УДК 517.958:536.2

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.А. Шестаков
(РФЯЦ–ВНИИТФ)

Построены точные решения радиационной газовой динамики с учетом переноса энергии в различных приближениях при специально подобранных коэффициентах поглощения и внутренней энергии вещества.

Введение

В последние годы все большее внимание привлекают задачи радиационной газовой динамики (РГД). Сложность этих задач определяется прежде всего необходимостью учета большого количества физических процессов. Хотя динамика излучающего газа является, по-видимому, простейшим примером взаимосвязи между кинетической теорией и классической механикой жидкости, в открытой печати автором не найдено ни одной работы, содержащей полную постановку этой задачи с учетом влияния движения среды на спектральный перенос излучения в неравновесном случае.

Построению аналитических решений РГД посвящено достаточно большое число работ. Простейшие автомодельные решения одномерных задач РГД изложены в работе [1]. В ней приведены решения одномерных уравнений газовой динамики и отдельно решения одномерных уравнений переноса излучения. Одной из первых работ, где рассмотрены решения совместной системы РГД, является работа [2]. В ней получены автомодельные решения одномерных нестационарных и двумерных стационарных течений излучающего газа. Учет излучения в этой работе рассматривался в простейшем приближении. Поле излучения предполагалось квазистационарным, удовлетворяющим условию локального термодинамического равновесия. Вклад излучения во внутреннюю энергию и давление не учитывался. Коэффициент поглощения аппроксимировался степенной функцией давления и плотности. Рассеяние излучения не рассматривалось.

Точные решения для нестационарной системы уравнений энергии и переноса *серого* излучения без учета рассеяния были впервые получены в работе [3]. Для нахождения точного решения предполагалось, что внутренняя энергия пропорциональна плотности равновесного излучения, коэффициент поглощения есть степенная функция от температуры вещества, а температура — степенная функция от некоторой переменной. Для получения решения использовался метод неопределенных коэффициентов.

В работе [4] приведены точные решения уравнения переноса излучения в трехтемпературном приближении. Уравнения состояния (УРСы), коэффициенты теплопроводности и обменные члены представлялись степенными функциями температуры и плотности. При постоянной плотности в многомерном случае найдены решения типа *бегущей волны.* Приведены автомодельные решения задач с учетом движения среды, когда плотность является степенной функцией пространственных координат.

В работе [5] были получены точные решения для нестационарной системы уравнений энергии и переноса излучения в спектральном случае. В диффузионном приближении аналогичные решения были получены в работе [6].

В среде, состоящей из двух различных веществ, для серого излучения были найдены точные решения, разрывные на границе раздела сред по температуре [7]. Непрерывные по температуре решения спектрального уравнения переноса для системы, состоящей из различных веществ, были найдены в работах [8,9].

В работе [10] получено решение модельной задачи об остывании газа, заполняющего полупространство, за счет переноса тепла неравновесным излучением. Перенос излучения рассматривался в квазистационарном одногрупповом диффузионном приближении для плоской геометрии.

В работе [11] для получения точных решений применялся метод перехода к переменной типа бегущей волны, позволяющий свести систему исходных дифференциальных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в ряде случаев легко интегрируется. Этим методом построен более широкий класс точных решений, включающий в себя решения, полученные в работах [5–8]. В [11] рассмотрены решения с учетом изотропного рассеяния, пропорционального коэффициенту поглощения. При изотропном рассеянии, непропорциональном коэффициенту поглощения, решения найдены в параметрической форме в [12].

Решения задач РГД в движущейся среде без учета рассеяния рассмотрены в работе [13]. При специально выбранных начальных данных, краевых условиях, УРСах и коэффициенте поглощения в одномерной плоской геометрии получены решения типа бегущей волны.

В работе [14] рассмотрены решения типа бегущей волны для серого и спектрального излучений с учетом анизотропного рассеяния. Индикатриса рассеяния берется в виде дробно-рациональной функции одной переменной.

В работе [15] предложены точные решения системы уравнений энергии и переноса излучения в многомерном случае. Приводятся решения в плоской, сферически-симметричной, цилиндрической геометриях, решения с учетом анизотропного рассеяния, в диффузионном и P_1-приближениях.

Работа [16] посвящена проблеме нахождения решения задачи переноса лучистой энергии в двухкомпонентной плазме. С помощью специально выбираемых коэффициентов теплопроводности, поглощения и рассеяния получены точные решения для многомерного нестационарного спектрального уравнения переноса с учетом ионной и электронной температур. Решения рассмотрены для кинетического и диффузионного уравнений.

Использование в численных методиках различных криволинейных систем координат приводит к необходимости нахождения точных решений и построения на их основе тестов в произвольных системах. При нахождении точных решений уравнений переноса в произвольной подвижной локальной системе координат возникают трудности из-за специфики координатной системы в пространстве направлений полета частиц. Точные решения многомерной системы уравнений переноса спектрального излучения и энергии приведены в [17]. В работе [18] построены многомерные решения уравнений РГД в декартовой системе координат с учетом спектрального переноса излучения. Точные решения двумерной системы уравнений переноса спектрального излучения и энергии в цилиндрически-симметричной системе координат построены в [19]. Все решения построены при специально подобранных коэффициентах поглощения и внутренней энергии вещества.

В данной работе, по мнению автора, впервые построены точные решения системы РГД с учетом импульса излучения в уравнениях движения среды. Решения построены для совместной системы уравнений газодинамики и переноса излучения в различных приближениях при специально подобранных коэффициентах поглощения, рассеяния, источника и внутренней энергии вещества.

Уравнения РГД с учетом переноса энергии излучения в приближении лучистой теплопроводности

Уравнения РГД в случае локального термодинамического равновесия имеют вид [1]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{u})=0;\quad \operatorname{div}(\vec{u})=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_l}{\partial l};\quad \nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial r},\frac{\partial p}{\partial z},\frac{\partial p}{\partial l}\right);\\
\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\rho\vec{u}\nabla)\,\vec{u}+\nabla(p+p_{\text{изл}})=0;\quad p_{\text{изл}}=\frac{U_p}{3};\quad U_p=\frac{1}{c}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Omega}J_{\nu p}d\Omega d\nu=\frac{4\sigma_0 T^4}{c}=\sigma T^4;\\
\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\operatorname{div}\left[\rho\varepsilon\vec{u}+(p+p_{\text{изл}})\,\vec{u}+\vec{S}\right]=Q;\quad \varepsilon=E+\frac{(\vec{u},\vec{u})}{2}+\frac{U_p}{\rho};\quad \vec{S}=-\frac{l_p c}{3}\nabla U_p.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь t — время; r, z, l — декартовы координаты; $\vec{u}(u_r,u_z,u_l)$ — скорость вещества; p — давление вещества; $p_{\text{изл}}$ — давление излучения; U_p — плотность равновесного излучения; c — скорость света; ν — частота излучения; $\vec{\Omega}$ — направление полета фотонов; $J_{\nu p}=\dfrac{p_c\nu^3}{\exp\left[h\nu/(kT)\right]-1}$ — спектральная интенсивность равновесного излучения, $p_c=\dfrac{2h}{c^2}$; T — температура вещества; h — постоянная Планка; k — постоянная Больцмана; σ_0 — постоянная Стефана—Больцмана, $\sigma=\dfrac{4\sigma_0}{c}$; l_p — длина пробега; $E=E(\rho,T)$ — внутренняя энергия вещества; $Q=Q(T)$ — источник; ε — полная энергия вещества; $\vec{S}$ — поток излучения.

Запишем уравнения (1) через полную производную по времени:

$$\begin{gathered}
\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}(\vec{u})=0;\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{u},\nabla);\\
\rho\frac{d\vec{u}}{dt}+\nabla(p+p_{\text{изл}})=0;\quad \rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\operatorname{div}\left[(p+p_{\text{изл}})\,\vec{u}+\vec{S}\right]=Q.
\end{gathered}\tag{2}$$

Умножая второе уравнение системы (2) на $\vec{u}$ и вычитая его из третьего, получаем уравнение для внутренней энергии вещества:

$$\rho\frac{d\left(E+\dfrac{U_p}{\rho}\right)}{dt}+(p+p_{\text{изл}})\operatorname{div}(\vec{u})+\operatorname{div}\left(\vec{S}\right)=Q. \tag{3}$$

Основные предположения. Пусть функции E, T, p, ρ, $\vec{u}$ зависят от одной переменной $\xi=qt-d_rr-$ $-d_zz-d_ll+e=qt-\vec{D}\vec{r}^{\,*}+e$. Тогда из системы (2), (3) с учетом того, что

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{d\xi}\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\xi}{\partial t}+(\vec{u},\nabla\xi)=q-\vec{u}\vec{D}=x(\xi),\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}=q,\quad \nabla\xi=-\vec{D},\quad d=\left|\vec{D}\right|,$$

$$\operatorname{div}(\vec{u})=\frac{d\vec{u}}{d\xi}\nabla\xi=\frac{dx}{d\xi},\quad \operatorname{div}\left(\vec{S}\right)=-\operatorname{div}\left(\frac{l_pc}{3}\nabla U_p\right)=-\frac{l_pcd^2}{3}\frac{d^2U_p}{d\xi^2},$$

получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
x\frac{d\rho}{d\xi}+\rho\frac{dx}{d\xi}=0;\\
\rho x\frac{dx}{d\xi}+d^2\frac{d\left(p+p_{\text{изл}}\right)}{d\xi}=0;\\
\rho x\frac{d\left(E+\dfrac{U_p}{\rho}\right)}{d\xi}+\left(p+p_{\text{изл}}\right)\frac{dx}{d\xi}-\frac{l_pcd^2}{3}\frac{d^2U_p}{d\xi^2}=Q.
\end{gathered} \tag{4}$$

Систему уравнений (4) дополняем УРСами вида $E=E_0\rho^mT^n$, $p=p_0\rho^{m_1}T^{n_1}$, где m, n, m_1, n_1, p_0, E_0 — положительные константы.

Из первого уравнения системы (4) получаем $\dfrac{dx\rho}{d\xi}=0$, или

$$x\rho=\rho_0, \tag{5}$$

где ρ_0 — произвольная константа. Тогда оставшиеся уравнения системы (4) приобретают вид

$$\frac{d\left[\rho_0x+d^2\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\dfrac{1}{3}\sigma T^4\right)\right]}{d\xi}=0; \tag{6}$$

$$\rho_0\frac{d\left(E_0\rho^mT^n\right)}{d\xi}+\frac{d\left(x\sigma T^4\right)}{d\xi}+\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\frac{1}{3}\sigma T^4\right)\frac{dx}{d\xi}=\frac{l_pcd^2}{3}\frac{d^2\left(\sigma T^4\right)}{d\xi^2}+Q. \tag{7}$$

Из уравнения (6) получаем $\rho_0x+d^2\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\dfrac{1}{3}\sigma T^4\right)=x_0$, где $x_0=\text{const}$, или

$$x=\rho_0^{-1}\left[x_0-d^2\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\frac{1}{3}\sigma T^4\right)\right]. \tag{8}$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), получаем

$$\rho_0\left(nE_0\rho^mT^{n-1}\frac{dT}{d\xi}+mE_0T^n\rho^{m-1}\frac{d\rho}{d\xi}\right)+\frac{4\sigma T^3}{\rho_0}\left[x_0-d^2\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\frac{1}{3}\sigma T^4\right)\right]\frac{dT}{d\xi}-d^2\rho_0^{-1}\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}\sigma T^4\right)\left[p_0\left(n_1\rho^{m_1}T^{n_1-1}\frac{dT}{d\xi}+m_1T^{n_1}\rho^{m_1-1}\frac{d\rho}{d\xi}\right)+\frac{4\sigma T^3}{3}\frac{dT}{d\xi}\right]=\frac{4l_pcd^2}{3}\sigma T^2\left(3\frac{dT}{d\xi}+T\frac{d^2T}{d\xi^2}\right)+Q. \tag{9}$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (8), получаем алгебраическое уравнение относительно ρ, T:

$$\rho_0^2=\rho\left[x_0-d^2\left(p_0\rho^{m_1}T^{n_1}+\frac{1}{3}\sigma T^4\right)\right]. \tag{10}$$

*Здесь и в дальнейшем, где это упрощает запись, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначено просто как $\vec{a}\vec{b}$.

Если выразить из уравнения (10) ρ или T и подставить в уравнение (9), то получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно одной из функций, которое в некоторых случаях разрешимо в квадратурах. В общем случае решение получить не удается, поэтому рассмотрим простейшие случаи.

Задача без источника. Рассмотрим случай $Q = 0$; $m = m_1 = 0$; $n = n_1 = 4$ (УРСы: $E = E_0T^4$, $p = p_0T^4$).

Из уравнения (8) получаем $x = \rho_0^{-1}\left[x_0 - d^2\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)U_p\right]$. Вместо уравнения (9) получаем уравнение

$$\left[\frac{\rho_0 E_0}{\sigma} + \frac{x_0}{\rho_0} - \frac{d^2}{\rho_0}\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{7}{3}\right)U_p\right]\frac{dU_p}{d\xi} = \frac{l_p c d^2}{3}\frac{d^2U_p}{d\xi^2},$$

которое после интегрирования по ξ принимает вид

$$\frac{l_p c d^2}{3}\frac{dU_p}{d\xi} = aU_p^2 + bU_p + c_0, \tag{11}$$

где $a = -\frac{d^2}{2\rho_0}\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{7}{3}\right)$; $b = \frac{\rho_0 E_0}{\sigma} + \frac{x_0}{\rho_0}$; c_0 — произвольная константа, которую выбираем из условия $b^2 - 4ac_0 = 0$ для наиболее простого вида функции U_p при интегрировании уравнения (11) по ξ: $\int \frac{dU_p}{aU_p^2 + bU_p + c_0} = -\frac{2}{2aU_p + b}$. В результате интегрирования уравнения (11) получаем

$$U_p = -\frac{1}{a}\left[\frac{l_p c d^2}{3(\xi + c_1)} + \frac{b}{2}\right], \quad \text{или} \quad T = \sqrt[4]{\frac{2\rho_0}{\sigma d^2}\frac{\frac{l_p c d^2}{3(\xi + c_1)} + \frac{\rho_0 E_0}{2\sigma} + \frac{x_0}{2\rho_0}}{\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{7}{3}\right)}},$$

где c_1 — произвольная константа.

Из уравнения (10) получаем $\rho = \dfrac{\rho_0^2}{x_0 - d^2\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)U_p}$.

Из уравнения $x = q - \vec{u}\vec{D} = \dfrac{\rho_0}{\rho}$ получаем $\vec{u} = \dfrac{q\rho - \rho_0}{d^2\rho}\vec{D}$.

Задача с ненулевым источником. Рассмотрим случай $Q = \dfrac{d\left(Q_0U_p + Q_1U_p^2\right)}{d\xi}$, где $m = m_1 = 0$; $n = n_1 = 4$ (УРСы: $E = E_0T^4$, $p = p_0T^4$).

Из уравнения (7) получаем аналогично предыдущему случаю уравнение (11) с коэффициентами $a = -\frac{d^2}{2\rho_0}\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{7}{3}\right) - Q_1$; $b = \frac{\rho_0 E_0}{\sigma} + \frac{x_0}{\rho_0} - Q_0$; $c_0 = \frac{b^2}{4a}$. В результате интегрирования уравнения (11) получаем

$$U_p = -\frac{1}{a}\left[\frac{l_p c d^2}{3(\xi + c_1)} + \frac{b}{2}\right], \quad \text{или} \quad T = \sqrt[4]{\frac{\frac{l_p c d^2}{3(\xi + c_1)} + \frac{\rho_0 E_0}{2\sigma} + \frac{x_0}{2\rho_0} - Q_0}{\frac{\sigma d^2}{2\rho_0}\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{7}{3}\right) + \sigma Q_1}},$$

где c_1 — произвольная константа.

Из уравнения (10) получаем $\rho = \dfrac{\rho_0^2}{x_0 - d^2\left(\frac{p_0}{\sigma} + \frac{1}{3}\right)U_p}$.

Из уравнения $x = q - \vec{u}\vec{D} = \dfrac{\rho_0}{\rho}$ получаем $\vec{u} = \dfrac{q\rho - \rho_0}{d^2\rho}\vec{D}$.

Следует заметить, что полученные решения можно использовать в одномерном и двумерном случаях, выбирая вектор $\vec{D}$ соответственно в виде $D = 1$ или $\vec{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Уравнения РГД с учетом переноса энергии излучения в P_1-приближении

Уравнения РГД с учетом переноса энергии в P_1-приближении отличаются от системы (1) правыми частями в уравнениях

$$\begin{gathered}
\rho\frac{d\vec{u}}{dt}+\nabla(p)=\rho\vec{I},\quad \vec{I}=\frac{1}{c\rho}\int\limits_0^\infty \alpha_\nu\vec{S}_\nu d\nu,\quad \vec{S}_\nu=\int\limits_\Omega \vec{\Omega}I_\nu d\Omega;\\
\rho\frac{dE}{dt}+p\mathrm{div}(\vec{u})=Q+Q_I,\quad Q_I=\int\limits_0^\infty \alpha_{c\nu}(U_\nu-B_\nu)\,d\nu,\quad U_\nu=\int\limits_\Omega I_\nu d\Omega,
\end{gathered}\tag{12}$$

где $B_\nu=\dfrac{p_u\nu^3}{\exp[h\nu/(kT)]-1}$ — спектральная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света, $p_u=\dfrac{15c\sigma}{\pi^4}=\dfrac{8\pi h}{c^2}$, $B_\nu=\int\limits_\Omega I_{\nu p}d\Omega$, $\int\limits_0^\infty B_\nu d\nu=\dfrac{p\pi^4}{15}T^4=c\sigma T^4=cU_p$.

Уравнения переноса энергии для спектрального P_1-приближения с учетом газодинамики в приближении полного увлечения фотонов средой имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{U_\nu}{\rho}\right)+\mathrm{div}\left(\vec{S}_\nu\right)+\alpha_{c\nu}U_\nu=\alpha_{c\nu}B_\nu-\frac{U_\nu}{3c}\mathrm{div}(\vec{u});\\
\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{S}_\nu}{\rho}\right)+\frac{1}{3}\nabla(U_\nu)+\alpha_\nu\vec{S}_\nu=0,\quad \vec{S}_\nu=(S_{r,\nu},S_{z,\nu},S_{l,\nu}).
\end{gathered}\tag{13}$$

Используя соотношение $\rho\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)=\mathrm{div}(\vec{u})$, систему уравнений (13) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\frac{1}{c}\frac{\partial U_\nu}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\vec{S}_\nu+\frac{1}{c}\vec{u}U_\nu\right)+\alpha_{c\nu}U_\nu=\alpha_{c\nu}B_\nu-\frac{U_\nu}{3c}\mathrm{div}(\vec{u});\\
\frac{1}{c}\frac{\partial S_{r,\nu}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathrm{div}(\vec{u}S_{r,\nu})+\frac{1}{3}\frac{\partial U_\nu}{\partial r}+\alpha_\nu S_{r,\nu}=0;\\
\frac{1}{c}\frac{\partial S_{z,\nu}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathrm{div}(\vec{u}S_{z,\nu})+\frac{1}{3}\frac{\partial U_\nu}{\partial z}+\alpha_\nu S_{z,\nu}=0;\\
\frac{1}{c}\frac{\partial S_{l,\nu}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathrm{div}(\vec{u}S_{l,\nu})+\frac{1}{3}\frac{\partial U_\nu}{\partial l}+\alpha_\nu S_{l,\nu}=0.
\end{gathered}\tag{14}$$

Умножая первое уравнение системы (12) на $\vec{u}$ и складывая его с уравнением для внутренней энергии, получаем

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\mathrm{div}(p\vec{u})=Q+Q_I+\rho\left(\vec{I},\vec{u}\right),\quad \varepsilon=E+\frac{(\vec{u},\vec{u})}{2}.$$

Интегрируя первое уравнение системы (13) по частоте и складывая его с предыдущим уравнением, получаем уравнение для полной энергии:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\mathrm{div}(p\vec{u})+\mathrm{div}\left(\vec{S}\right)=Q-p_{\text{изл}}\mathrm{div}(\vec{u})+\rho\left(\vec{I},\vec{u}\right),\quad \varepsilon=E+\frac{(\vec{u},\vec{u})}{2}+\frac{U}{c\rho},\quad U=\int\limits_0^\infty U_\nu d\nu.$$

Основные предположения. Пусть функции E, T, p, ρ, $\vec{u}$ зависят от одной переменной $\xi=qt-d_rr-d_zz-d_ll+e=qt-\vec{D}\vec{r}+e$. Для остальных функций будем предполагать, что $U_\nu=\lambda B_\nu$, $\vec{S}_\nu=(\lambda_rB_\nu,\lambda_zB_\nu,\lambda_lB_\nu)=\vec{\lambda}_1B_\nu$, где λ, q, e, d_r, d_z, d_l, λ_r, λ_z, λ_l — произвольные константы. Тогда из системы (14) с учетом того, что $\dfrac{\partial\xi}{\partial t}=q$, $\nabla\xi=-\vec{D}$, получаем

$$\begin{gathered}
\frac{q\lambda}{c}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}-\vec{\lambda}_1\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}-\frac{\lambda}{c}\vec{u}\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}+\frac{\lambda}{c}B_\nu\mathrm{div}(\vec{u})+\lambda\alpha_{c\nu}B_\nu=\alpha_{c\nu}B_\nu-\frac{\lambda}{3c}B_\nu\mathrm{div}(\vec{u});\\
\frac{q}{c}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}-\frac{1}{c}\vec{u}\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}+\frac{1}{c}B_\nu\mathrm{div}(\vec{u})+\frac{\lambda}{3\lambda_r}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial r}+\alpha_\nu B_\nu=0;\\
\frac{q}{c}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}-\frac{1}{c}\vec{u}\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}+\frac{1}{c}B_\nu\mathrm{div}(\vec{u})+\frac{\lambda}{3\lambda_z}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\alpha_\nu B_\nu=0;
\end{gathered}$$

$$\frac{q}{c}\frac{\partial B_\nu}{\partial \xi} - \frac{1}{c}\vec{u}\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial \xi} + \frac{1}{c}B_\nu \operatorname{div}(\vec{u}) + \frac{\lambda}{3\lambda_l}\frac{\partial B_\nu}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial l} + \alpha_\nu B_\nu = 0.$$

Предполагая, что $\frac{1}{\lambda_r}\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{\lambda_z}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_l}\frac{\partial \xi}{\partial l} = -\frac{1}{y}$, где y — произвольная константа, получаем

$$\frac{1}{\lambda_r}\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{\lambda_z}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_l}\frac{\partial \xi}{\partial l} = \frac{\vec{\lambda}_1}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}\nabla\xi = -\frac{\vec{\lambda}_1\vec{D}}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}.$$

Тогда из предыдущей системы

$$\alpha_{c\nu} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\left\{\left[\left(\frac{\vec{\lambda}_1}{\lambda} + \frac{\vec{u}}{c}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} - \frac{4}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\right\}; \quad \alpha_\nu = \left[\left(\frac{\vec{u}}{c} + \frac{\lambda}{3}\frac{\vec{\lambda}_1}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} - \frac{1}{c}\operatorname{div}(\vec{u});$$

$$\alpha_{s\nu} = \alpha_\nu - \alpha_{c\nu} = \frac{1}{\lambda-1}\left\{\left\{\left\{\vec{\lambda}_1\left[\frac{\lambda(\lambda-1)}{3\left|\vec{\lambda}_1\right|^2} - 1\right] - \frac{\vec{u}}{c}\right\}\vec{D} + \frac{q}{c}\right\}\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} + \frac{\lambda+3}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\right\}.$$

Из физических условий $U_\nu \geq \left|\vec{S}_\nu\right| \geq 0$ получаем ограничения на коэффициенты $\lambda \geq 0$, $\left|\vec{\lambda}_1\right| \leq \lambda$. Из условий $\alpha_\nu \geq 0$, $\alpha_{c\nu} \geq 0$, $\alpha_{s\nu} \geq 0$ получаем

$$\begin{gathered}
\left[\left(\frac{\vec{u}}{c} + \frac{\lambda}{3}\frac{\vec{\lambda}_1}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} \geq \frac{1}{c}\operatorname{div}(\vec{u}); \\
\frac{1}{\lambda-1}\left\{\left[\left(\frac{\vec{\lambda}_1}{\lambda} + \frac{\vec{u}}{c}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi}\right\} \geq \frac{1}{\lambda-1}\frac{4}{3c}\operatorname{div}(\vec{u}); \\
\frac{1}{\lambda-1}\left\{\left\{\left\{\vec{\lambda}_1\left[\frac{\lambda(\lambda-1)}{3\left|\vec{\lambda}_1\right|^2} - 1\right] - \frac{\vec{u}}{c}\right\}\vec{D} + \frac{q}{c}\right\}\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi}\right\} \geq -\frac{\lambda+3}{\lambda-1}\frac{1}{3c}\operatorname{div}(\vec{u}).
\end{gathered} \tag{15}$$

Сложность неравенств (15) заключается в том, что в них слева находится спектральное выражение, а справа — выражение, не зависящее от спектра фотонов.

Умножаем первое уравнение системы (12) на $-\vec{D}$ и учитываем, что $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla\xi) = q - \vec{u}\vec{D} = x(\xi)$, $\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{d\vec{u}}{d\xi}\nabla\xi = \frac{dx}{d\xi}$. Тогда уравнения газодинамики (12) принимают вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
x\frac{d\rho}{d\xi} + \rho\frac{dx}{d\xi} = 0; \\
\rho x\frac{dx}{d\xi} + d^2\frac{dp}{d\xi} = -\rho\vec{I}\vec{D}; \\
\rho x\frac{dE}{d\xi} + p\frac{dx}{d\xi} = Q + Q_I,
\end{gathered} \tag{16}$$

где $d = \left|\vec{D}\right|$; $\vec{S}_\nu = yB_\nu\vec{D}$; $\vec{\lambda}_1 = y\vec{D}$; $\left|\vec{\lambda}_1\right|^2 = (yd)^2$;

$$\vec{I} = \frac{1}{c\rho}\int_0^\infty \alpha_\nu \vec{S}_\nu d\nu = \frac{\vec{\lambda}_1}{c\rho}\int_0^\infty \alpha_\nu B_\nu d\nu = \frac{\sigma y\vec{D}}{\rho}\left\{\left[\left(\frac{\vec{u}}{c} + \frac{\lambda}{3}\frac{\vec{\lambda}_1}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{dT^4}{d\xi} - \frac{1}{c}\operatorname{div}(\vec{u})T^4\right\} =$$

$$= \frac{y\sigma\vec{D}}{c\rho}\left[\frac{c\lambda}{3y}\frac{dT^4}{d\xi} - \frac{d\left(xT^4\right)}{d\xi}\right] = \frac{y\vec{D}}{c\rho}\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)U_p\right]; \quad \rho\vec{I}\vec{D} = \frac{yd^2}{c}\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)U_p\right];$$

$$Q_I = (\lambda-1)\int_0^\infty \alpha_{c\nu}B_\nu d\nu = c\sigma\lambda\left\{\left[\left(\frac{\vec{\lambda}_1}{\lambda} + \frac{\vec{u}}{c}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{dT^4}{d\xi} - \frac{1}{c}\operatorname{div}(\vec{u})T^4\right\} =$$

$$= \sigma\lambda\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda} - x\right)\frac{dT^4}{d\xi} - \frac{4T^4}{3}\frac{dx}{d\xi}\right] = \lambda\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda} - x\right)\frac{dU_p}{d\xi} - \frac{4U_p}{3}\frac{dx}{d\xi}\right].$$

Из первого уравнения системы (16) получаем $\dfrac{dx\rho}{d\xi} = 0$, или $x\rho = \rho_0$, где ρ_0 — произвольная константа. Тогда оставшиеся уравнения системы (16) приобретают вид

$$\rho_0 \frac{dx}{d\xi} + d^2 \frac{dp}{d\xi} = -\frac{\lambda\sigma d^2}{3}\frac{dT^4}{d\xi} + \frac{y\sigma d^2}{c}\frac{d\left(xT^4\right)}{d\xi}; \tag{17}$$

$$\rho_0 \frac{dE}{d\xi} + p\frac{dx}{d\xi} = \sigma\lambda\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda} - x\right)\frac{dT^4}{d\xi} - \frac{4T^4}{3}\frac{dx}{d\xi}\right] + Q. \tag{18}$$

Систему уравнений (17), (18) дополняем УРСами вида $E = E_0\rho^m T^n$, $p = p_0\rho^{m_1}T^{n_1}$, где m, n, m_1, n_1, p_0, E_0 — положительные константы.

Из уравнений (17) после интегрирования по ξ получаем

$$\rho_0 x + d^2 p_0 \rho^{m_1} T^{n_1} + \left(\frac{\lambda}{3} - \frac{xy}{c}\right)\sigma d^2 T^4 = x_0 = \text{const},$$

или

$$x = \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\rho_0 - \frac{y}{c}d^2 U_p\right)^{-1}\left(x_0 - d^2 p_0 \rho^{m_1} T^{n_1} - \frac{\lambda}{3}d^2 U_p\right). \tag{19}$$

Подставляя УРСы и выражение (19) в уравнение (18), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно T. В общем случае решение получить не удается, поэтому рассмотрим простейшие варианты.

Предварительно обсудим диапазон изменения некоторых параметров. Плотность излучения может отличаться от плотности равновесного излучения в несколько раз, поэтому примем $0 \le \lambda \le 10$. Температура вещества в рассматриваемых задачах обычно находится в диапазоне от 0 до 10 кэВ, поэтому примем $U_p < c$. Скорость вещества много меньше скорости света, $|\vec{u}| < c$, поэтому примем $|x| = \left|q - \vec{u}\vec{D}\right| < q + cd$. Направления распространения тепловой волны и потока излучения должны совпадать, поэтому из условия $\vec{S}_\nu = yB_\nu\vec{D}$ следует $y \ge 0$. Из условий $\left|\vec{\lambda}_1\right|^2 = (yd)^2$, $\left|\vec{\lambda}_1\right| \le \lambda$, получаем $y \le \dfrac{\lambda}{d}$.

Вернемся к неравенствам (15). С учетом введенных обозначений их можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)\frac{d\ln B_\nu}{d\xi} - \frac{dx}{d\xi} \ge 0;\\
&\frac{1}{\lambda - 1}\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda} - x\right)\frac{d\ln B_\nu}{d\xi} - \frac{4}{3}\frac{dx}{d\xi}\right] \ge 0;\\
&\frac{1}{\lambda - 1}\left\{\left[x - cyd^2 + \frac{c\lambda(\lambda - 1)}{3y}\right]\frac{d\ln B_\nu}{d\xi} + \frac{\lambda + 3}{3}\frac{dx}{d\xi}\right\} \ge 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

При $\dfrac{c\lambda}{3y} - x \ge 0$, или $\vec{u}\vec{D} \ge q - \dfrac{c\lambda}{3y}$, из первого уравнения системы (20) получаем $\dfrac{d\ln B_\nu}{d\xi} \ge -\dfrac{d\ln\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)}{d\xi} = \dfrac{d\ln\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)^{-1}}{d\xi}$. Чтобы избавиться в этом неравенстве от зависимости по спектру, воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial\xi} = \frac{1}{B_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\nu}{T^2}\frac{\exp(\nu/T)}{\exp(\nu/T) - 1}\frac{\partial T}{\partial\xi} = \frac{(\nu/T)\exp(\nu/T)}{\exp(\nu/T) - 1}\frac{\partial\ln T}{\partial\xi} \ge \frac{\partial\ln T}{\partial\xi}.$$

Из неравенства $\dfrac{\partial\ln B_\nu}{\partial\xi} \ge \dfrac{\partial\ln T}{\partial\xi} \ge \dfrac{d\ln\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)^{-1}}{d\xi}$ получаем

$$\frac{\partial\left[\ln T - \ln\left(\frac{c\lambda}{3y} - x\right)^{-1}\right]}{\partial\xi} = \frac{\partial\left\{\ln\left[T\left(\frac{c\lambda}{3y} - q + \vec{u}\vec{D}\right)\right]\right\}}{\partial\xi} \ge 0.$$

Из этого неравенства видно, что если T и $\vec{u}$ — возрастающие функции от ξ, то и функция $\ln\left[T\left(\frac{c\lambda}{3y}-q+\vec{u}\vec{D}\right)\right]$ будет возрастающей. Если T и $\vec{u}$ — убывающие функции, то $\ln\left[T\left(\frac{c\lambda}{3y}-q+\vec{u}\vec{D}\right)\right]$ будет убывающей функцией. В этом случае надо рассматривать вариант $\frac{c\lambda}{3y}-x\le 0$, или $\vec{u}\vec{D}\le q-\frac{c\lambda}{3y}$, при котором из первого уравнения системы (20) получаем $\dfrac{\partial\left\{\ln\left[T\left(\frac{c\lambda}{3y}-q+\vec{u}\vec{D}\right)\right]\right\}}{\partial\xi}\le 0$. Если T — возрастающая функция, а $\vec{u}$ — убывающая или наоборот, то в зависимости от условия $\vec{u}\vec{D}\ge q-\frac{c\lambda}{3y}$ или $\vec{u}\vec{D}\le q-\frac{c\lambda}{3y}$ надо требовать, чтобы функция $T\left(\frac{c\lambda}{3y}-q+\vec{u}\vec{D}\right)$ была либо возрастающей, либо убывающей.

Из второго уравнения системы (20) при $\lambda>1$ и $\frac{cyd^2}{\lambda}-x\ge 0$ получаем

$$\frac{d\ln B_\nu}{d\xi}\ge\frac{d\ln T}{d\xi}\ge\frac{d\ln\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-x\right)^{-4/3}}{d\xi},\quad \text{т. е.}\quad \frac{d\left\{\ln\left[T\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-q+\vec{u}\vec{D}\right)^{4/3}\right]\right\}}{d\xi}\ge 0.$$

Из этого неравенства видно, что если T и $\vec{u}$ — возрастающие функции, то и $\ln\left[T\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-q+\vec{u}\vec{D}\right)^{4/3}\right]$ будет возрастающей функцией. Остальные варианты поведения функций T и $\vec{u}$ рассматриваются аналогично предыдущему случаю.

Из третьего уравнения системы (20) при $\lambda>1$ и $x-cyd^2+\frac{c\lambda(\lambda-1)}{3y}\ge 0$ получаем

$$\frac{d\ln B_\nu}{d\xi}\ge\frac{d\ln T}{d\xi}\ge-\frac{d\ln\left[x-cyd^2+\frac{c\lambda(\lambda-1)}{3y}\right]^{(\lambda+3)/3}}{d\xi},\quad \text{т. е.}\quad \frac{d\left\{\ln\left[T\left(q-\vec{u}\vec{D}-cyd^2+\frac{c\lambda(\lambda-1)}{3y}\right)^{(\lambda+3)/3}\right]\right\}}{d\xi}\ge 0.$$

Из этого неравенства видно, что если T и $\vec{u}$ — возрастающие функции, то и $\ln\left[T\left(q-\vec{u}\vec{D}-cyd^2+\frac{c\lambda(\lambda-1)}{3y}\right)^{(\lambda+3)/3}\right]$ будет возрастающей функцией, если функция $\left(q-\vec{u}\vec{D}-cyd^2+\frac{c\lambda(\lambda-1)}{3y}\right)^{(\lambda+3)/3}$ возрастает. Остальные варианты поведения функций T и $\vec{u}$ рассматриваются аналогично предыдущему случаю.

Задача без источника. Рассмотрим случай $Q=0$; $m=m_1=0$; $n=n_1=4$ (УРСы: $E=U_p$, $p=U_p$). Из уравнения (19) получаем

$$x=\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p},\quad a=\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)d^2,\quad b=\frac{y}{c}d^2,\quad \frac{dx}{d\xi}=-\frac{a\rho_0-bx_0}{(\rho_0-bU_p)^2}\frac{dU_p}{d\xi}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (18), получаем уравнение относительно U_p:

$$\rho_0\frac{dU_p}{d\xi}+U_p\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p}\right)=\lambda\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p}\right)\frac{dU_p}{d\xi}-\frac{4U_p}{3}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p}\right)\right],$$

которое можно привести к виду $\dfrac{AU_p^2+BU_p+C}{(\rho_0-bU_p)^2}\dfrac{dU_p}{d\xi}=0$. После интегрирования по ξ получаем алгебраическое уравнение, дающее конкретные значения для U_p. А в результате решения надо получить функцию от ξ. То есть система заданных функций переопределена. Поэтому в УРСах одну из функций p, E будем считать неизвестной.

Если за неизвестную функцию принять p, то из уравнения (17) получим

$$p=\frac{x_0-\rho_0x}{d^2}-\left(\frac{\lambda}{3}-\frac{xy}{c}\right)U_p.$$

Подставляя это выражение в уравнение (18), получаем уравнение относительно x, U_p:

$$\rho_0\frac{dU_p}{d\xi}+\left[\frac{x_0-\rho_0 x}{d^2}-\left(\frac{\lambda}{3}-\frac{xy}{c}\right)U_p\right]\frac{dx}{d\xi}=\lambda\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-x\right)\frac{dU_p}{d\xi}-\frac{4U_p}{3}\frac{dx}{d\xi}\right],$$

которое в общем случае разрешить не удается.

Если за неизвестную функцию принять E, то из уравнения (18) получаем уравнение

$$\rho_0\frac{dE}{d\xi}+\left(1+\frac{4\lambda}{3}\right)U_p\frac{d}{d\xi}\left(\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p}\right)=\lambda\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p}\right)\frac{dU_p}{d\xi},$$

которое можно привести к виду

$$\rho_0\frac{dE}{d\xi}=\left[cyd^2-\lambda\left(\frac{x_0-aU_p}{\rho_0-bU_p}\right)+\left(1+\frac{4\lambda}{3}\right)\frac{(a\rho_0-bx_0)\,U_p}{(\rho_0-bU_p)^2}\right]\frac{dU_p}{d\xi}.$$

После интегрирования по ξ с учетом того, что $\int\frac{U_p dU_p}{\rho_0-bU_p}=\frac{1}{b^2}\Big(\rho_0-bU_p-\rho_0\ln|\rho_0-bU_p|\Big)$, $\int\frac{U_p dU_p}{(\rho_0-bU_p)^2}=$ $=\frac{1}{b^2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_0-bU_p}+\ln|\rho_0-bU_p|\right)$, получаем

$$\rho_0 E=\left(cyd^2-\lambda\frac{a}{b}\right)U_p+\frac{\rho_0}{b^2}\left(1+\frac{4\lambda}{3}\right)\frac{a\rho_0-bx_0}{\rho_0-bU_p}+\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)\frac{a\rho_0-bx_0}{b^2}\ln|\rho_0-bU_p|+\frac{a\lambda\rho_0}{b^2}+E_0,$$

где E_0 — произвольная константа.

Условия положительности E и $\frac{dE}{dT}$ дают ограничения на неопределенные коэффициенты. Конкретный вид ограничений получается в каждом частном случае свой, но для любого ограниченного по U решения можно подобрать достаточно большую константу E_0, чтобы гарантировать положительность E. В этом решении вид функции U_p не оговорен, поэтому ее можно выбирать произвольной, но удовлетворяющей условиям положительности E и $\frac{dE}{dT}$.

Задача с ненулевым источником. Рассмотрим случай $Q\neq 0$; $x=a+bU_p$; $m=0$; $n=4$; $E_0=\sigma$ (УРС: $E=U_p$).

Тогда из уравнения (19) следует, что давление должно принимать вид $p=p_0U_p^2+p_1U_p+p_2$, где $p_0=\frac{by}{c}$, $p_1=\frac{ay}{c}-\frac{b\rho_0}{d^2}-\frac{\lambda}{3}$, $p_2=\frac{x_0-a\rho_0}{d^2}$. Вместо уравнения (18) получаем уравнение

$$\rho_0\frac{dU_p}{d\xi}+b\Big(p_0U_p^2+p_1U_p+p_2\Big)\frac{dU_p}{d\xi}=\lambda\left[\left(\frac{cyd^2}{\lambda}-a-bU_p\right)\frac{dU_p}{d\xi}-\frac{4bU_p}{3}\frac{dU_p}{d\xi}\right]+Q,$$

которое дает выражение для источника

$$Q=\left[bp_0U_p^2+\left(bp_1+\frac{7\lambda b}{3}\right)U_p+bp_2+\rho_0+\lambda a-cyd^2\right]\frac{dU_p}{d\xi}.$$

При этом не накладывается никаких ограничений на вид функции U_p.

Уравнения РГД с учетом переноса энергии излучения в диффузионном приближении

Уравнения переноса энергии для спектрального диффузионного приближения с учетом газодинамики в приближении полного увлечения фотонов средой имеют вид

$$\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{U_\nu}{\rho}\right)+\operatorname{div}\left(\vec{S}_\nu\right)+\alpha_{c\nu}U_\nu=\alpha_{c\nu}B_\nu-\frac{U_\nu}{3c}\operatorname{div}(\vec{u});\qquad(21)$$

$$\frac{1}{3}\nabla(U_\nu)+\alpha_\nu\vec{S}_\nu=0.\qquad(22)$$

Используя соотношение $\rho \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) = \operatorname{div}(\vec{u})$, систему уравнений (21), (22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{S}_\nu + \frac{1}{c}\vec{u}U_\nu\right) + \alpha_{c\nu}U_\nu = \alpha_{c\nu}B_\nu - \frac{U_\nu}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\,; \\ &\frac{1}{3}\nabla(U_\nu) + \alpha_\nu \vec{S}_\nu = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Умножая уравнение (22) на $\vec{u}$ и складывая его с уравнением для внутренней энергии, получаем

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div}(p\vec{u}) = Q + Q_I + \rho\left(\vec{I},\vec{u}\right), \quad \varepsilon = E + \frac{(\vec{u},\vec{u})}{2}. \tag{24}$$

Интегрируя уравнение (21) по частоте и складывая его с уравнением (24), получаем уравнение для полной энергии

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div}(p\vec{u}) + \operatorname{div}\left(\vec{S}\right) = Q - p_{\text{изл}}\operatorname{div}(\vec{u}) + \rho\left(\vec{I},\vec{u}\right), \quad \varepsilon = E + \frac{(\vec{u},\vec{u})}{2} + \frac{U}{c\rho}, \quad U = \int\limits_0^\infty U_\nu d\nu. \tag{25}$$

В диффузионном приближении $\vec{I} = \dfrac{1}{c\rho}\displaystyle\int\limits_0^\infty \alpha_\nu \vec{S}_\nu d\nu = -\dfrac{1}{3c\rho}\displaystyle\int\limits_0^\infty \nabla U_\nu d\nu = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p_{\text{изл}}$, следовательно, $p_{\text{изл}}\operatorname{div}(\vec{u}) - \rho\left(\vec{I},\vec{u}\right) = p_{\text{изл}}\operatorname{div}(\vec{u}) + \vec{u}\nabla p_{\text{изл}} = \operatorname{div}(p_{\text{изл}}\vec{u})$ и уравнение для полной энергии (25) принимает вид

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} + \operatorname{div}\left[(p + p_{\text{изл}})\,\vec{u} + \vec{S}\right] = Q.$$

Основные предположения. Пусть функции E, T, p, ρ, $\vec{u}$ зависят от одной переменной $\xi = qt - d_r r - d_z z - d_l l + e = qt - \vec{D}\vec{r} + e$. Для остальных функций будем предполагать, что $U_\nu = \lambda B_\nu$, $\vec{S}_\nu = (\lambda_r B_\nu, \lambda_z B_\nu, \lambda_l B_\nu) = \vec{\lambda}_1 B_\nu$, где λ, q, e, d_r, d_z, d_l, λ_r, λ_z, λ_l — произвольные константы. Тогда из системы (23) с учетом того, что $\dfrac{\partial\xi}{\partial t} = q$, $\nabla\xi = -\vec{D}$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{q\lambda}{c}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi} - \vec{\lambda}_1\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi} - \frac{\lambda}{c}\vec{u}\vec{D}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi} + \frac{\lambda}{c}B_\nu\operatorname{div}(\vec{u}) + \lambda\alpha_{c\nu}B_\nu = \alpha_{c\nu}B_\nu - \frac{\lambda}{3c}B_\nu\operatorname{div}(\vec{u})\,; \\ &-\frac{\lambda}{3}\frac{\partial B_\nu}{\partial\xi}\vec{D} + \alpha_\nu B_\nu\vec{\lambda}_1 = 0. \end{aligned}$$

Предполагая, что $\dfrac{1}{\lambda_r}\dfrac{\partial\xi}{\partial r} = \dfrac{1}{\lambda_z}\dfrac{\partial\xi}{\partial z} = \dfrac{1}{\lambda_l}\dfrac{\partial\xi}{\partial l} = -\dfrac{1}{y}$, где y — произвольная константа, получаем

$$\frac{1}{\lambda_r}\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{1}{\lambda_z}\frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_l}\frac{\partial\xi}{\partial l} = \frac{\vec{\lambda}_1}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}\nabla\xi = -\frac{\vec{\lambda}_1\vec{D}}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}.$$

Тогда из предыдущей системы

$$\alpha_{c\nu} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\left\{\left[\left(\frac{\vec{\lambda}_1}{\lambda} + \frac{\vec{u}}{c}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{\partial\ln B_\nu}{\partial\xi} - \frac{4}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\right\}; \quad \alpha_\nu = \frac{\lambda}{3}\frac{\vec{\lambda}_1\vec{D}}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^2}\frac{\partial\ln B_\nu}{\partial\xi};$$

$$\alpha_{s\nu} = \alpha_\nu - \alpha_{c\nu} = \frac{1}{\lambda-1}\left\{\lambda\left\{\left[\vec{\lambda}_1\left(\frac{\lambda-1}{3\left|\vec{\lambda}_1\right|^2} - 1\right) - \frac{\vec{u}}{c}\right]\vec{D} + \frac{q}{c}\right\}\frac{\partial\ln B_\nu}{\partial\xi} + \frac{4\lambda}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\right\}.$$

Из физических условий $U_\nu \geq \left|\vec{S}_\nu\right| \geq 0$ получаем ограничения на коэффициенты $\lambda \geq 0$, $\left|\vec{\lambda}_1\right| \leq \lambda$. Из условий $\alpha_\nu \geq 0$, $\alpha_{c\nu} \geq 0$, $\alpha_{s\nu} \geq 0$ получаем

$$\vec{\lambda}_1\vec{D} \geq 0 \ \ (y > 0); \quad \frac{1}{\lambda-1}\left\{\left[\left(\frac{\vec{\lambda}_1}{\lambda} + \frac{\vec{u}}{c}\right)\vec{D} - \frac{q}{c}\right]\frac{\partial\ln B_\nu}{\partial\xi}\right\} \geq \frac{1}{\lambda-1}\frac{4}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\,;$$

$$\frac{1}{\lambda-1}\left\{\lambda\left\{\left[\vec{\lambda}_1\left(\frac{\lambda-1}{3\left|\vec{\lambda}_1\right|^2} - 1\right) - \frac{\vec{u}}{c}\right]\vec{D} + \frac{q}{c}\right\}\frac{\partial\ln B_\nu}{\partial\xi}\right\} \geq -\frac{\lambda+3}{\lambda-1}\frac{1}{3c}\operatorname{div}(\vec{u})\,.$$

Уравнения газодинамики приводим к виду системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16), где $\rho\vec{I}\vec{D} = \frac{\vec{D}}{c}\int\limits_0^\infty \alpha_\nu \vec{S}_\nu d\nu = \frac{\vec{\lambda}_1\vec{D}}{c}\int\limits_0^\infty \alpha_\nu B_\nu d\nu = \frac{\lambda d^2}{3}\frac{dU_p}{d\xi}$. Из первого уравнения системы (16) $x\rho = \rho_0$, где ρ_0 — произвольная константа. Тогда второе уравнение системы (16) приобретает вид $\rho_0\frac{dx}{d\xi} + d^2\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\lambda d^2}{3}\frac{dU_p}{d\xi}$. После интегрирования по ξ получаем $\rho_0 x + d^2 p + \frac{\lambda d^2}{3}U_p = x_0 = \text{const}$, или

$$\frac{\rho_0^2}{\rho} + d^2 p + \frac{\lambda d^2}{3}U_p = x_0. \tag{26}$$

Из вида уравнения (26) следует условие неотрицательности x_0: $x_0 \geq 0$. Фактически соотношение (26) определяет вид УРСа для давления

$$p = \frac{x_0}{d^2} - \frac{\lambda}{3}U_p - \frac{\rho_0^2}{\rho d^2}, \tag{27}$$

однако чаще используется выражение $p = p_0\rho^{m_1}T^{n_1}$. Его можно получить из (27), подбирая специальным образом функцию ρ или T.

Подставляя выражения $x = \dfrac{x_0 - d^2 p - \frac{\lambda d^2}{3}U_p}{\rho_0}$, $\frac{dx}{d\xi} = -\frac{d^2}{\rho_0}\left(\frac{dp}{d\xi} + \frac{\lambda}{3}\frac{dU_p}{d\xi}\right)$ в уравнение (18), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, откуда после интегрирования по ξ

$$\frac{\rho_0^2}{d^2}E - \frac{1}{2}p^2 - \frac{4\lambda}{3}pU_p - \frac{7\lambda^2}{18}U_p^2 + \left(\frac{\lambda x_0}{d^2} - \frac{cy}{\rho_0}\right)U_p = \int Q d\xi + Q_0, \tag{28}$$

где Q_0 — произвольная константа.

Подставляя УРСы вида $E = E_0\rho^m T^n$, $p = p_0\rho^{m_1}T^{n_1}$, где m, n, m_1, n_1, p_0, E_0 — положительные константы, в уравнение (28), получаем уравнение относительно T. В общем случае решение зависит от вида источника, поэтому рассмотрим простейшие случаи.

Задача без источника. Рассмотрим случай $Q = 0$. Из уравнения (28)

$$E = \frac{d^2}{\rho_0^2}\left[Q_0 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{4\lambda}{3}pU_p + \frac{7\lambda^2}{18}U_p^2 - \left(\frac{\lambda x_0}{d^2} - \frac{cy}{\rho_0}\right)U_p\right]. \tag{29}$$

Подставляя в выражение (29) различные формулы для давления, будем получать формулы для внутренней энергии. Если в этом выражении положить $p = p_0\rho^{m_1}T^{n_1}$, то получим

$$E = \frac{d^2}{\rho_0^2}\left[Q_0 + \frac{p_0^2}{2}\rho^{2m_1}T^{2n_1} + \frac{4\lambda}{3}\sigma p_0\rho^{m_1}T^{4+n_1} + \frac{7\lambda^2}{18}\sigma^2T^8 - \left(\frac{\lambda x_0}{d^2} - \frac{cy}{\rho_0}\right)\sigma T^4\right].$$

Из выражения (26) $\rho = \dfrac{\rho_0^2}{x_0 - d^2 p - \frac{\lambda d^2}{3}U_p} = \dfrac{\rho_0^2}{x_0 - d^2 p_0\rho^{m_1}T^{n_1} - \frac{\lambda d^2}{3}\sigma T^4}$. Константы Q_0, x_0 выбираем из условия положительности ρ, E и $\frac{dE}{dT}$.

Задача с ненулевым источником. Рассмотрим случай $Q = \xi^s$, $s > 0$; $p = p_0\rho^{m_1}T^{n_1}$. Из уравнения (29)

$$E = \frac{d^2}{\rho_0^2}\left[Q_0 + \frac{1}{s+1}\xi^{s+1} + \frac{p_0^2}{2}\rho^{2m_1}T^{2n_1} + \frac{4\lambda}{3}\sigma p_0\rho^{m_1}T^{4+n_1} + \frac{7\lambda^2}{18}\sigma^2T^8 - \left(\frac{\lambda x_0}{d^2} - \frac{cy}{\rho_0}\right)\sigma T^4\right].$$

Остальные формулы не зависят от выбора источника и практически не меняются.

Уравнения РГД с учетом переноса энергии излучения в кинетическом приближении

Уравнение переноса энергии в кинетическом приближении с учетом газодинамики имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{\Omega}I_\nu\right) + (\alpha_{c\nu} + \alpha_{s\nu})I_\nu = \frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}B_\nu + \int\limits_{\Omega'}\chi_\nu I_\nu d\Omega' + \frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}B_{A\nu}\right),$$

где $B_{A\nu} = (k_{1\nu}B_\nu + 4\pi k_{2\nu}I_\nu)$, $k_{1\nu}$, $k_{2\nu}$ — некоторые коэффициенты.

Если рассеяние изотропно, то уравнение переноса имеет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\vec{\Omega}I_\nu\right)+\left(\alpha_{c\nu}+\alpha_{s\nu}\right)I_\nu=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}B_\nu+\alpha_{s\nu}U_\nu+\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}B_{A\nu}\right). \tag{30}$$

Используя соотношение $\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\operatorname{div}(\vec{u})$, уравнение (30) можно записать в виде приближения полного увлечения частиц средой:

$$\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{I_\nu}{\rho}\right)+\operatorname{div}\left(\vec{\Omega}I_\nu\right)+\alpha_\nu I_\nu=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}B_\nu+\alpha_{s\nu}U_\nu+\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}B_{A\nu}\right)+\operatorname{div}\left(\vec{u}I_\nu\right).$$

Решение уравнения (30) ищем в виде

$$I_\nu=f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)B_\nu(T), \tag{31}$$

где $f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ — произвольная положительная функция. Тогда плотность излучения принимает вид

$$U_\nu=\int\limits_\Omega I_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}=\lambda(t,\vec{r})\,B_\nu(T),$$

где $\lambda(t,\vec{r})=\int\limits_\Omega f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}$ — положительная функция.

Для нахождения функции $f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ выражение (31) подставим в уравнение (30):

$$\left(\frac{1}{c}(f)'_t+\vec{\Omega}\nabla f\right)B_\nu+f\left[\frac{1}{c}(B_\nu)'_t+\vec{\Omega}\nabla B_\nu+\left(\alpha_{c\nu}+\alpha_{s\nu}-\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}k_{2\nu}\right)B_\nu\right]=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}+\lambda\alpha_{s\nu}+\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}k_{1\nu}\right)B_\nu.$$

Поделив данное уравнение на функцию B_ν, получим

$$\frac{1}{c}(f)'_t+\vec{\Omega}\nabla f+B_\nu^{-1}(B_\nu)'_T f\left[\frac{1}{c}(T)'_t+\vec{\Omega}\nabla T\right]+f\left(\alpha_{c\nu}+\alpha_{s\nu}-\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}k_{2\nu}\right)=\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}+\lambda\alpha_{s\nu}+\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}k_{1\nu}\right).$$

Так как первые два слагаемых этого уравнения не зависят от частоты излучения, то его решение можно заменить решением системы двух уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c}(f)'_t+\vec{\Omega}\nabla f=0;\\&f\left[\frac{1}{c}(T)'_t+\vec{\Omega}\nabla T\right]=B_\nu\left[(B_\nu)'_T\right]^{-1}\left[\frac{1}{4\pi}\left(\alpha_{c\nu}+\lambda\alpha_{s\nu}+\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}k_{1\nu}\right)-f\left(\alpha_{c\nu}+\alpha_{s\nu}-\frac{1}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\alpha_{c\nu}k_{2\nu}\right)\right].\end{aligned} \tag{32}$$

Выражая из второго уравнения системы (32) функцию f, получаем формулу, где функция f зависит от частоты:

$$f_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{\theta_1\left(\alpha_{c\nu}+\lambda\alpha_{s\nu}+\alpha_{c\nu}\dfrac{k_{1\nu}}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\right)}{\dfrac{1}{c}(T)'_t+\vec{\Omega}\nabla T+\theta_1\left(\alpha_{c\nu}+\alpha_{s\nu}-\alpha_{c\nu}\dfrac{k_{2\nu}}{c}\vec{u}\vec{\Omega}\right)},$$

где $\theta_1(t,\vec{r})=B_\nu\left[(B_\nu)'_T\right]^{-1}$.

В этом случае решение уравнения (30) надо рассматривать в виде $I_\nu=f_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)B_\nu(T)$, $U_\nu=\lambda_\nu(t,\vec{r})\,B_\nu(T)$. Это усложняет вычисление интегралов по частоте в выражениях для $\vec{I}$ и Q_I. Однако при некоторых предположениях можно освободиться в функции f от зависимости по спектру. Пусть, например, коэффициенты $k_{1\nu}$, $k_{2\nu}$ не зависят от частоты и имеют вид $k_{1\nu}=u^{-1}k_1$, $k_{2\nu}=u^{-1}k_2$, где k_1, k_2 — некоторые константы, $u=|\vec{u}|$, а коэффициент рассеяния пропорционален коэффициенту поглощения, т. е.

$$\alpha_{s\nu}=\alpha_0\alpha_{c\nu}, \tag{33}$$

где α_0 — положительная константа. Тогда, выбирая коэффициент поглощения в виде

$$\alpha_{c\nu} = \theta_1\left(t,\vec{r}\right)\left(\ln B_\nu\right)'_T, \tag{34}$$

где $\theta_1\left(t,\vec{r}\right)$ — положительная функция, можно освободиться во втором уравнении системы (32) от зависимости по спектру. Подставляя соотношения (33), (34) во второе уравнение системы (32), получаем формулу для нахождения функции f:

$$f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\theta_1\left(1+\alpha_0\lambda+\dfrac{k_1}{c}\vec{n}_u\vec{\Omega}\right)}{\dfrac{1}{c}(T)'_t+\vec{\Omega}\nabla T+\theta_1\left(1+\alpha_0-\dfrac{k_2}{c}\vec{n}_u\vec{\Omega}\right)}, \quad \vec{n}_u = \frac{\vec{u}}{|u|}.$$

Введем в рассмотрение автомодельную переменную $\xi\left(t,\vec{r}\right)$ и потребуем, чтобы температура вещества и функция $\theta_1\left(t,\vec{r}\right)$ зависели только от нее, т. е. $T = T(\xi)$, $\theta_1\left(t,\vec{r}\right) = \theta_1\left(\xi\right)$. Тогда функция f примет вид

$$f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{\theta_2\left(1+\alpha_0\lambda+\dfrac{k_1}{c}\vec{n}_u\vec{\Omega}\right)}{\dfrac{1}{c}\xi'_t+\theta_2\left(\xi\right)\left(1+\alpha_0-\dfrac{k_2}{c}\vec{n}_u\vec{\Omega}\right)+\vec{\Omega}\nabla\xi} = \frac{\theta_2}{4\pi}\frac{a_1+\vec{\Omega}\vec{b}_1}{a+\vec{\Omega}\vec{b}}, \tag{35}$$

где $\theta_2\left(\xi\right) = \theta_1\left(\xi\right)\left(T'_\xi\right)^{-1}$; $a = \dfrac{1}{c}\xi'_t+\theta_2\left(\xi\right)\left(1+\alpha_0\right)$; $\vec{b} = \nabla\xi-\theta_2\left(\xi\right)\dfrac{k_2}{c}\vec{n}_u$; $a_1 = 1+\alpha_0\lambda$; $\vec{b}_1 = \dfrac{k_1}{c}\vec{n}_u$.

Используя выражение (35), получаем формулу для нахождения функции λ:

$$\lambda\left(t,\vec{r}\right) = \int\limits_\Omega f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega} = \frac{\theta_2}{4\pi}\int\limits_\Omega\frac{\left(a_1+\vec{\Omega}\vec{b}_1\right)d\vec{\Omega}}{a+\vec{\Omega}\vec{b}} = \frac{\theta_2}{4\pi}\left(\int\limits_\Omega\frac{a_1 d\vec{\Omega}}{a+\left|\vec{\Omega}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}+\int\limits_\Omega\frac{\vec{\Omega}\vec{b}_1 d\vec{\Omega}}{a+\left|\vec{\Omega}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}\right) =$$

$$= \frac{\theta_2}{4\pi}\left(a_1\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\mu d\psi}{a+b\mu}+\frac{\vec{b}_1\vec{b}}{b}\int\limits_{-1}^{1}\frac{2\pi\mu d\mu}{a+b\mu}\right) = \frac{\theta_2}{4\pi}\left[a_1\frac{4\pi L}{a}+\frac{4\pi\left(1-L\right)}{b^2}\vec{b}_1\vec{b}\right] = \theta_2\left[\frac{a_1 L}{a}+\frac{\left(1-L\right)\vec{b}_1\vec{b}}{b^2}\right],$$

где $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\vec{\Omega}d\psi = \int\limits_0^{\pi}2\mu\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}d\psi = 2\pi\mu\frac{\vec{b}}{b}$; $L = \dfrac{1}{2y}\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right| \geq 0$, $y = \dfrac{b}{a}$, $b = \left|\vec{b}\right|$; $\mu = \cos\theta$, θ — угол между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{b}$.

Отсюда с учетом того, что в правой части присутствует член, зависящий от λ, $a_1 = 1+\alpha_0\lambda$, получаем $\lambda\left(t,\vec{r}\right) = \theta_2\dfrac{L+\left(1-L\right)\vec{b}_1\vec{b}ab^{-2}}{a-\theta_2\alpha_0 L}$.

Функция λ должна быть положительна, но в общем случае анализ этой функции затруднен. В простейшем случае, при $k_1 = k_2 = \alpha_0 = 0$, получаем $\lambda = \dfrac{\theta_2 L}{a} = \dfrac{\theta_2}{2b}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$ и вид функции λ определяется видом функции L, которая всегда положительна.

Рассмотрим случай $\theta_2 = \theta_0 = \mathrm{const}$. Полученная по формуле (35) функция f удовлетворяет первому уравнению системы (32) при постоянном векторе $\vec{n}_u$.

Уравнения газодинамики приводим к виду системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16), где

$$Q_I = \int\limits_0^\infty\alpha_{c\nu}\int\limits_\Omega\left(I_\nu-\frac{1}{4\pi}B_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu = \theta_0\int\limits_0^\infty\left(B_\nu\right)'_\xi d\nu\int\limits_\Omega\left(f-\frac{1}{4\pi}\right)d\vec{\Omega} = c\theta_0\left(\lambda-1\right)\frac{\partial U_p}{\partial\xi},$$

$$\rho\vec{I} = \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty\alpha_\nu\vec{S}_\nu d\nu = \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty\alpha_\nu\int\limits_\Omega\vec{\Omega}I_\nu d\vec{\Omega}d\nu = \frac{\theta_0\left(1+\alpha_0\right)}{c}\int\limits_0^\infty\left(B_\nu\right)'_\xi d\nu\int\limits_\Omega\vec{\Omega}fd\vec{\Omega} =$$

$$= \frac{\left(1+\alpha_0\right)\theta_0^2}{4\pi}\frac{\partial U_p}{\partial\xi}\int\limits_\Omega\frac{\left[\vec{\Omega}a_1+\vec{\Omega}\left(\vec{\Omega}\vec{b}_1\right)\right]d\vec{\Omega}}{a+\vec{\Omega}\vec{b}} = \frac{\left(1+\alpha_0\right)\theta_0^2}{4\pi}\frac{\partial U_p}{\partial\xi}\left[a_1\int\limits_\Omega\frac{\vec{\Omega}d\vec{\Omega}}{a+\left|\vec{\Omega}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}+\int\limits_\Omega\frac{\vec{\Omega}\left(\vec{\Omega}\vec{b}_1\right)d\vec{\Omega}}{a+\left|\vec{\Omega}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}\right] =$$

$$= \frac{\left(1+\alpha_0\right)\theta_0^2}{4\pi}\frac{\partial U_p}{\partial\xi}\left(a_1\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{a+b\mu}\int\limits_0^{2\pi}\vec{\Omega}d\psi d\mu+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left|\vec{\Omega}\right|\left|\vec{b}_1\right|\cos\theta}{a+b\mu}\int\limits_0^{2\pi}\vec{\Omega}d\psi d\mu\right) =$$

$$= \frac{(1+\alpha_0)\,\theta_0^2}{4\pi}\frac{\partial U_p}{\partial \xi}\left(2\pi a_1 \frac{\vec{b}}{b}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mu d\mu}{a+b\mu} + 2\pi b_1 \frac{\vec{b}}{b}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mu^2 d\mu}{a+b\mu}\right) =$$

$$= \frac{(1+\alpha_0)\,\theta_0^2}{4\pi}\frac{\partial U_p}{\partial \xi}\left[a_1 \frac{4\pi\,(1-L)}{b^2}\vec{b} + a\frac{4\pi\,(L-1)}{b^2}\vec{b}_1\right] = (1+\alpha_0)\,\theta_0^2\,(1-L)\,\frac{a_1\vec{b} - a\vec{b}_1}{b^2}\frac{\partial U_p}{\partial \xi},$$

где $\int\limits_0^{2\pi}\vec{\Omega}d\psi = \int\limits_0^{\pi}2\mu\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}d\psi = 2\pi\mu\frac{\vec{b}}{b}$; $L = \frac{1}{2y}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| \geq 0$, $y = \frac{b}{a}$; $b_1 = \left|\vec{b}_1\right|$, $\vec{b}_1 = b_1\frac{\vec{b}}{b}$ при предположении, что $\vec{b}$ и $\vec{b}_1$ — коллинеарные векторы.

Из первого уравнения системы газодинамики $x\rho = \rho_0$, где ρ_0 — произвольная константа. Тогда второе уравнение системы газодинамики приобретает вид

$$\rho_0\frac{dx}{d\xi} + d^2\frac{dp}{d\xi} = -\,(1+\alpha_0)\,\theta_0^2\,(1-L)\,\frac{a_1\vec{b} - a\vec{b}_1}{b^2}\frac{dU_p}{d\xi}\vec{D}.$$

После интегрирования по ξ получаем

$$\rho_0 x + d^2 p + (1+\alpha_0)\,\theta_0^2\vec{D}\int(1-L)\,\frac{a_1\vec{b} - a\vec{b}_1}{b^2}\frac{dU_p}{d\xi}d\xi = x_0 = \mathrm{const},$$

или в виде выражения для p:

$$p = \frac{1}{d^2}\left[x_0 - \frac{\rho_0^2}{\rho} - (1+\alpha_0)\,\theta_0^2\vec{D}\int(1-L)\,\frac{a_1\vec{b} - a\vec{b}_1}{b^2}dU_p\right].$$

Подставляя в уравнение энергии формулу Q_I и УРС вида $E = E_0\rho^m T^n$, получаем уравнение для нахождения источника:

$$Q = \rho_0\frac{dE}{d\xi} - c\theta_0\left[\lambda(\xi) - 1\right]\frac{dU_p}{d\xi} + p\frac{dx}{d\xi}.$$

Если источник равен нулю, то вместо использования УРСа вида $E = E_0\rho^m T^n$ необходимо рассматривать уравнение для нахождения внутренней энергии:

$$\rho_0 E = E_0 + c\theta_0\int\left[\lambda(\xi) - 1\right]dU_p - \int p dx.$$

В этом случае надо проверять условия положительности для полученных формул E и $\frac{dE}{dT}$.

Заключение

В работе построены точные решения уравнения переноса энергии излучением с учетом движения среды. Решения системы уравнений РГД получены в декартовой системе координат с учетом переноса излучения в приближении полного увлечения фотонов средой. В уравнении движения вклад спектрального излучения учитывается через импульс фотонов. Решения построены для совместной системы уравнений газодинамики и переноса излучения в различных приближениях при специально подобранных коэффициентах поглощения, рассеяния, источника и внутренней энергии вещества.

Список литературы

1. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

2. *Александров В.В.* Об одном классе автомодельных течений излучающего газа // Механика жидкости и газа. 1970. № 4. С. 8—22.

3. *Думкина Г.В., Козманов М.Ю.* Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19, вып. 4. С. 1061—1063.

4. *Ахромеева Т.С., Волосевич П.П., Леванов Е.И., Маслянкин В.И.* К расчету задач трехтемпературной гидродинамики: Препринт № 28. М.: ИПМ АН СССР, 1980.

5. *Андреев Е.С., Думкина Г.В., Козманов М.Ю.* О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и спектрального нестационарного переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1981. Т. 21, вып. 4. С. 1054—1055.

6. *Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б.* О некоторых точных решениях системы уравнений диффузии излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 3. С. 65—67.

7. *Андреев Е.С., Козманов М.Ю., Рачилов Е.Б.* Точные решения системы уравнений переноса излучения с разрывом на границе раздела двух сред // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, вып. 1. С. 161—163.

8. *Шестаков А.А.* Об одном точном решении системы спектральных уравнений переноса лучистой энергии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 2. С. 40—43.

9. *Шестаков А.А.* Об одном точном решении системы спектральных уравнений переноса лучистой энергии // Проблемы теоретической и прикладной математики. Свердловск, 1989. С. 40.

10. *Жмайло В.А., Садовой А.А., Чулков Н.М.* Об одной модельной задаче о взаимодействии неравновесного излучения с газом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 2. С. 41—48.

11. *Тихомиров Б.П.* Об одном классе точных решений системы уравнений радиационного теплопереноса // Там же. 1986. Вып. 2. С. 3—8.

12. *Гусев В.Ю., Козманов М.Ю.* О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния // Там же. Вып. 3. С. 20—21.

13. *Козманов М.Ю., Нурбаков А.Ш.* О некоторых точных решениях системы уравнений радиационной газовой динамики // Там же. С. 68—70.

14. *Шестаков А.А.* О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом анизотропного рассеяния // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 1. С. 23—26.

15. *Шестаков А.А.* Точные решения системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом анизотропного рассеяния в многомерном случае // Там же. Вып. 3. С. 12—14.

16. *Шестаков А.А.* Точные решения уравнения переноса энергии в двухкомпонентной плазме // Там же. 1994. Вып. 2. С. 72—77.

17. *Шестаков А.А.* Точные решения задач радиационной газовой динамики с учетом спектрального переноса излучения // Тез. докл. мат. конф. пяти ядерных центров США и России. Снежинск, 1996.

18. *Шестаков А.А.* Точные решения системы уравнений радиационной газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 1—2. С. 38—46.

19. *Вершинская А.С., Гусев В.Ю., Завьялов В.В.* Точные решения системы уравнений изотропного переноса излучения и энергии в цилиндрически-симметричной геометрии // Там же. 2001. Вып. 2. С. 63—71.

Статья поступила в редакцию 16.10.02.