

УДК 532.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКРЫТИЯ ОТКРЫТО-ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ ТОНКИМ СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

М. А. Ямщикова

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Исследование покрытия цилиндрической открыто-пористой структуры слоем жидкости сводится к рассмотрению подзадач моделирования формы капли в нескольких конфигурациях: капля находится на поверхности цилиндра либо жидкость сосредоточена между цилиндрами в горизонтальном и вертикальном положениях. Характеристиками такого покрытия являются масса и толщина получаемого слоя.

Для пористой системы проведен обзор метода расчета и моделирования формы капли в однородном поле силы тяжести. Представлено решение уравнения Лапласа для цилиндрической капли. Получены равновесные формы капли на поверхностях различной формы и наклона. Приведены результаты оценки количества жидкости, покрывающей поверхность открыто-пористой конструкции.

Ключевые слова: форма капли, уравнение Лапласа, поверхностное натяжение, угол смачивания.

Введение

Многие технологические процессы связаны с растеканием жидкости по твердой поверхности различной формы. Знание формы и размера капель жидкого вещества, смачивающего поверхность, позволяет оценить общее количество жидкости, в том числе жидкого металла, который может покрывать тонким слоем поверхность открыто-пористой структуры. Для расчетно-теоретического обоснования формирования такого покрытия необходима информация о поверхностном натяжении и состоянии поверхности жидкости [1–3].

Математическому описанию формирования равновесных осесимметричных капель на горизонтальных поверхностях посвящен ряд работ [1–6]. Однако в этих работах не был проведен анализ формы и массы цилиндрических капель на цилиндрических поверхностях.

Целью настоящей работы является определение равновесной формы цилиндрической капли на различных поверхностях, в том числе цилиндрических, и на основании полученных результатов — оценка массы жидкости, располагающейся в периодической геометрической конструкции (открыто-пористый материал).

Капля на цилиндрической поверхности

Для моделирования формы капли на цилиндрической поверхности предположим, что имеется цилиндр радиусом R и длиной $l \gg R$. На поверхности цилиндра в поле силы тяжести висит цилиндрическая капля жидкости (рис. 1). Высота капли равна h , толщина и ширина — ζ и $2x_0$ соответственно. Длина капли соответствует длине цилиндра и равна l . Угол смачивания $\theta = 20^\circ$. Угол сектора смачивания между вертикалью и радиусом, проведенным к касательной в крайней точке смачивания, равен β . Коэффициент поверхностного натяжения жидкости $\sigma = 0,067$ Н/м.

Так как капля находится в равновесном состоянии, то разность давлений на поверхности жидкости можно определить по закону Лапласа:

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Здесь $\Delta P = P_2 - P_1$, где $P_2 = c_2 - \rho g y$ — давление внутри жидкости с плотностью ρ ($c_2 = \text{const}$, g — ускорение свободного падения), $P_1 = c_1 = \text{const}$ — давление газа снаружи [2]; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности капли.

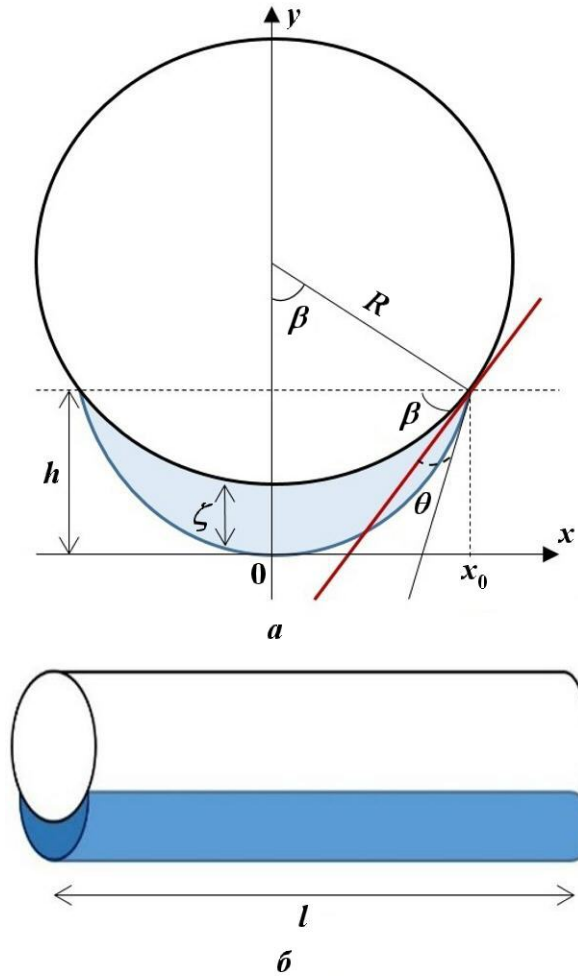


Рис. 1. Равновесная форма капли жидкости, висящей на поверхности цилиндра: *a* — вид спереди; *б* — вид сбоку

После подстановки выражений для P_2 и P_1 уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g y}{\sigma} = c, \quad c = \text{const.}$$

Так как $R_2 \rightarrow \infty$, то имеем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = c - \frac{\rho g}{\sigma} y. \quad (1)$$

С учетом начальных условий $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и граничных условий $y(x_0) = h$, $y'(x_0) = \text{tg}(\beta + \theta)$ решением уравнения (1) является решение уравнения

$$\frac{\rho g}{2\sigma} y^2 - cy = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1,$$

$$c = \frac{\rho g}{2\sigma} h - \frac{1}{h\sqrt{1 + (\text{tg}(\beta + \theta))^2}} + \frac{1}{h}.$$

Расчетные формы поверхности капли, полученные с использованием метода Рунге—Кутты четвертого порядка [7], показаны на рис. 2 для нескольких вариантов ее высоты h при секторе смачивания $\beta = 45^\circ$. Расчет выполнялся при заданных основных параметрах: угол смачивания $\theta = 20^\circ$; $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; $\sigma = 0,067 \text{ Н/м}$. Для каждого решения были найдены масса капли и соответствующий радиус цилиндра, значения которых также указаны на рис. 2.

Вследствие интереса, вызванного особенностями поверхностных эффектов в пористой среде, образованной тонкими проволоками, было проведено исследование массы m и толщины ζ капли при заданных условиях: радиус цилиндра $R = 0,21 \text{ мм}$; высота капли $h \leq 1 \text{ мм}$. Значения основных параметров в этой и последующих задачах остаются прежними.

На рис. 3 показаны зависимости толщины и массы капли при изменении угла β .

В дальнейшем полученные результаты будут использоваться при оценке массы жидкости в пористом материале.

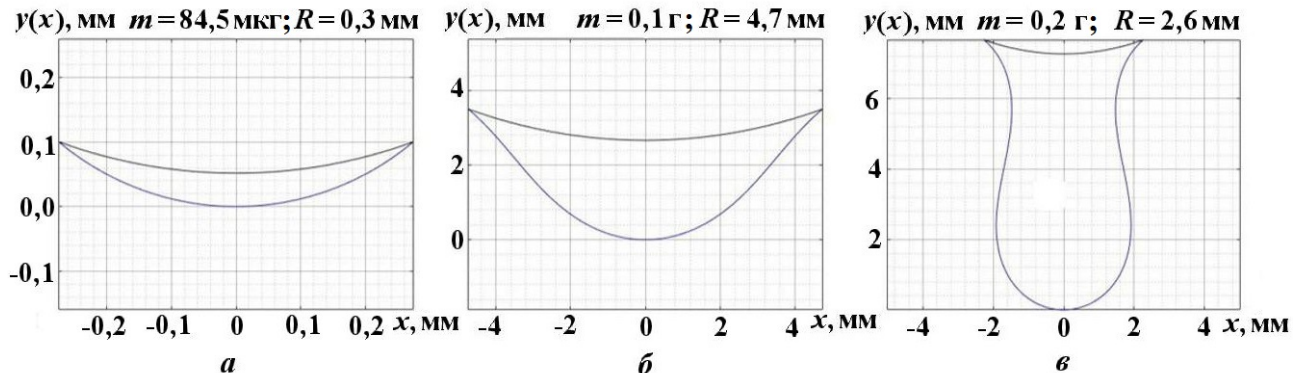


Рис. 2. Расчетные формы поверхности висящей на цилиндре капли воды при секторе смачивания $\beta = 45^\circ$: *a* — $h = 0,1 \text{ мм}$; *б* — $h = 3,5 \text{ мм}$; *в* — $h = 7,6 \text{ мм}$

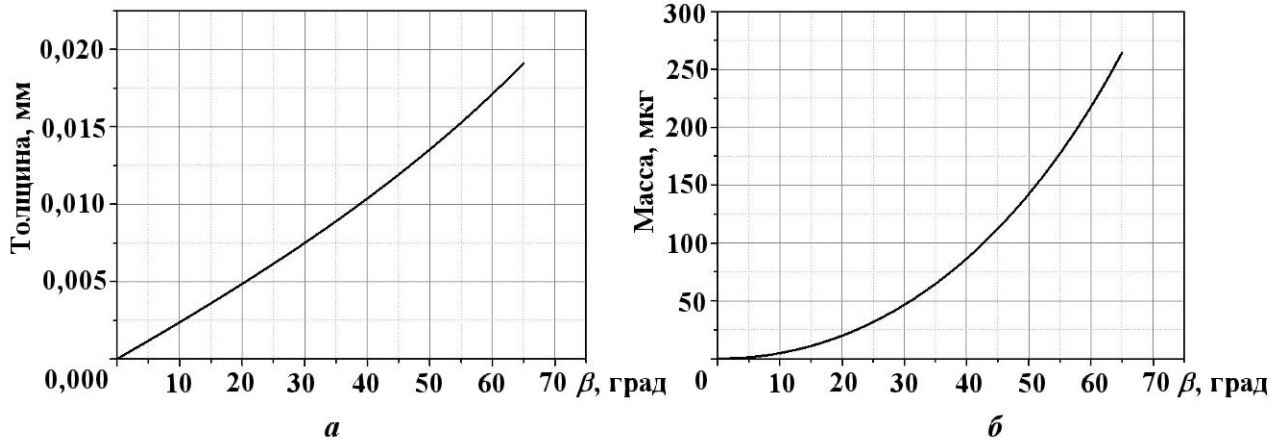


Рис. 3. Толщина (а) и масса (б) капли длиной 10 мм для $R = 0,21$ мм при изменении угла β

Капля жидкости на наклонной плоскости

При расчете формы неподвижной капли на наклонной плоскости рассматривается задача смачивания на полубесконечной гладкой пластине. В таком случае для угла наклона плоскости α (рис. 4) уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{R_1} = c - \frac{\rho g}{\sigma} (y \cos \alpha - x \sin \alpha),$$

$$c = \text{const},$$

где R_1 — радиус кривизны поверхности капли.

Уравнение Лапласа в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = K_0 + \frac{\rho g}{\sigma} y \cos \alpha - \frac{\rho g}{\sigma} x \sin \alpha,$$

где $K_0 = \text{const}$ — начальная кривизна на плоскости $y = 0$.

При моделировании решалось дифференциальное уравнение второго порядка с известными начальными условиями методом Рунге—Кутты четвертого порядка [7]. В связи с выбранным началом координат условием остановки интегрирования задачи Коши было $y = 0$.

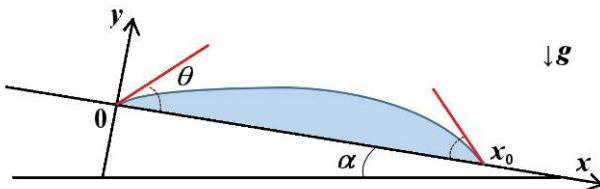


Рис. 4. Равновесная форма капли жидкости, находящейся на гладкой наклонной плоскости

На рис. 5 показаны результаты моделирования капли на наклонной плоскости с углом $\alpha = 90^\circ$ при различных значениях начальной кривизны K_0 , включая критическую, после увеличения которой численное решение не согласуется с аналитическим.

Но так как интерес представляло смачивание цилиндрической поверхности, далее в работе будут приведены результаты расчета геометрии капли воды с конфигурациями цилиндрических поверхностей, показанными на рис. 6.

Капля жидкости, смачивающая цилиндры на горизонтальной плоскости

Следующим этапом стало проведение анализа равновесной формы капли в зависимости от геометрической конфигурации смачиваемых цилиндров заданного радиуса ($R = 0,21$ мм), расположенных на горизонтальной плоскости (см. рис. 6, а, б).

Подход к решению таких задач остался прежним, изменения коснулись начальных условий и критерия остановки счета, которые в данном случае рассчитывались с помощью уравнения окружности.

Результаты, полученные при смачивании одного цилиндра на горизонтальной плоскости (см. рис. 6, а), показаны на рис. 7. Результаты для двух цилиндров (см. рис. 6, б) показаны на рис. 8.

В случае, когда расстояние между двумя цилиндрами равно 2 мм, максимально возможная масса цилиндрической капли длиной $l = 0,42$ мм составляет $m = 0,319$ мг.

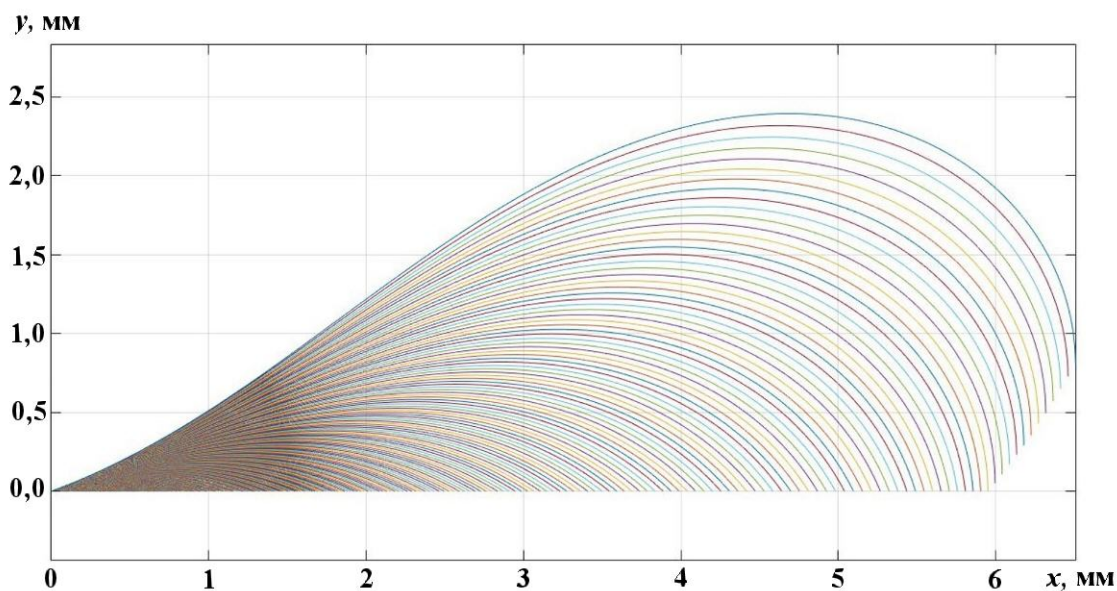


Рис. 5. Форма поверхности капли на вертикальной плоскости ($\alpha = 90^\circ$) при различных значениях начальной кривизны K_0

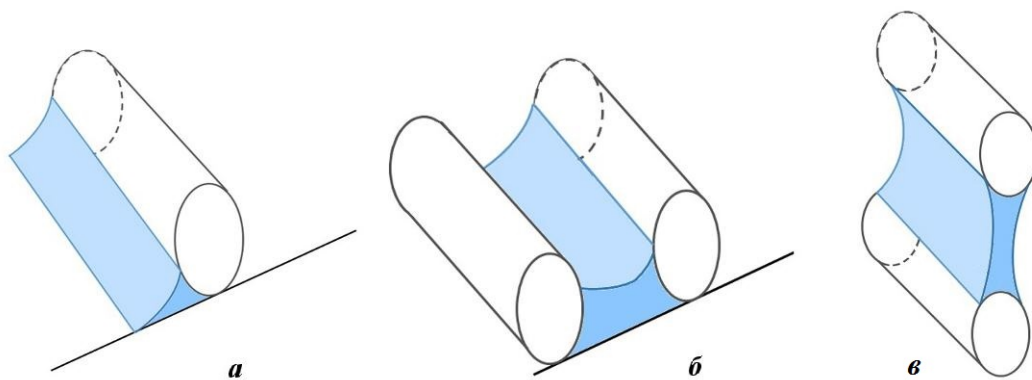


Рис. 6. Конфигурации смачивания цилиндрических поверхностей: *a* — один цилиндр на горизонтальной плоскости; *б* — два цилиндра на горизонтальной плоскости; *в* — два цилиндра в вертикальной плоскости

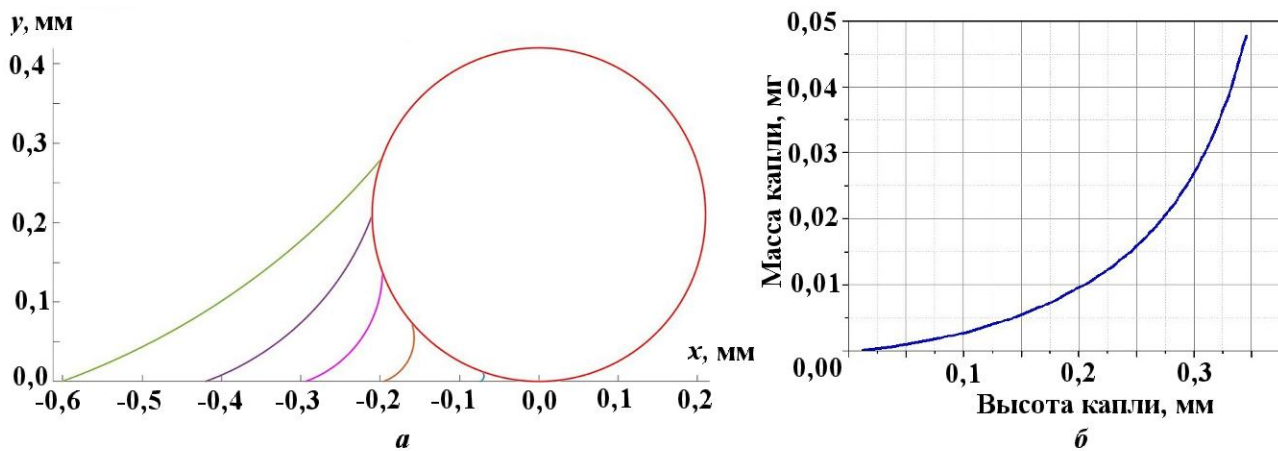


Рис. 7. Смачивание цилиндрической поверхности на горизонтальной плоскости (длина цилиндрической капли $l = 0,42$ мм): *a* — форма поверхности капли на поверхности цилиндра; *б* — зависимость массы капли от ее высоты

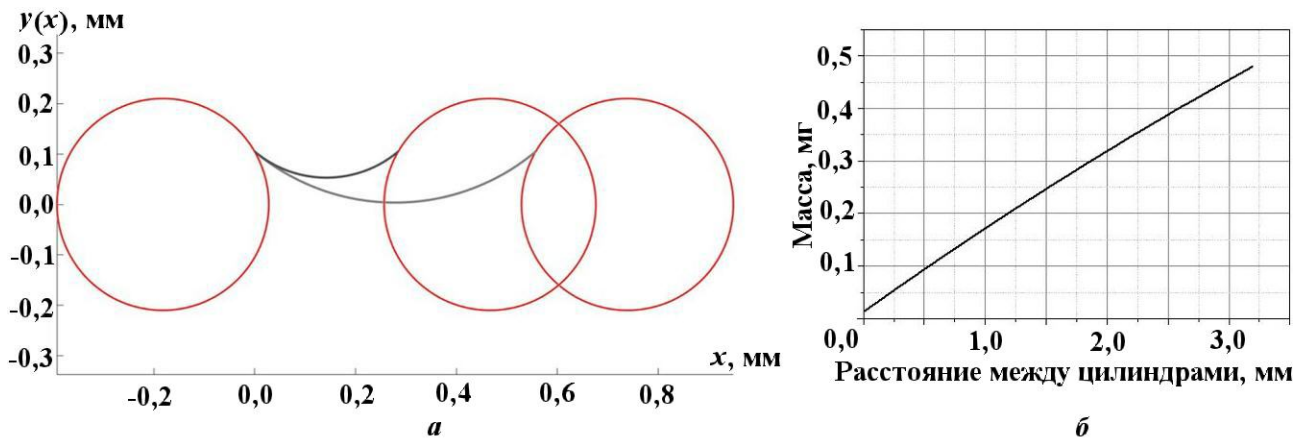


Рис. 8. Смачивание между цилиндрическими поверхностями на горизонтальной плоскости: *a* — форма поверхности капли между цилиндрами; *b* — зависимость массы капли от расстояния между цилиндрами

Капля жидкости между двумя цилиндрами в вертикальной плоскости

Особого внимания заслуживает рассмотрение капли, расположенной между цилиндрами заданного радиуса в вертикальной плоскости (см. рис. 6, в). На рис. 9 показаны результаты моделирования формы капли для заданного расстояния между цилиндрами при различных значениях начальной ширины капли. Слева и справа

на рис. 9 показаны формы для критических значений ширины, при которых капля имеет минимальную и максимальную массу.

Зависимость массы капли от ее начальной ширины показана на рис. 10. Масса находилась численным способом (методом трапеции), длина капли составляла $l = 2$ мм. Для удобства дальнейшего исследования расстояние между цилиндрами было взято $D = 0,42$ мм.

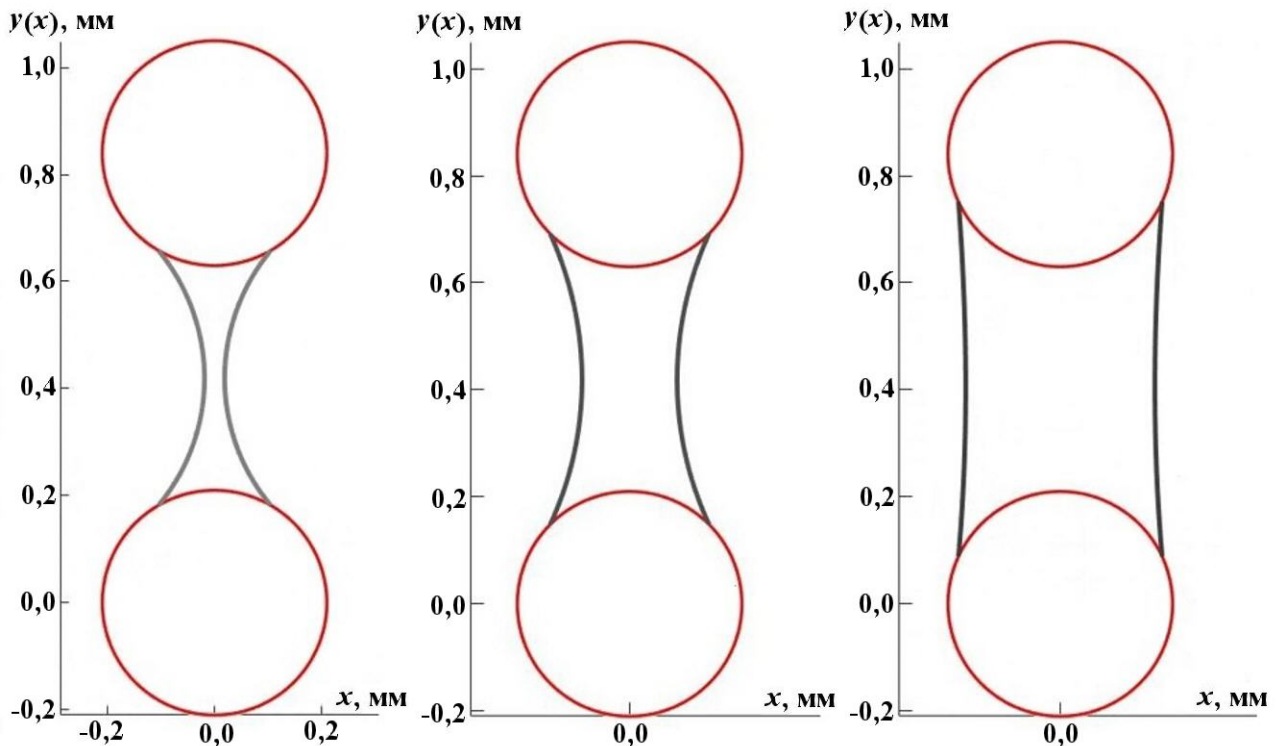


Рис. 9. Форма капли между цилиндрами в вертикальной плоскости при различных значениях ее начальной ширины

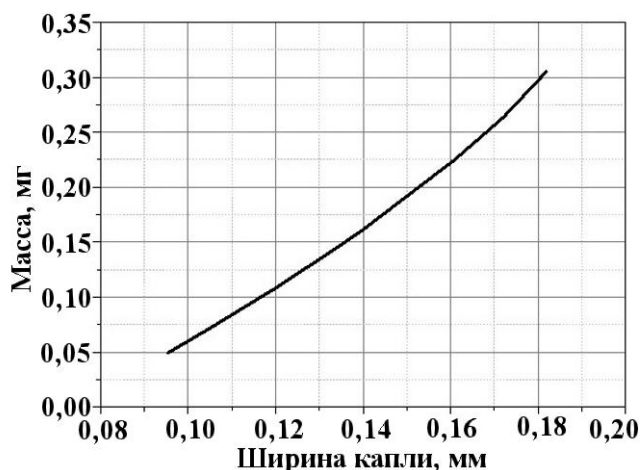


Рис. 10. Зависимость массы жидкости от начальной ширины капли при смачивании двух цилиндров в вертикальной плоскости

Таким образом, для изучения капли жидкости в конфигурациях с цилиндрами заданного радиуса ($R = 0,21$ мм), показанных на рис. 6, были получены расчетные данные о массе капли для горизонтального и вертикального положений системы. В дополнение к предыдущим результатам эти данные являются ключевыми параметрами для максимальной оценки массы жидкости, покрывающей поверхность открытопористого материала тонким слоем.

Оценка количества жидкости в пористой структуре

В связи с перспективностью использования метода напарения жидкости на твердую поверхность пористой структуры необходимо оценить

максимально возможную массу используемого при этом жидкого вещества. Пористая структура представляет собой сетку, образованную тонкими проволоками. Слои сетки накладываются друг на друга без сдвига, как показано на рис. 11, *а*.

Радиус проволоки равен $R = 0,21$ мм. Пористость конструкции 85 %. Характерные размеры пор составляют ~ 2 мм.

Рассмотрим ячейки сетки с данной структурой, образованные сечениями фрагмента сетки в горизонтальной (штрихпунктирная линия на рис. 11, *а*) и вертикальной (пунктирная линия на рис. 11, *а*) плоскостях. Схемы этих ячеек показаны соответственно на рис. 11, *б*, *в*. Изучение свойств полученных ячеек дает возможность определить массу жидкости между цилиндрическими проволоками во всем объеме конструкции. Для этого необходимо условно разделить ячейки на характерные периодические секторы и узлы (элементы).

Покрытие этих элементов слоем жидкости возможно в рассмотренных выше конфигурациях: капля на поверхности цилиндра, жидкость сосредоточена между цилиндрами в горизонтальном и вертикальном положении, а также в узлах сетки.

Геометрические конфигурации (элементы ячейки) с указанием массы воды, приходящейся на 1 см^3 пористой структуры (коэффициент пористости 0,85) и полученной на основе уже имеющихся из предыдущих разделов данных, приведены в таблице.

Из таблицы видно, что максимальное значение массы воды, приходящейся на 1 см^3 открытопористого материала, составляет 0,105 г.

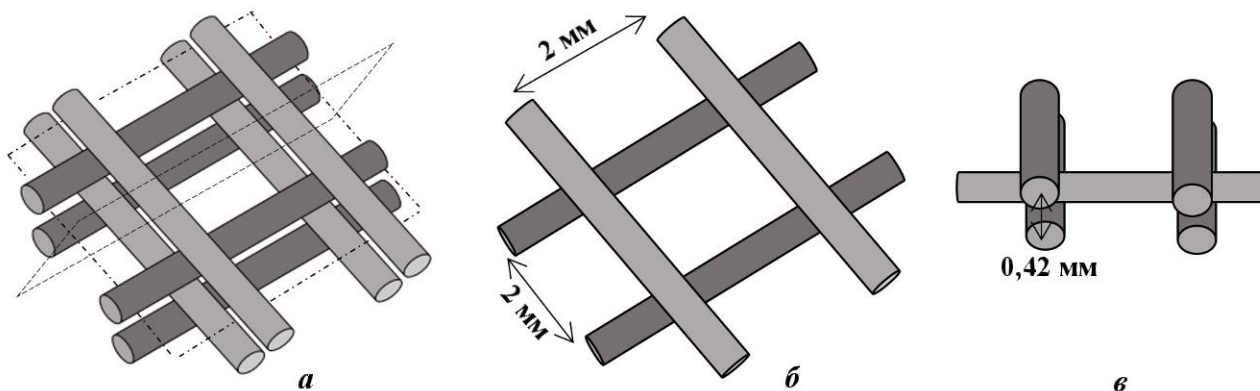

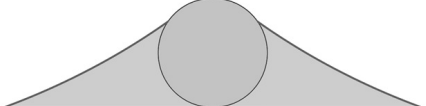
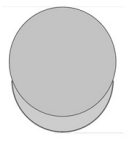
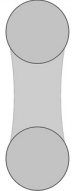


Рис. 11. Схемы фрагмента сетки пористой структуры (*а*) и ячеек, полученных его продольным (*б*) и поперечным (*в*) сечениями

Масса воды в зависимости от геометрии смачиваемых элементов пористой структуры

Геометрическая конфигурация элемента	Максимальная масса для элемента	Масса для комбинации элементов в 1 см ³ сетки
	0,319 мг	0,105 г
	0,096 мг	0,031 г
	0,009 мг	0,003 г
	0,305 мг	0,089 г

Заключение

Задача покрытия открыто-пористой конструкции слоем жидкости сводится к рассмотрению смачивания цилиндрических поверхностей в следующих конфигурациях: капля находится на поверхности цилиндра либо жидкость сосредоточена между цилиндрами в горизонтальном и вертикальном положениях.

В данной работе получено решение уравнения Лапласа для цилиндрической капли жидкости, висящей на цилиндре, лежащей на наклонной плоскости, а также располагающейся на одном или между двумя цилиндрами. Приведены результаты моделирования формы капли на цилиндрах радиусом $R = 0,21$ мм.

На основе численного моделирования получены данные о массе капли при смачивании цилиндров заданного радиуса в рассмотренных конфигурациях. Эти данные являются основными параметрами для расчетно-теоретического обоснования формирования покрытия открыто-пористой структуры тонким слоем жидкости.

На основе проведенных расчетов при оценке массы тонкого слоя воды, покрывающего сетчатую конструкцию с коэффициентом пористости 85 %, максимальное значение массы воды, прихо-

дящейся на 1 см³ открыто-пористого материала, составляет 0,105 г.

Список литературы

1. Саранин В. А. Равновесие жидкостей и его устойчивость. Простая теория и доступные опыты. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
Saranin V. A. Ravnovesie zhidkostey i ego ustoychivost. Prostaya teoriya i dostupnye opyty. M.: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2002.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособ.: Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2016.
Landau L. D., Lifshits E. M. Teoreticheskaya fizika: ucheb. posob.: T. VI. Gidrodinamika. M.: Fizmatlit, 2016.
3. Матюхин С. И., Фроленков К. Ю. Форма капель жидкости, помещенных на твердую горизонтальную поверхность // Конденсированные среды и межфазные границы. 2013. Т. 15, № 3. С. 292–304.
Matyukhin S. I., Frolenkov K. Yu. Forma kapel zhidkosti, pomeshchyennykh na tvyerduyu gorizontalnuyu poverkhnost //

- Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy. 2013. T. 15, № 3. S. 292—304.
4. Пахомов А. Н., Гатапова Н. Ц., Пахомова Ю. В. Геометрия неподвижной капли жидкости, лежащей на наклонной поверхности // Вестник Тамбовского гос. тех. ун-та. 2018. Т. 24, № 4. С. 628—634.
Pakhomov A. N., Gatarova N. Ts, Pakhomova Yu. V. Geometriya nepodvizhnoy kapli zhidkosti, lezhashchey na naklonnoy poverkhnosti // Vestnik Tambovskogo gos. tekhn. un-ta. 2018. T. 24, № 4. S. 628—634.
 5. Алчагиров Б. Б., Хоконов Х. Б. Смачиваемость поверхностей твердых тел расплавами щелочных металлов и сплавов с их участием. Теория и методы исследований // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32, № 4. С. 590—626.
Alchagirov B. B., Khokonov Kh. B. Smachivaemost poverkhnostey tvyerdykh tel rasplavami shchelochnykh metallov i splavov s ikh uchastiem. Teoriya i metody issledovaniy // Teplofizika vysokikh temperatur. 1994. T. 32, № 4. S. 590—626.
 6. De Gennes P. G. Смачивание: статика и динамика // УФН. 1987. Т. 151, № 4. С. 619—681.
De Gennes P. G. Smachivanie: statika i dinamika // UFN. 1987. T. 151, № 4. S. 619—681.
 7. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 6-е изд. М.: БИНОМ, 2008.
Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Chislennyye metody. 6-e izd. M.: BINOM, 2008.
- Статья поступила в редакцию 01.04.22.
-