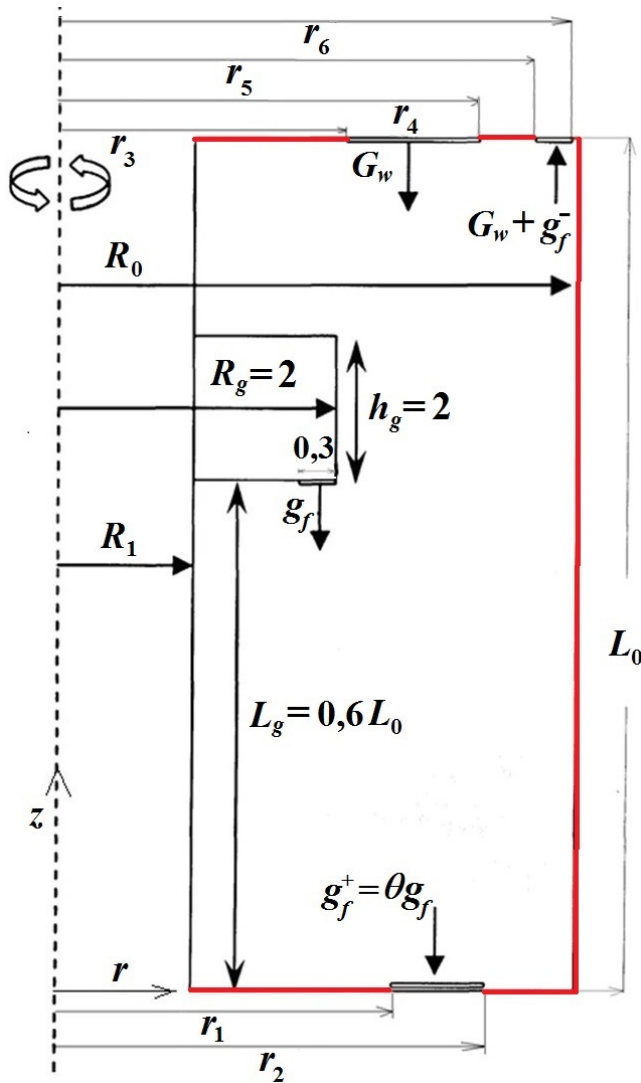


Рис. 5. Однокамерная модель ротора ГЦ

вой скоростью  $\Omega$ . Граничные условия по газовой динамике: на всех границах задано условие прилипания. Граничные условия по теплопроводности: на нижнем торце ротора ( $z = z_1$ )  $T = T_n = 305$  К; на верхнем торце ( $z = z_2$ )  $T = T_b = T_n + \Delta T = 313$  К,  $\Delta T = 8$  К; на вертикальных границах ( $r = R_1$  и  $r = R_0$ )  $T(z) = T_n + \Delta T(z - z_1)/L_0$ .

Начальная температура газа  $T^{(0)}(r, z) = T(z)$ ; распределения плотности и давления газа брались из квазистационарного твердотельного вращения с учетом того, что внутренняя граница центрифуги неподвижна.

Расчеты проводились на трех сетках: грубой ( $N_z \times N_r \times N_\varphi = 34 \times 24 \times 6$ ), средней ( $N_z \times N_r \times N_\varphi = 700 \times 80 \times 6$ ) и подробной ( $N_z \times N_r \times N_\varphi = 1\,400 \times 160 \times 6$ ).

**Аналитическое рассмотрение задачи.** Рассмотрим стационарную задачу. Пусть  $r_1$  — радиус внутренней поверхности цилиндра и блока питания,  $r_2$  — радиус внешнего цилиндра,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — их угловые скорости; динамический коэффициент молекулярной вязкости  $\eta = \text{const}$ . Обозначим окружную скорость через  $u$  ( $u \equiv U_\varphi$  зависит только от  $r$ ). Система уравнений Навье—Стокса в цилиндрических координатах для такого течения примет вид

Для отбора легкой фракции  $g_f^+$  на нижней границе разделительной камеры расположено кольцевое отверстие. На верхней границе вблизи боковой стенки ротора расположено кольцевое отвальное отверстие для прохождения газа из разделительной камеры в отвальную. Ближе к оси ротора расположено кольцевое отвальное отверстие для рециркуляционного прохождения газа из отвальной камеры в разделительную. Имеем

$$G'_w = G_w + g_f^-,$$

$$G_w = -2\pi \int_{r_3}^{r_4} \rho u_z r c dr,$$

где  $G_w$  описывает рециркуляционный (возвратный) поток газа из отвальной камеры в разделительную. Значение  $G_w \sim 2 \div 4g_f^-$  должно подбираться исходя из условия максимального разделения изотопной смеси по потокам отбора. На первом этапе тестирования данной задачи для упрощения постановки задачи (сведения ее к двумерной) все отверстия брались кольцевыми.

Нижний торец ротора имеет температуру  $T_n$ , а верхний —  $T_b$  ( $T_n < T_b$ ), температура боковой стенки ротора линейно изменяется от  $T_n$  до  $T_b$ . Для данной задачи  $T_n = 305$  К, а температурный перепад должен составлять  $\sim 8$  К. Давление газа на боковой стенке ротора  $p_0 = 100$  мм рт. ст. Значения радиусов (см. рис. 5):  $r_1 = 5,26$ ;  $r_2 = 5,74$ ;  $r_3 = 4,71$ ;  $r_4 = 5,74$ ;  $r_5 = 6,09$ ;  $r_6 = 6,37$ .

Внутренняя граница ( $R_1 = 1$ ) имеет нулевую скорость, остальные границы вращаются с угло-

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{dp}{dr}; \quad (8)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right) = 0. \quad (9)$$

Граничные условия:  $u = r_1\omega_1$  при  $r = r_1$ ;  $u = r_2\omega_2$  при  $r = r_2$ .

Проинтегрировав уравнение (9) при заданных граничных условиях, получим

$$u(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[ r (\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right].$$

В рассматриваемом случае  $\omega_1 = 0$ , поэтому

$$u(r) = \frac{\omega_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( r - \frac{r_1^2}{r} \right).$$

Дополнительно можно определить распределение давления, которое дается уравнением (8):

$$p = p_2 \exp \left( \int_{r_2}^r \frac{u^2}{RT r} dr \right),$$

где  $p_2 = p(r_2)$ . Обозначив

$$\frac{\omega_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = a; \quad -\frac{\omega_2 r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = b,$$

получим

$$u(r) = ar + \frac{b}{r}; \quad u^2(r) = a^2 r^2 + 2ab + \frac{b^2}{r^2}.$$

Тогда давление

$$p = p_2 \exp \left( \frac{a^2 (r^2 - r_2^2)}{2RT} + \frac{2ab}{RT} \ln \frac{r}{r_2} + \frac{b^2}{2RT} \frac{r^2 - r_2^2}{r^2 r_2^2} \right).$$

**Результаты расчетов.** Поля осевой компоненты скорости показаны на рис. 6 для всех расчетов на два момента времени. Видно, что к определенному моменту времени течение устанавливается, так как картины течения на приведенные времена почти неотличимы. При этом время установления уменьшается с уменьшением размеров ячейки: на грубой сетке  $t = 0,09$ , на средней —  $0,05$ , на подробной —  $0,01$ .

На рис. 7 приводятся распределения температуры газа, полученные в расчете на подробной сетке на два момента времени, которые также демонстрируют выход течения на стационарный режим.

На рис. 8 приведены зависимости от времени величин  $\zeta_F \equiv \frac{F - F_0}{E_{s0}}$ , где  $F$  принимает значения внутренней энергии  $E_{\text{вн}}$ , кинетической энергии  $E_{\text{кин}}$  и полной энергии  $E_c \equiv E_{\text{вн}} + E_{\text{кин}}$ ;  $F_0 \equiv \min(F)$ . Как видно из рис. 8, устанавливается практически стационарное значение внутренней энергии, в то время как кинетическая энергия (а следовательно, и полная) не успевает установиться, хотя относительная погрешность при этом мала.



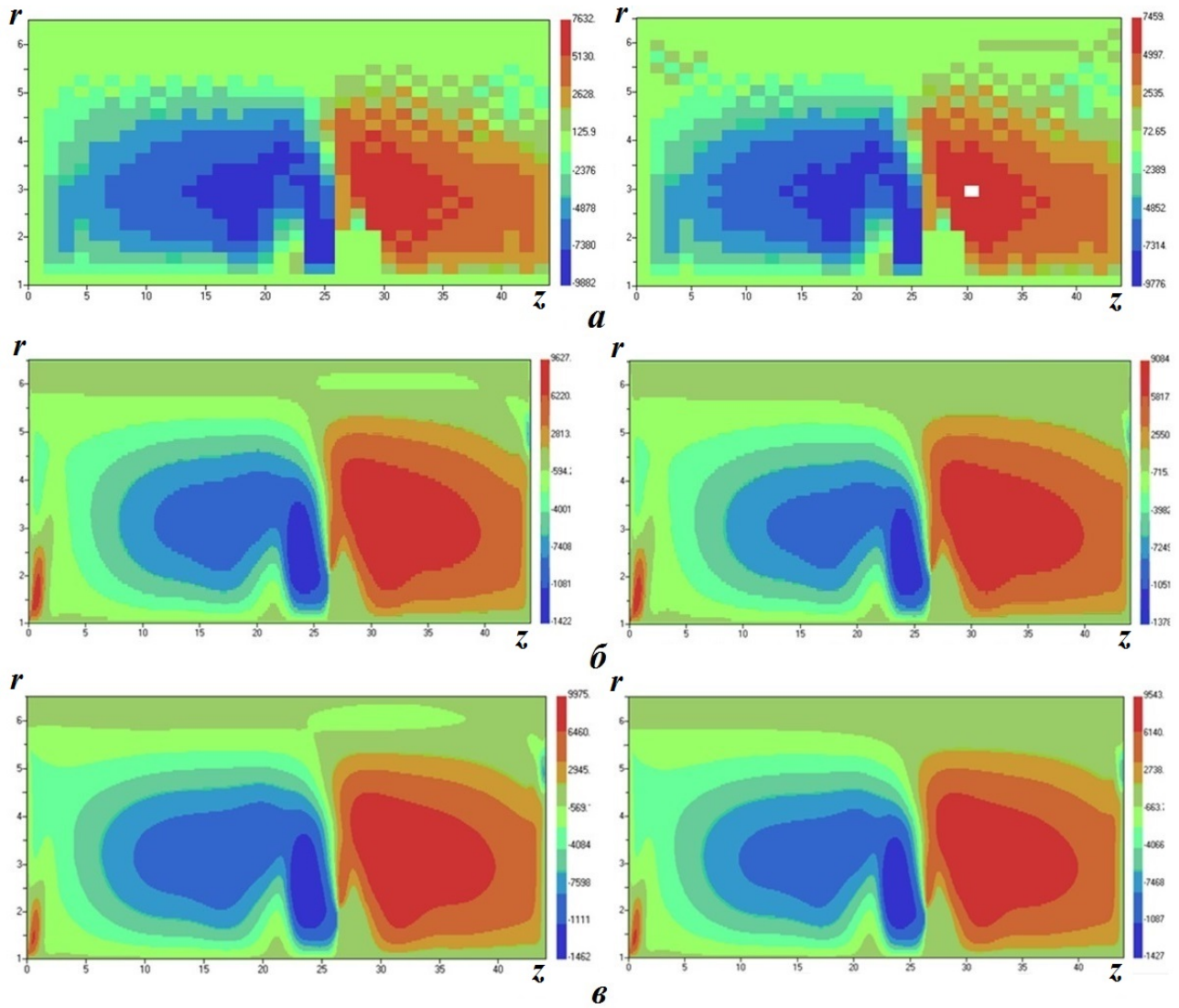


Рис. 6. Тест 4. Поля осевой компоненты скорости: *a* — грубая сетка,  $t = 0,09; 0,2$ ; *б* — средняя сетка,  $t = 0,01; 0,09$ ; *в* — подробная сетка,  $t = 0,01; 0,04$

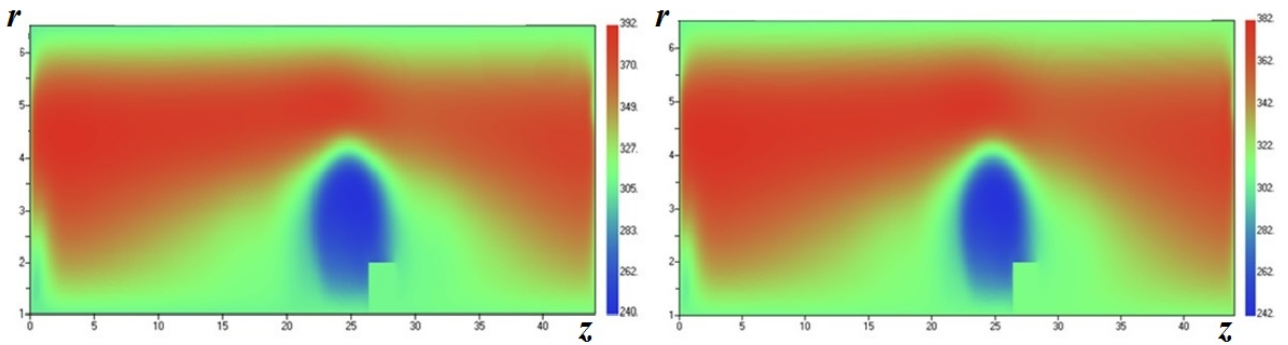


Рис. 7. Тест 4. Поля температуры в расчете на подробной сетке:  $t = 0,01; 0,04$

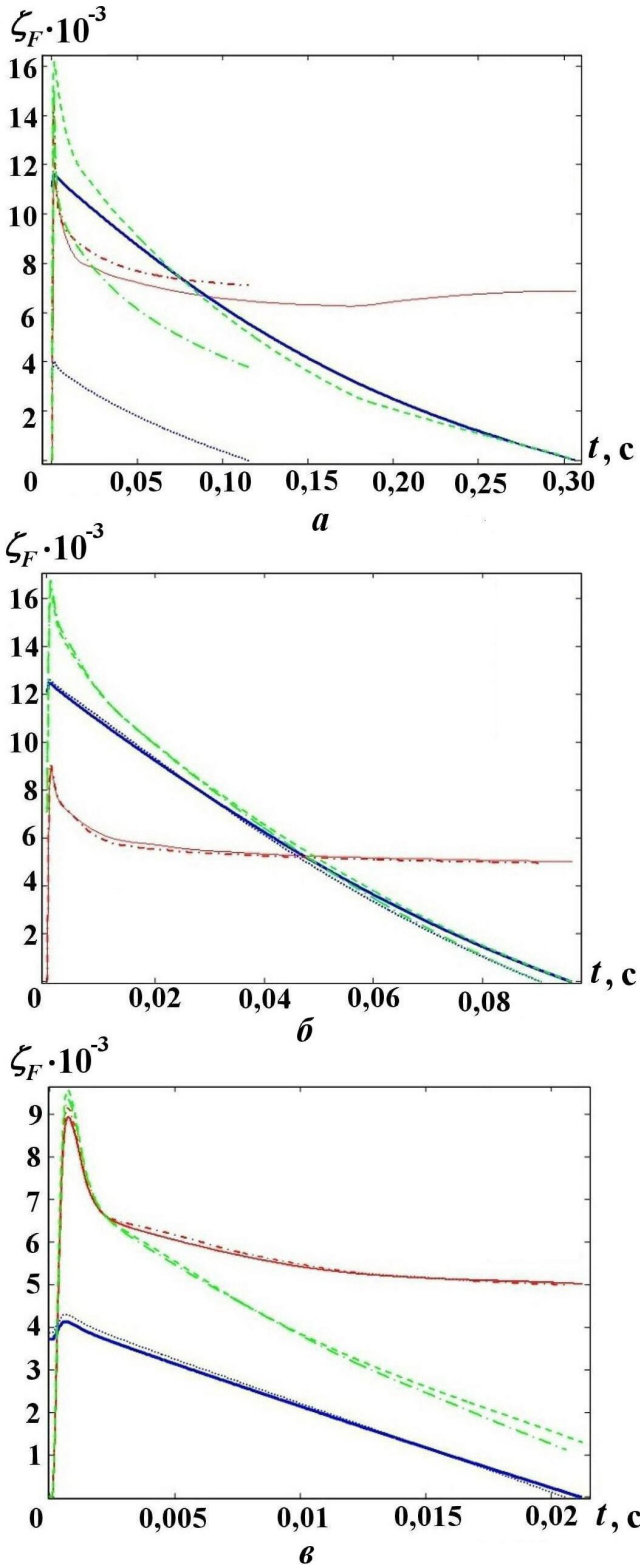


Рис. 8. Тест 4. Зависимости от времени энергий системы: *a* — грубая сетка; *b* — средняя сетка; *v* — подробная сетка: —, - - - — внутренняя энергия; —, ···· — кинетическая энергия; - - - , - - - — полная энергия; —, —, - - - — со сглаживанием скоростей; - - - , ····, - - - — без сглаживания скоростей

### Тест 5. Двухкамерная модель ротора ГЦ

**Постановка расчета.** Геометрия разделительной камеры (рис. 9) с источником питания и кольцевыми отверстиями в ней в тесте 5 совпадает с принятой для теста 4. Радиус ротора  $R_0 = 6,5$  см; длина разделительной камеры  $L_0 = 44,25$  см;  $R_g = 2$  см;  $h_g = 2$  см;  $L_g = 0,6L_0$ ;  $\Omega = 1,1 \cdot 10^4$ . Поток питания  $g_f = -2\pi \int_{r=1,7}^{r=2} \rho u_z r dr = 13 \cdot 10^{-3}$  г/с с массовой концентрацией легкого изотопа  $c = c_0 = 0,5$  подается из кольцевого отверстия шириной 0,3 см в нижней части источника питания,  $\theta = 0,5$ . Для отбора легкой фракции ( $g_f^+$ ) на нижней границе разделительной камеры расположено кольцевое

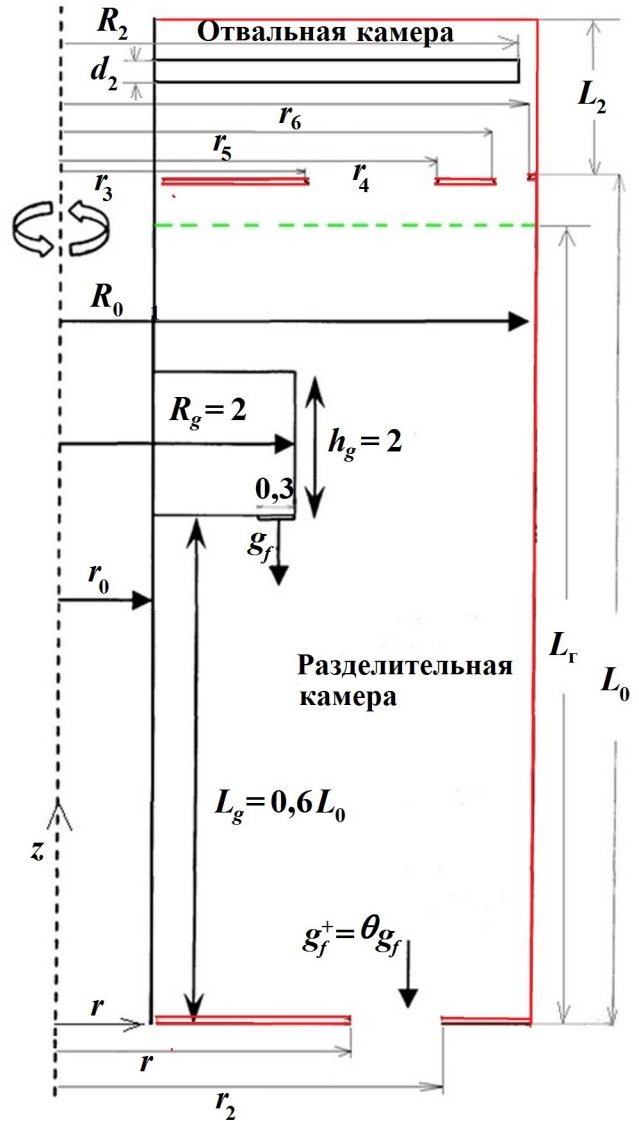


Рис. 9. Двухкамерная модель ротора ГЦ

отверстие. Поскольку в тесте 5 потоки отвала и отбора не учитываются (отборник цельнометаллический), то для отверстия нижнего торца полагается  $c = 1$ ,  $\theta = 1$ . На верхней границе вблизи боковой стенки ротора расположено кольцевое отвальное отверстие для прохождения газа из разделительной камеры в отвальную. Ближе к оси ротора расположено кольцевое отверстие для рециркуляционного прохождения газа из отвальной камеры в разделительную. В центре (по оси) отвальной камеры, имеющей высоту  $L_2 = 2$  см, расположен отборник с высотой (максимальный размер вдоль оси)  $d_2 = 0,216$  см и вылетом  $R_2 = 6,2855$  см. Нижняя крышка ротора имеет температуру  $T_n$ , а верхняя —  $T_b$  ( $T_n < T_b$ ), температура боковой стенки ротора линейно изменяется от 305 до 313 К.

Номинальные значения радиусов кольцевых отверстий:  $r_1 = 5,26$ ;  $r_2 = 5,74$ ;  $r_3 = 4,71$ ;  $r_4 = 5,74$ ;  $r_5 = 6,09$ ;  $r_6 = 6,37$ .

Расчеты проведены на двух сетках:  $N_z \times N_r \times N_\varphi = 706 \times 72 \times 6 + 34 \times 72 \times 192$  (расчет  $N$ ) и  $N_z \times N_r \times N_\varphi = 1416 \times 144 \times 6 + 68 \times 144 \times 320$  (расчет  $2N$ ). Поэтому реальные значения радиусов кольцевых отверстий в расчетах слегка отличались из-за различий в размерах ячеек: в  $N$ -расчете  $r_1 = 5,28$ ;  $r_2 = 5,74$ ;  $r_3 = 4,67$ ;  $r_4 = 5,66$ ;  $r_5 = 6,04$ ;  $r_6 = 6,35$ ; в  $2N$ -расчете  $r_1 = 5,28$ ;  $r_2 = 5,74$ ;  $r_3 = 4,67$ ;  $r_4 = 5,82$ ;  $r_5 = 6,23$ ;  $r_6 = 6,42$ .

Внутренняя граница (коллектор, устройство питания, отборник) имеет нулевую скорость, остальные границы вращаются с угловой скоростью  $\Omega = 1,1 \cdot 10^4$ .

Граничное условие по газовой динамике: на всех границах — условие прилипания. Граничные условия по теплу: для  $z = z_1$   $T = T_n = 305$  К; для  $z = z_2$   $T = T_b = T_n + \Delta T = 313$  К,  $\Delta T = 8$  К; для  $r = r_1$  и  $r = R_0$   $T(z) = T_n + \Delta T(z - z_1)/L_0$ .

Пунктирная линия на рис. 9 указывает место сшивки 2D и 3D областей. Расстояние  $\Delta L = L_0 - L_\Gamma$  варьировалось от 0,7 до 2.

### Результаты расчетов.

*Влияние места сшивки 3D и 2D областей на течение в кольцевом отверстии.* Проведены расчеты на грубой сетке с вариацией  $\Delta L$ . На рис. 10, а для трех различных значений  $\Delta L$  показаны профили осевой компоненты скорости по отрезку, проходящему через диафрагму между отвальной и разделительной камерами. Именно эта компонента в конечном счете отвечает за режим циркуляции между указанными камерами. Как видно, уже для значений  $\Delta L = 1,4$  и  $\Delta L = 2$  профили скорости практически совпадают. Аналогичное сравнение профилей логарифма плотности на вер-

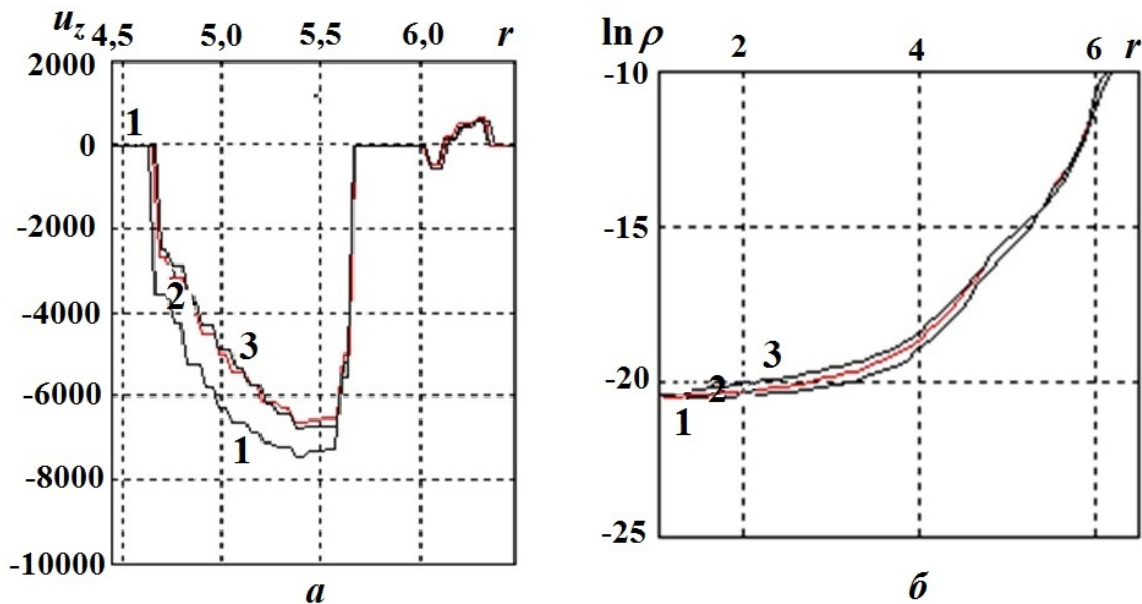


Рис. 10. Тест 5. Профили осевой компоненты скорости (а) и логарифма плотности (б) при  $\Delta L = 0,7$  (1); 1,4 (2); 2 (3)

тикальном отрезке с координатой  $z = 43,5$  показывает близость этих профилей для всех значений  $\Delta L$  (рис. 10, б). Таким образом, удовлетворительные результаты получаются уже при  $\Delta L = 1,4$ .

*Расчеты на разных сетках.* Распределения температуры в сечении, проходящем через ось симметрии, полученные на грубой и подробной сетках, показаны на рис. 11. Видно, что зависимость результатов от сетки незначительна.

*Установление течения.* Для расчета на подробной сетке на рис. 12 показаны распределения температуры на три момента времени в сечении, проходящем через ось симметрии. На рис. 13 приводятся распределения температуры и осевой компоненты скорости в сечении, проходящем через центр отборника по нормали к оси симметрии. Отличие максимальных значений величин на моменты времени  $t = 0,005$  и  $0,01$  не превышает 2%, что свидетельствует о том, что к моменту  $t = 0,01$  устанавливается течение, близкое к стационарному.

*Изменение массы и энергии.* На рис. 14, а показаны относительные изменения массы газа в зависимости от времени в 3D и 2D областях в расчете на подробной сетке. Суммарная в 2D и 3D областях масса к моменту  $t = 0,01$  выходит на стационарное (с точностью до пульсаций) значение. Отметим, что в расчетах на разных сетках результаты близки.

Пульсации обусловлены нестационарностью данной задачи, связанной с наличием отборника. Это вносит в решение периодические возмущения с периодом около  $0,6 \cdot 10^{-3}$ , приблизительно соответствующие (как видно из рис. 14, а) возмущениям массы газа отдельно в каждой из областей — 3D и 2D.

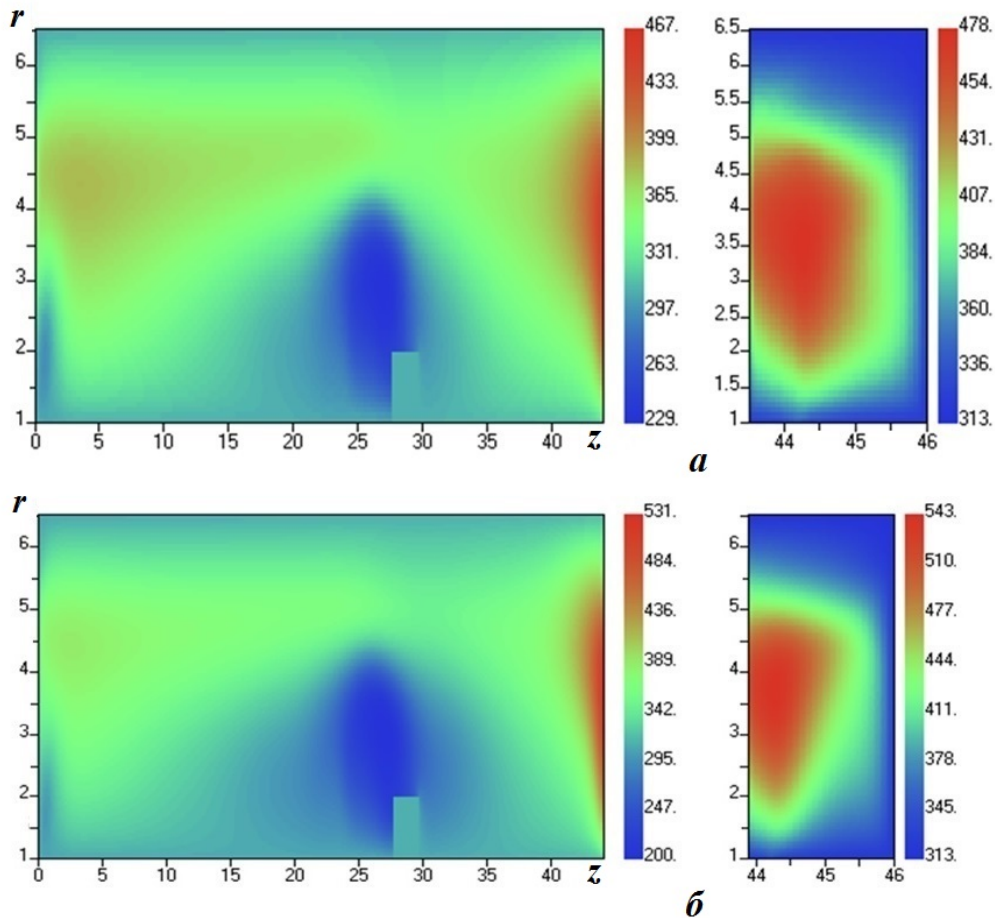


Рис. 11. Тест 5. Распределения температуры,  $t = 0,01$ : а — грубая сетка; б — подробная сетка; слева — 2D область; справа — 3D область



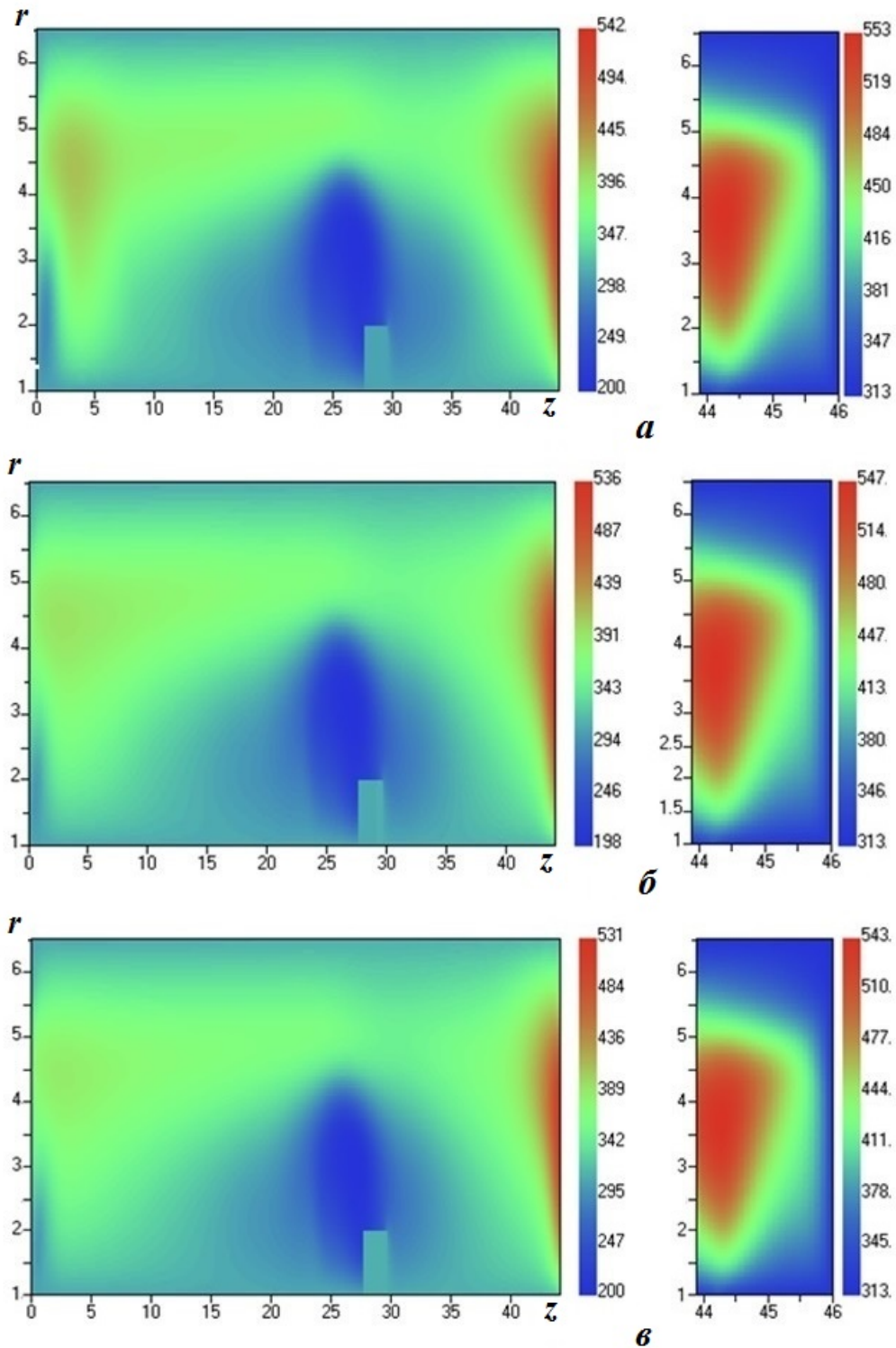


Рис. 12. Тест 5. Распределения температуры:  $t = 0,0025$  (а);  $0,005$  (б);  $0,01$  (в)

Энергия 3D области (рис. 14, б) к моменту  $t = 0,01$  выходит на стационарное (с точностью до пульсаций) значение, в то время как энергия 2D области (и соответственно суммарная в областях) продолжает уменьшаться, возвращаясь к начальному значению. Относительные изменения энергии при этом малы — меньше 3%.

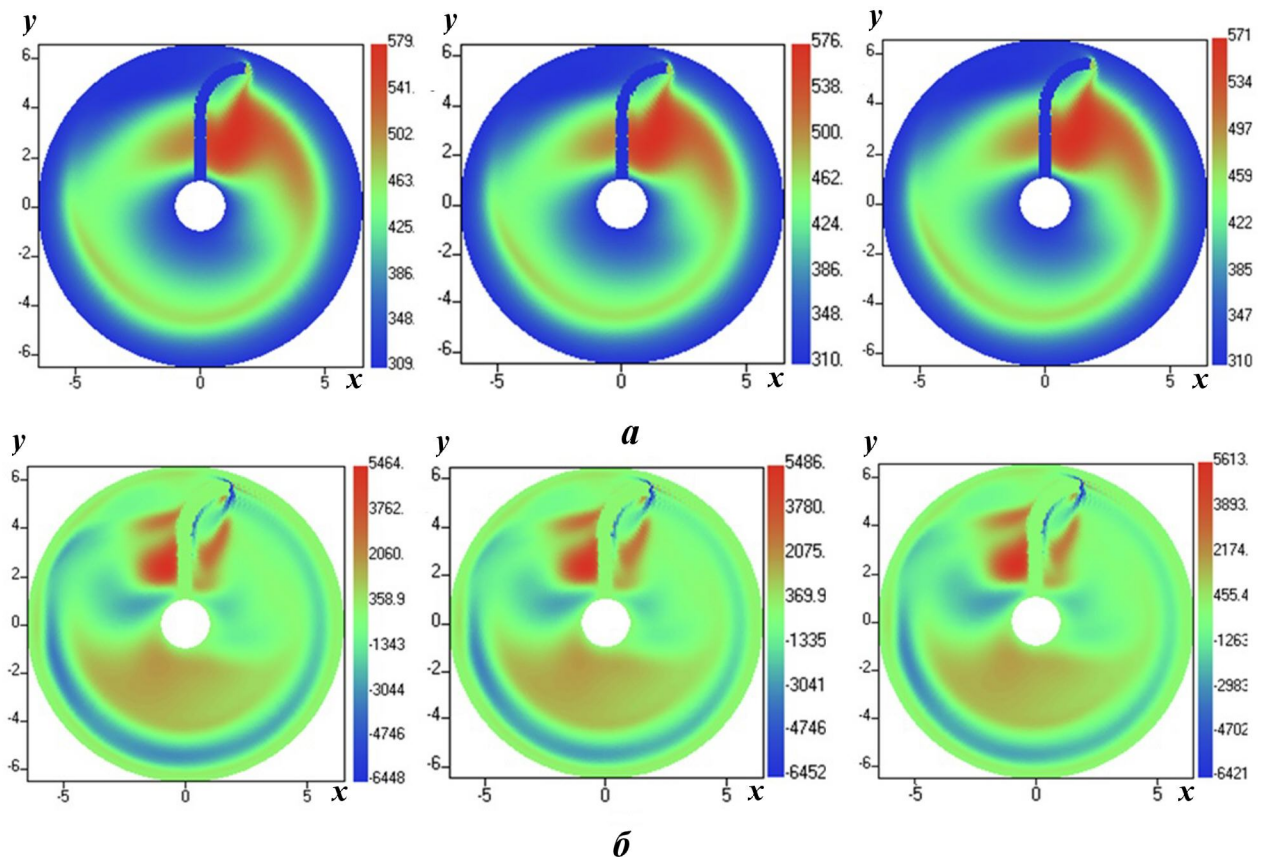


Рис. 13. Тест 5. Поля в сечении  $z = \text{const}$ :  $a$  — температура;  $б$  — осяевая компонента скорости; слева —  $t = 0,0025$ ; в центре —  $t = 0,005$ ; справа —  $t = 0,01$

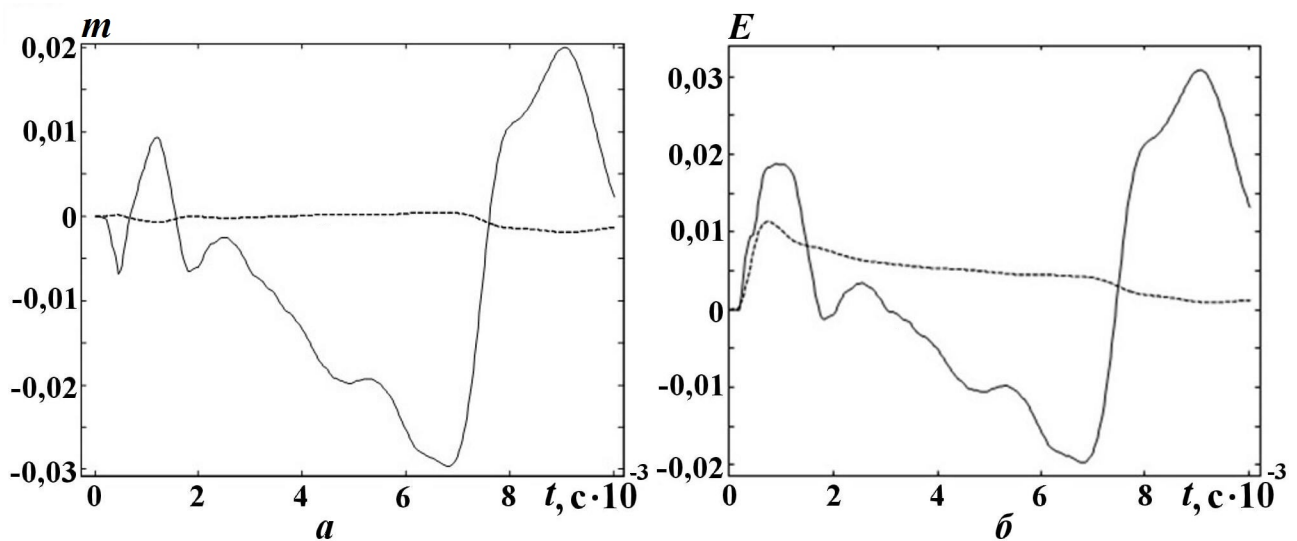


Рис. 14. Тест 5. Зависимости изменения относительной массы ( $a$ ) и энергии ( $б$ ) газа от времени в расчете на подробной сетке: — — в 3D области; ..... — в 2D области

### Тест 6. Одномерная диффузионная задача

**Общая постановка задачи.** Скорость  $j$ -го компонента газа равна сумме массовой скорости газа как целого  $\mathbf{u}$  и диффузионной скорости  $\mathbf{w}_j$ , которая для представляющего интерес случая бинарной

смеси удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{J} \equiv \rho_1 \mathbf{w}_1 = -\rho_2 \mathbf{w}_2 = -\rho \frac{M_1 M_2}{(\rho/n)^2} D (\mathbf{d}_1 + k_T \nabla \ln T),$$

где  $M_1, M_2$  — молярные массы легкого и тяжелого компонентов;  $D$  — коэффициент концентрационной диффузии;  $\mathbf{d}_j$  — так называемые диффузионные термодинамические силы:

$$\mathbf{d}_j = \nabla \left( \frac{n_j}{n} \right) + \left( \frac{n_j}{n} - \frac{\rho_j}{\rho} \right) \nabla \ln p \equiv \nabla N_j + (N_j - c_j) \nabla \ln p.$$

Согласно [6] в центрифуге вклад в диффузионный перенос термодиффузии мал, поэтому будем полагать  $k_T = 0$ . Далее обозначим

$$c = \frac{\rho_1}{\rho}; \quad N \equiv \frac{n_1}{n} = \frac{M_2 c}{M_2 c + M_1 (1 - c)},$$

где  $c$  — концентрация (массовая доля) легкого компонента. Тогда имеют место уравнения [6, 8]

$$\rho \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla c \right) = -\operatorname{div} \mathbf{J}; \quad (10)$$

$$\mathbf{J} = -\rho D (k_p \nabla \ln p + \nabla c), \quad (11)$$

$$k_p = \frac{\Delta M}{M} c (1 - c), \quad M = \frac{M_1 M_2}{(1 - c) M_2 + c M_1},$$

$$M_1 = M ({}^{235}\text{UF}_6) = 349 \text{ г/моль}, \quad M_2 = M ({}^{238}\text{UF}_6) = 352 \text{ г/моль}, \quad \Delta M = 3 \text{ г/моль}.$$

В изотопном приближении коэффициент диффузии (как и другие коэффициенты переноса) одинаков для обоих компонентов и определяется эмпирическим соотношением  $\rho D = 1,117 \cdot 10^{-6} T^{0,925}$  [6]. Кроме того, можно принять  $M \approx M_2$ , тогда  $\rho = nM$  не зависит от концентрации. Из граничного условия  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$  следует

$$k_p \frac{\partial \ln p}{\partial n} + \frac{\partial c}{\partial n} = 0.$$

**Постановка и решение изотермической задачи.** Рассматривается одномерная изотермическая задача, общая постановка и параметры которой приведены выше. Примем  $k_p = 0$ . В этом случае уравнения (10) и (11) принимают вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r); \quad j_r = -D_\rho \frac{\partial c}{\partial r}.$$

Для данного теста принято также  $D_\rho = \text{const} = 10^7 \rho D$ .

В начальный момент профиль концентрации имеет вид

$$c(r, t = 0) = \begin{cases} c_0, & r = 1,5; \\ 0, & 1,5 < r < 6,5; \\ c_0, & r = R = 6,5, \end{cases}$$

где  $c_0 = 0,5$ .

От боковой границы  $r = R = 6,5$  концентрация диффундирует близким к плоскому случаю образом. Это позволяет записать решение в виде решения (см. [9]) плоской задачи теплопроводности в случае бесконечного интервала:

$$c(r, t) = c_0 (1 - \operatorname{erf}(z)),$$

$$\text{где } \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi, \quad z = \frac{R-r}{2\sqrt{Dt}}.$$

Сравнение результата расчета и аналитического решения для плоского случая показано на рис. 15. Видно, что расхождение возникает лишь на значительном расстоянии от боковой поверхности ротора, где течение все больше отличается от плоского.

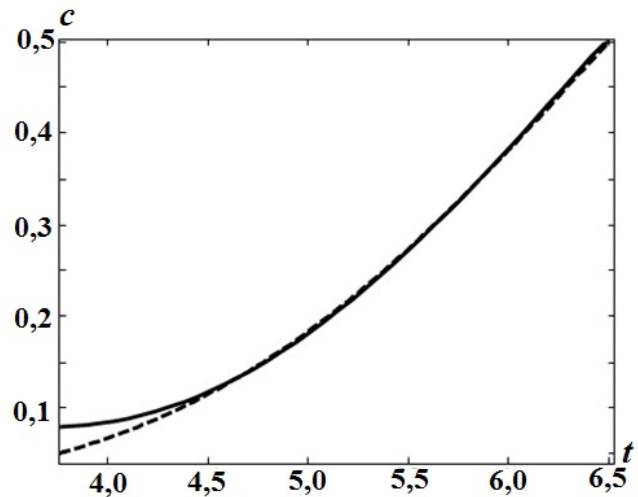


Рис. 15. Тест 6. Профили концентрации: — — расчет; ---- — аналитическое решение

### Заключение

По разработанной авторами методике рассчитан ряд тестов, связанных с 3D газодинамическими течениями в однокамерной и двухкамерной моделях центрифуги типа "Игуассу". Данные тесты охватывают практически все режимы работы центрифуги. Для всех тестов получены приемлемые по точности результаты, что вселяет определенные надежды на то, что данная методика может оказаться эффективным средством для сквозного моделирования рассматриваемых течений.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Е. В. Соколовской за большую работу по редакции текстов статей, представляющих обе части работы.

### Список литературы

1. Wood H. G., Morton J. B. Onsager's pancake approximation for the fluid dynamics of a gas centrifuge // Fluid Mech. 1980. Vol. 101, part 1. P. 1—31.
2. Звонарёв К. В., Токманцев В. И. Оптимизация газовых потоков в разделительной центрифуге на основе аналитической модели конвекции-диффузии // Сб. докл. VIII Всерос. науч. конф. по физико-химическим процессам при селекции атомов и молекул. Звенигород, 2003. С. 43—47.  
Zvonaryev K. V., Tokmantsev V. I. Optimizatsiya gazovykh potokov v razdelitelnoy tsentrifuge na osnove analiticheskoy modeli konveksii-diffuzii // Sb. dokl. VIII Vseros. nauch. konf. po fiziko-khimicheskim protsessam pri seleksii atomov i molekul. Zvenigorod, 2003. S. 43—47.
3. Von Halle E. US DOE Report KOA-4058, 1977.
4. Звонарёв К. В., Селезнёв В. Д., Токманцев В. И., Абрамов Ю. В. Моделирование теплообмена между сверхзвуковым потоком и неподвижным телом в газовой центрифуге // Инженерно-физический журнал. 2012. Т. 85, № 6. С. 1277—1284.  
Zvonaryev K. V., Seleznyev V. D., Tokmantsev V. I., Abramov Yu. V. Modelirovanie teploobmena mezhdru sverkhzvukovym potokom i nepodvizhnym telom v gazovoy tsentrifuge // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2012. T. 85, № 6. S. 1277—1284.
5. Янцлжин Ю. В., Стаценко В. П., Чернышов Ю. Д., Беляев С. П., Колобянин В. Ю., Топорова О. О., Турутнина И. Ю. Численное моделирование трехмерного течения газа в газовой центрифуге. Часть 1. Описание методики // См. настоящий выпуск. С. 3—19.



- Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Chernyshov Yu. D., Belyaev S. P., Kolobyatin V. Yu., Toporova O. O., Turutina I. Yu.* Chislennoe modelirovanie trekhmernogo techeniya gaza v gazovoy tsentrifuge. Chast 1. Opisanie metodiki // Sm. nastoyashchy vypusk. S. 3—19.
6. *Борисевич В. Д., Борман В. Д., Сулаберидзе Г. А., Тихомиров А. В., Токманцев В. И.* Физические основы разделения изотопов в газовой центрифуге. М.: МИФИ, 2005.  
*Borisevich V. D., Borman V. D., Sulaberidze G. A., Tikhomirov A. V., Tokmantsev V. I.* Fizicheskie osnovy razdeleniya izotopov v gazovoy tsentrifuge. M.: MIFI, 2005.
7. Обогащение урана: Пер. с англ. / Под ред. С. Виллани. М.: Энергоатомиздат, 1983.  
Obogashchenie urana: Per. s angl. / Pod red. S. Villani. M.: Energoatomizdat, 1983.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.  
*Landau L. D., Lifshits E. M.* Hidrodinamika. M.: Nauka, 1986.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973.  
*Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike. M.: Nauka, 1973.

Статья поступила в редакцию 15.03.2022.

---