

УДК 517.958:536.2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

И.А. Кондаков, В.Н. Селезнев, О.И. Стародумов, А.А. Шестаков
(РФЯЦ—ВНИИТФ)

Рассматриваются 11 модельных задач, предназначенных для тестирования одномерных и двумерных программ переноса нейтральных частиц в различных приближениях. Задачи построены на основе аналитических решений.

Введение

Проблема тестирования возникает в связи с каждой программой. Тестирование двумерных программ обычно начинают со счета одномерных задач, на которых проверяют свойство сохранения симметрии на двумерных сетках, точность разностной схемы, т. е. зависимость от шагов по времени и пространству, точность передачи граничных условий при счете по областям и т. д. При тестировании программ в качестве модельных желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. При отсутствии аналитических решений для тестирования обычно привлекают задачи, посчитанные по другим программам, однако это не всегда гарантирует достоверный результат. Поэтому вопрос построения аналитических тестов до сих пор является актуальным.

Рассматриваются 11 модельных задач, предназначенных для тестирования одномерных и двумерных программ переноса нейтральных частиц в различных приближениях. Задачи объединены в 7 тестов и построены на основе аналитических решений, ранее не публиковавшихся. Для уравнения переноса фотонов решения рассмотрены в приближении лучистой теплопроводности, спектральном кинетическом и P_1 -приближениях, для уравнения переноса нейтронов — в многогрупповом кинетическом и P_1 -приближениях. В многогрупповом приближении решения получены для того, чтобы избежать вопроса выбора групповых констант, а также для удобства тестирования программ, ориентированных на многогрупповое приближение. Задачи строились в основном для тестирования методик комплекса ФЕНИКС [1]. Тесты приводятся в максимально компактном виде: записываются основные предположения для коэффициентов уравнения, вид основных функций с произвольными константами, аналитические решения с конкретными значениями произвольных констант.

В качестве примеров приводятся результаты численных расчетов данных задач по различным методикам.

Тест 1: точное решение уравнения лучистой теплопроводности

Уравнение переноса энергии в приближении лучистой теплопроводности для осесимметричной геометрии имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rK \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0.$$

Тест 1.1: о нагревании двумерной области по экспоненциальному закону. Предположим, что $\varepsilon = AT^\sigma$; $K = K_0 T^n$; $\zeta = ct + b \ln(R - \ln r) + dz + q$; $T = T_0 \exp(\lambda \zeta)$, где $A \geq 0$; $\sigma \geq 0$; $K_0 \geq 0$; $n \geq 0$; $T_0 \geq 0$; c, b, d, q, λ, R — произвольные константы. Тогда получим

$$A = \frac{\lambda d^2 K_0}{c}; \quad \sigma = n + 1; \quad \lambda = \frac{1}{b(n+1)}; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(rK \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0; \quad T = (R - \ln r)^b \exp(ct + dz + q).$$

Пусть $\lambda = c = n = d = K_0 = T_0 = R = 1$; $q = 0$; $e^{-8} \leq r \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$. Тогда $b = 0,5$; $\varepsilon = T^2$; $K = T$; $T = \exp(t + z) \sqrt{1 - \ln r}$.

Начальные условия имеют вид $T(0, r, z) = \exp(z) \sqrt{1 - \ln r}$.

Граничные условия: $T(t, e^{-8}, z) = 3 \exp(t + z)$; $T(t, 1, z) = \exp(t + z)$; $T(t, r, 0) = \exp(t) \sqrt{1 - \ln r}$; $T(t, r, 1) = \exp(t + 1) \sqrt{1 - \ln r}$.

Тест 1.2: о нагревании двумерной области по степенному закону. Предположим, что $\varepsilon = A(r) T^\sigma$; $K = K_0 T^n$; $\zeta = ct + b \ln r + dz + q$; $T = \begin{cases} \zeta^m & \text{при } \zeta^m > 0; \\ 0 & \text{при } \zeta^m \leq 0, \end{cases}$ где $A(r) \geq 0$; $\sigma \geq 0$; $K_0 \geq 0$; $n \geq 0$; $c, b, d, q,$

m — произвольные константы. Тогда получим $A(r) = \frac{mK_0}{c} \left(d^2 + \frac{b^2}{r^2} \right)$; $\sigma = \frac{m(n+1)-1}{m}$.

Пусть $c = m = b = d = K_0 = 1$; $q = 0$; $n = 4$; $e^{-8} \leq r \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$. Тогда $\varepsilon = \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) T^4$; $K = T^4$;
 $T = \begin{cases} z + \ln r + t & \text{при } z + \ln r + t > 0; \\ 0 & \text{при } z + \ln r + t \leq 0. \end{cases}$

Начальные условия имеют вид $T(0, r, z) = z + \ln r$ при $z + \ln r > 0$.

Граничные условия имеют вид $T(t, e^{-8}, z) = z - 8 + t$, $T(t, 1, z) = z$ при $z + \ln r + t > 0$; $T(t, r, 0) = \ln r + t$, $T(t, r, 1) = 1 + \ln r + t$ при $z + \ln r + t > 0$.

В настоящей работе рассмотрено численное решение аналитического теста 1.1 в области $0,1 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ по программе ТОМ1 [2], реализованной в комплексе ФЕНИКС [1]. Сетка равномерная: $\Delta r = 0,09$ ($I = 10$), $\Delta z = 0,1$ ($J = 10$); $t_{\text{нач}} = 0$; $\tau = 0,001$. Константы сходимости итераций: $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$.

Задача считалась до $t = 1$. На рис. 1 приведены профили температуры вдоль двух центральных каналов разностной сетки на конечный момент времени.

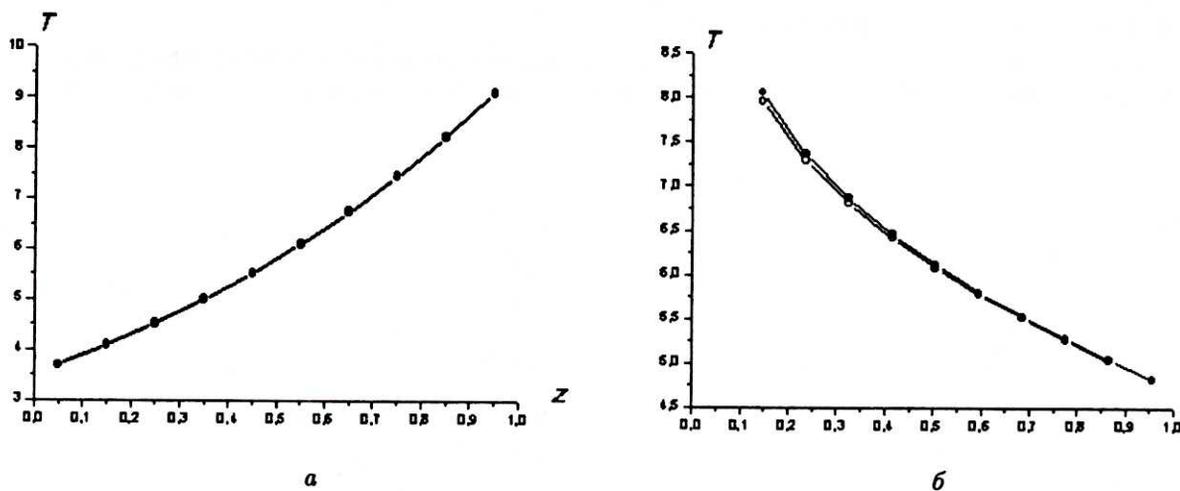


Рис. 1. Профили температуры вдоль каналов разностной сетки: а — $r = 0,505$ ($J = 5$); б — $z = 0,45$ ($I = 5$); —●— точное решение; —○— численное решение

Тест 2: точное решение уравнения переноса излучения в P_1 -приближении

Уравнение переноса энергии в спектральном P_1 -приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{r,\nu}) + \frac{\partial S_{z,\nu}}{\partial z} + \alpha_{c\nu} U_\nu = \alpha_{c\nu} B_\nu;$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{S}_\nu}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla U_\nu + \alpha_\nu \vec{S}_\nu = 0, \quad \vec{S}_\nu = (S_{r,\nu}, S_{z,\nu});$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \alpha_{c\nu} (U_\nu - B_\nu) d\nu + Q.$$

Рассмотрим решение $U_\nu = B_\nu$; $\vec{S}_\nu = \left(\frac{\lambda_r}{r} B_\nu^k, \lambda_z B_\nu \right)$; $B_\nu = \frac{p\nu^3}{\exp(\nu/T) - 1}$; $E = AT^n$, $T = T(\xi)$, $\xi = qt + dz + e$;
 $\alpha_{c\nu} = \alpha_0 \left(\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} - \alpha_1 \right)$; $\alpha_s = \alpha_0 \alpha_1$, где $A \geq 0$; $n \geq 0$; $\alpha_0 \geq 0$; $\alpha_1 \geq 0$; $\lambda_r, \lambda_z, q, k, d, e$ — произвольные константы.

Численное решение аналитического теста. Пусть $c = 3000$; $n = 1$; $A = 1$; $Q = q = -c$; $d = \sqrt{1,5}$; $e = 0$; $k = 0,5$; $\lambda_r = -1$; $\lambda_z = \sqrt{2/3}$; $\alpha_0 = 0,5$; $\alpha_1 = 0,2$; $0 \leq ct \leq 2$; $2 \leq r \leq 3$; $2 \leq z \leq 3$. Тогда $U_\nu = B_\nu$;
 $\vec{S}_\nu = \left(-\frac{1}{r} \sqrt{B_\nu}, \sqrt{\frac{2}{3}} B_\nu \right)$; $\alpha_{c\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} - 0,1$; $\alpha_s = 0,1$; $E = T$, $T = \xi$, $\xi = \sqrt{1,5}z - ct$.

Из условия положительности $\alpha_{c\nu}$ и неравенства $\frac{\partial \ln B_\nu}{\partial \xi} = \frac{(\nu/T) \exp(\nu/T) \partial \ln T}{\exp(\nu/T) - 1} \geq \frac{\partial \ln T}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}$ получаем ограничение на параметр ξ : $\xi \leq 5$, которое всегда выполняется в области $2 \leq z \leq 3$, $0 \leq ct \leq 2$.

Сетка по пространству в численном решении берется равномерная: $\Delta r = 0,01$, $\Delta z = 0,01$. Константы сходимости итераций: $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$.

По энергии фотонов бралось 100 групп: $\varepsilon_g = 1500; 1000; 500; 100; 90; 80; 70; 60; 50; 45; 40; 39; 38; 37; 36; 35; 34; 33; 32; 31; 30; 29; 28; 27; 26; 25; 24; 23; 22; 21; 20; 19; 18; 17; 16; 15; 14; 13; 12; 11; 10; 9; 8; 7; 6; 5; 4,5; 4; 3,5; 3; 2,9; 2,8; 2,7; 2,6; 2,5; 2,4; 2,3; 2,2; 2,1; 2,0; 1,9; 1,8; 1,7; 1,6; 1,5; 1,4; 1,3; 1,2; 1,1; 1,0; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,06; 0,05; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01; 0,009; 0,008; 0,007; 0,006; 0,005; 0,004; 0,003; 0,002; 0,001; 0,0005; 0,0001; 0,00005$.

Задача считалась с $t_{\text{нач}} = 0$, $\tau_{\text{нач}} = 0,00001$ до $t = 0,00007$. Расчеты проводились по программе ТОМ4 [3], реализованной в комплексе ФЕНИКС [1].

На рис. 2 приведено распределение плотности излучения по группам в точке с максимальной температурой ($z = 2,995$, $T_{\text{точное}} \approx 3,467$) на конечный момент времени. Видно, что распределение плотности излучения практически совпадает с точным решением.

На рис. 3 приведены профили температуры вдоль центрального канала ($r = 2,505$) разностной сетки на конечный момент времени. Видно, что профиль температуры практически совпадает с точным решением.

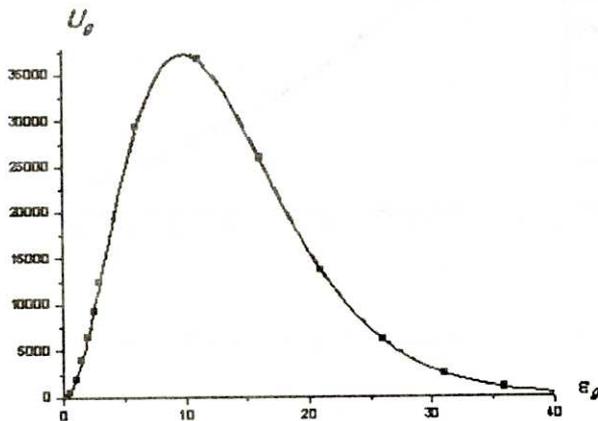


Рис. 2. Распределение плотности излучения на конечный момент времени: — — численное решение; —■— точное решение

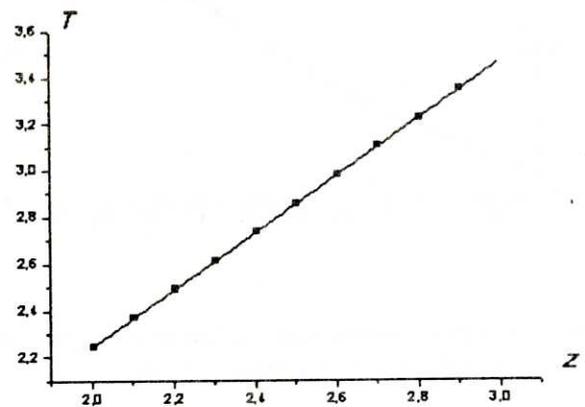


Рис. 3. Профиль температуры вдоль канала ($r = 2,505$) на конечный момент времени: — — численное решение; —■— точное решение

Тест 3: точное решение уравнения переноса излучения

Система уравнений переноса излучения и энергии для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (r I_\nu) + \frac{\partial}{\partial r} (\xi r I_\nu) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu r I_\nu) - \frac{\partial}{\partial \psi} (\eta I_\nu) + r (\kappa_\nu + \chi_\nu) I_\nu = \frac{r}{4\pi} \left(\kappa_\nu B_\nu + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \chi_\nu I_\nu d\mu d\psi \right);$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \kappa_\nu \left(I_\nu - \frac{1}{4\pi} B_\nu \right) d\mu d\psi d\nu.$$

Предположим, что $I_\nu = f(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) B_\nu(T)$; $\chi_\nu = \alpha_0 \kappa_\nu$, $\kappa_\nu = \theta_0(\zeta) (\ln B_\nu)'_\zeta$; $T = T(\zeta)$, $\zeta = ct(1-ct) + z + z^2 + r^2$;

$$f(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\theta_0(1 + \alpha_0 \lambda)}{a + \vec{\Omega} \vec{b}}.$$

Для построения теста рассмотрим область $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ при $0,47 \leq ct \leq 0,5$. Пусть $c = 3000$; $\chi_\nu = 0$; $\theta_0 = 5$; $T = \sqrt[4]{0,8\zeta}$, $\zeta = ct(1-ct) + z + z^2 + r^2$; $f = \frac{1}{4\pi} \frac{5}{6 - 2ct + 2\xi r + \mu(1+2z)}$. При данных предположениях справедливы условия положительности внутренней энергии, коэффициента поглощения, интенсивности и температуры.

Начальные условия:

$$I_\nu(t = 0,47/3000, r, z, \mu, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{5B_\nu(T)}{5,06 + 2\xi r + \mu(1+2z)}; \quad T = \sqrt[4]{0,8(0,2491 + z + z^2 + r^2)}.$$

С учетом соотношений на границах

$$r = 0: \vec{n} = (-1, 0); \vec{\Omega} \vec{n} = \xi n_r + \mu n_z = -\sqrt{1-\mu^2} \cos \psi \leq 0 \text{ для } -1 \leq \mu \leq 1, \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$r = 0,1: \vec{n} = (1, 0); \vec{\Omega} \vec{n} = -\sqrt{1-\mu^2} \cos \psi \leq 0 \text{ для } -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$z = 0: \vec{n} = (0, -1); \vec{\Omega} \vec{n} = -\mu \leq 0 \text{ для } 0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$z = 0,1: \vec{n} = (0, 1); \vec{\Omega} \vec{n} = \mu \leq 0 \text{ для } -1 \leq \mu \leq 0, 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

где $\vec{n} = (n_r, n_z)$ — внешняя нормаль к границе рассматриваемой области, граничные условия имеют следующий вид:

$$I_\nu(t, r = 0, z, \mu, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{5B_\nu(F)}{6 - 2ct + \mu(1+2z)}, \quad F = \sqrt[4]{0,8[ct(1-ct) + z + z^2]} \text{ для } \xi \geq 0, -1 \leq \mu \leq 1, 0,5\pi \leq \psi \leq 1,5\pi;$$

$$I_\nu(t, r = 0,1, z, \mu, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{5B_\nu(F)}{6 - 2ct + 0,2\xi + \mu(1+2z)}, \quad F = \sqrt[4]{0,8[ct(1-ct) + z + z^2 + 0,01]} \text{ для } \xi \leq 0, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \psi \leq 0,5\pi, 1,5\pi \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$I_\nu(t, r, z = 0, \mu, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{5B_\nu(F)}{6 - 2ct + 2\xi r + \mu}, \quad F = \sqrt[4]{0,8[ct(1-ct) + r^2]} \text{ для } \mu \geq 0, 0 \leq \psi \leq 2\pi;$$

$$I_\nu(t, r, z = 0,1, \mu, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{5B_\nu(F)}{6 - 2ct + 2\xi r + 1,2\mu}, \quad F = \sqrt[4]{0,8[ct(1-ct) + 0,11 + r^2]} \text{ для } \mu \leq 0, 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Тогда решение внутри области имеет вид

$$I_\nu(t, r, z, \mu, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{5B_\nu(T)}{6 - 2ct + 2\xi r + \mu(1+2z)}, \quad T = \sqrt[4]{0,8[ct(1-ct) + z + z^2 + r^2]}; \quad \kappa_\nu = T^{-3} (\ln B_\nu)'_T;$$

$$U_\nu = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu d\psi = \lambda B_\nu, \quad \lambda = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f d\mu d\psi = \frac{5}{2b} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|; \quad \int_0^\infty B_\nu d\nu = c\sigma T^4, \quad \sigma = 1,37; \quad \chi_\nu = 0;$$

$$E(t, r, z) = 16440 \left[\frac{5}{4cb} \ln \frac{(a-b)^{a-b} (6+b)^{6+b}}{(a+b)^{a+b} (6-b)^{6-b}} - t \right] + 1000, \quad a = 6 - 2ct, \quad b = [4r^2 + (1+2z)^2]^{1/2}.$$

Квазидиффузионное приближение. Решение поставленной задачи рассмотрим в квазидиффузионном приближении. В таком приближении нет однозначного представления граничного условия для уравнения переноса. Поэтому квазидиффузионные коэффициенты и граничные условия получаются численно, с учетом решения, полученного на кинетическом этапе. Если граничные условия задавать через плотность излучения, то можно получить аналитические формулы на границах, но для тестирования численной программы важна близость постановки задачи к программному алгоритму.

При интегрировании по разностной сетке и переходе к нормальным составляющим потока излучения $(S_1)_i = \bar{\Phi} \bar{n}_i \Delta \ell_i$, $(S_2)_j = \bar{\Phi} \bar{n}_j \Delta \ell_j$ граничные условия принимают вид

$$-\frac{1}{4} C_{g,i,j+1/2} U_{g,i,j+1/2} \pm \frac{1-0,5C_{g,i,j+1/2}}{\Delta \ell_{j+1/2}} (S_1)_{g,i,j+1/2} = \bar{S}_{g,i,j+1/2},$$

где $U = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} J d\mu d\psi$; $\bar{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2)$, $\Phi_1 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi J d\mu d\psi$, $\Phi_2 = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu J d\mu d\psi$; \bar{S}_g — входящий поток; $C_{g,i,j+1/2} = \left(\int_{\bar{\Omega} \bar{n}_i > 0} \bar{\Omega} \bar{n}_i J_{g,i,j+1/2} d\bar{\Omega} \right) / (S_1)_{g,i,j+1/2}$ для $i = 0, I$; $j = 0, \dots, J-1$ — граничный квазидиффузионный

коэффициент. Выражение $S_{1g} = -\frac{1}{4} U_g + \frac{1}{2} S_{1g}$ представляет собой выходящий поток в P_1 -приближении.

Для второй компоненты потока S_2 граничные условия ставятся аналогично:

$$-\frac{1}{4} C_{g,i+1/2,j} U_{g,i+1/2,j} \pm \frac{1-0,5C_{g,i+1/2,j}}{\Delta \ell_{i+1/2}} (S_2)_{g,i+1/2,j} = \bar{S}_{g,i+1/2,j},$$

$$C_{g,i+1/2,j} = \left(\int_{\bar{\Omega} \bar{n}_j > 0} \bar{\Omega} \bar{n}_j J_{g,i+1/2,j} d\bar{\Omega} \right) / (S_2)_{g,i+1/2,j}, \quad i = 0, \dots, I-1, \quad j = 0, J,$$

где $D_1 = U^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi^2 J d\mu d\psi$; $D_2 = U^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu^2 J d\mu d\psi$; $D_3 = U^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi \mu J d\mu d\psi$.

Численное решение аналитического теста. Численное решение рассматриваем в области $0,001 \leq r \leq 0,1$, $0 \leq z \leq 0,1$. Сетка по пространству берется равномерная: $\Delta r = 0,01$, $\Delta z = 0,01$. Константы сходимости итераций: $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$. Групповые константы получались по приближенным формулам:

$k_{cg} = \frac{1}{T^3} \frac{\partial B_g}{\partial T}$. Сетка по энергии ($N = 14$): $\varepsilon_g = 13,5; 11; 9; 7,5; 6,5; 5,75; 5,25; 4,75; 4,25; 3,75; 3,25; 2,5; 1,5;$

0,5. Сетка в пространстве направлений $\bar{\Omega}$ — черепаша (S_{10} -квадратура для 1–11 групп, S_6 -квадратура для 12–14 групп). Задача считалась с $t_{\text{нач}} = 0,000157$ до $t = 0,000167$ с фиксированным шагом $\tau = 0,000001$. Расчеты проводились по методике ТОМ4-КД [4], реализованной в комплексе ФЕНИКС [1].

Так как внутренняя энергия явно не зависит от времени, то производную энергии по времени можно вычислить из выражения $\frac{\partial E(t, r, z)}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$, откуда

$$\frac{\partial E}{\partial T} = \frac{4\sigma \left(\frac{5}{2b} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| - 1 \right)}{0,2cT^{-3}(1-2ct)} = \frac{20 \cdot 1,37T^3}{c(1-2ct)} \left(\frac{2,5}{b} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| - 1 \right).$$

На рис. 4 приведено распределение температуры по z в центральном канале ($r = 0,045$) на конечный момент времени. Видно, что наилучшие результаты дают граничные условия Маршака.

На рис. 5 приведено распределение плотности излучения по группам в центральной точке ($r = 0,045$, $z = 0,045$) на конечный момент времени. Видно, что плотность излучения практически совпадает с точным решением.

Распределение интенсивности излучения по μ , ξ для 13-й группы в центральной точке ($r = 0,045$, $z = 0,045$) на конечный момент времени в трехмерном виде приведено на рис. 6,а, в виде изолиний — на рис. 6,б. На этих графиках различие между точным и численным решениями почти не видно, поэтому на рис. 6,в приведено распределение интенсивности излучения только по μ для 13-й группы в центральной точке ($r = 0,045$, $z = 0,045$) на конечный момент времени. На этом графике в каждой точке μ число маркеров соответствует количеству точек по ξ на сетке черепаша. Различие в распределении интенсивности излучения по ξ еще менее заметное, поэтому эти графики не приводятся.

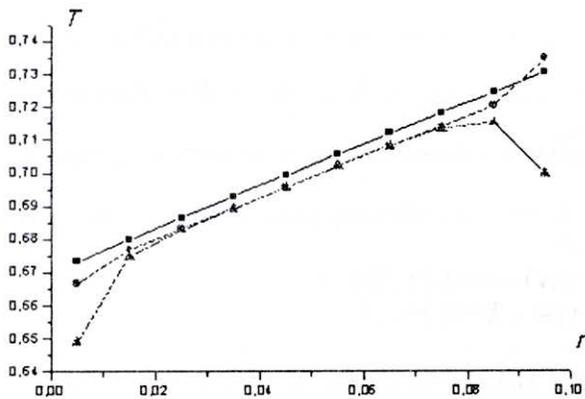


Рис. 4. Распределение температуры по z в центральном канале ($r = 0,045$) на конечный момент времени: —■— аналитическое решение; —●— численное решение, граничные условия Маршака; —▲— численное решение, квазидиффузионные граничные условия

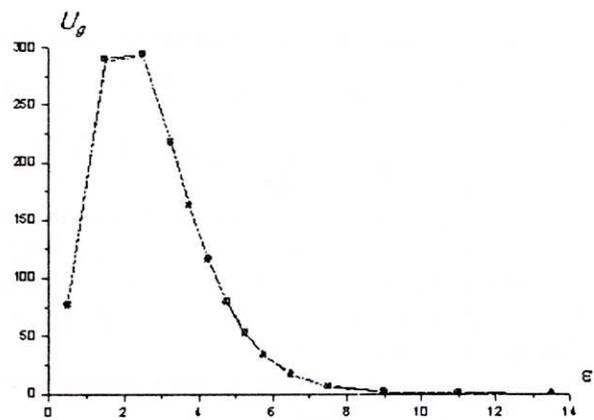
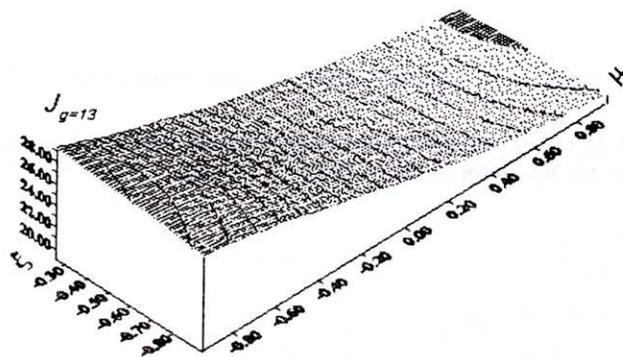
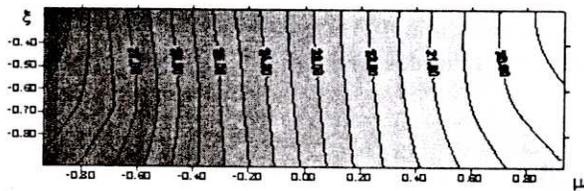


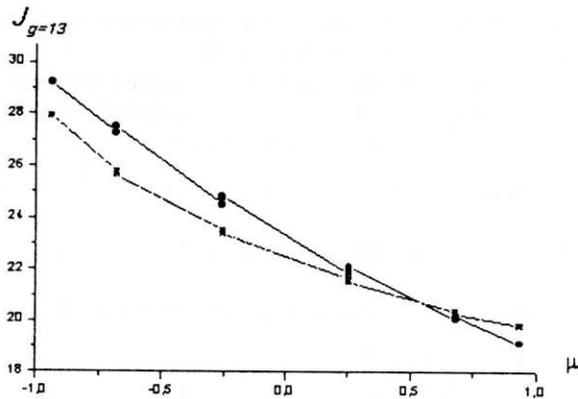
Рис. 5. Распределение плотности излучения по группам в центральной точке ($r = 0,045, z = 0,045$) на конечный момент времени: —■— аналитическое решение; —●— численное решение



а



б



в

Рис. 6. Распределение интенсивности излучения для 13-й группы в центральной точке ($r = 0,045, z = 0,045$) на конечный момент времени: а — трехмерное изображение; б — изолинии в плоскости (μ, ξ) ; в — зависимость от μ : —●— аналитическое решение; —■— численное решение

Тест 4.1: точное решение одномерного уравнения переноса нейтронов в одногрупповом P_1 -приближении

Система одномерных уравнений переноса нейтронов в одногрупповом P_1 -приближении с учетом анизотропии в коэффициенте β имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{v} \right) + \frac{1}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta S) + \alpha U = \beta^0 U + f;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S}{v} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \alpha S = \beta^1 S,$$

где $\eta = \begin{cases} 0 & \text{— плоская геометрия;} \\ 2 & \text{— сферически-симметричная геометрия.} \end{cases}$

Аналитический тест в плоском случае. Пусть $\eta = 0$; $\beta^0 = \beta^1 = \beta$; $f = 0$; $\xi_{\pm} = vkt \pm \sqrt{3}(\alpha - \beta + k)r$. Тогда $U = \frac{\sqrt{3}}{2}(c_1 \exp \xi_- - c_2 \exp \xi_+)$; $S = \frac{1}{2}(c_1 \exp \xi_- + c_2 \exp \xi_+)$, где $v, k, c_1, c_2, \alpha, \beta$ — произвольные константы.

При $v = k = c_1 = -c_2 = 1, \alpha = \beta + 1, \beta$ — произвольная положительная константа получаем $U = \sqrt{3}e^t \operatorname{ch}(2\sqrt{3}r), S = -e^t \operatorname{sh}(2\sqrt{3}r)$.

Численное решение рассматривается в области $0 \leq r \leq 1$. По оси r берется равномерная сетка с шагом $\Delta r = 0,01$ ($I = 100$), шаг по времени — $\Delta t = 0,01$ ($N = 100$).

Начальные условия при $t = 0$: $U(0, r) = \sqrt{3} \operatorname{ch}(2\sqrt{3}r)$; $S(0, r) = -\operatorname{sh}(2\sqrt{3}r)$.

Граничные условия по U : $U(t, 0) = \sqrt{3}e^t \operatorname{ch}(2\sqrt{3}r)$; $U(t, 1) = \sqrt{3}e^t \operatorname{ch}(2\sqrt{3})$.

Задача считалась до $t = 1$.

На рис. 7 представлены профили нейтронного потока U и нейтронного тока S . Видно, что численное и точное решения совпадают.

Аналитический тест в сферически-симметричном случае. Предположим, что $\eta = 2$; $U = U^0 \exp(\lambda \xi)$, $\xi = vt + b \ln r + d$; $f = 0$; $S = U \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{b}{r} U$, где $U^0 \geq 0, v, d, b, \lambda$ — произвольные константы. Тогда $\beta^0 = \alpha + \lambda$; $\beta^1 = \alpha + 4\lambda/3$. Из условия $b = -1/\lambda$ получаем $\frac{\partial}{\partial r}(r^2 S) = 0$.

Пусть $v = 1$; $\lambda = -1$; $d = 0$; $\alpha = 3$; $U^0 = 1$. Тогда $b = 1$; $\beta^0 = 2$; $\beta^1 = 5/3$; $U = \exp(-\xi) = \frac{1}{\exp(t + \ln r)}$; $S = \frac{1}{r \exp(t + \ln r)}$.

Видно, что полученное решение имеет особенность в точке $r = 0$, поэтому область построения тестовой задачи надо выбирать для $r > 0$.

Численное решение рассматривается в области $0,01 \leq r \leq 1$. По оси r берется равномерная сетка с шагом $\Delta r = 0,01$ ($I = 100$) или $\Delta r = 0,001$ ($I = 1000$). Шаг по времени: $\Delta t = 0,01$ ($N = 100$); $\Delta t = 0,001$ ($N = 1000$); $\Delta t = 0,0001$ ($N = 10000$).

Начальные условия при $t = 0$: $U = \frac{1}{\exp(\ln r)}$; $S = \frac{1}{r \exp(\ln r)}$.

Граничные условия по U : $U(t, 0,01) = \frac{1}{\exp(t + \ln 0,01)}$; $U(t, 1) = \frac{1}{\exp t}$.

Граничные условия можно ставить по S : $S(t, 0,01) = \frac{100}{\exp(t + \ln 0,01)}$; $S(t, 1) = \frac{1}{\exp t}$ или для комбинации

$$\frac{1}{4}U + \frac{1}{2}S = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4r}\right) \frac{1}{\exp(t + \ln r)}.$$

В начальный момент на границах $U(0, 0,01) \approx 100$; $U(0, 1) = 1$; $S(0, 0,01) \approx 10000$; $S(0, 1) = 1$.

Задача считалась до $t = 1$. На рис. 8 представлены в логарифмическом масштабе профили нейтронного

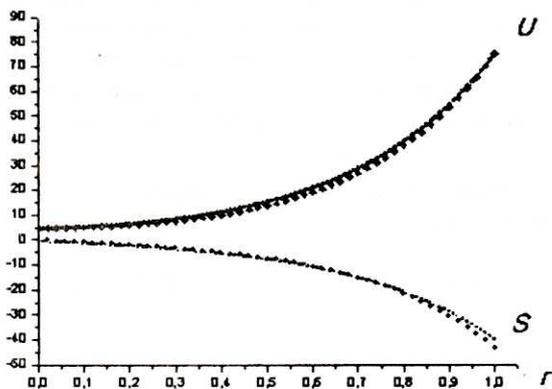


Рис. 7. Профили нейтронного потока U и нейтронного тока S на момент времени $t = 1$ ($\Delta r = 0,01, \Delta t = 0,01$) в плоском случае: \cdots — S численное; $-*$ — U численное; $-●-$ — S точное; $-◆-$ — U точное

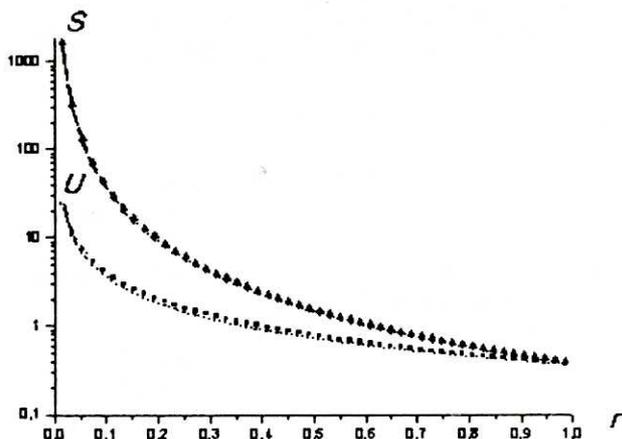


Рис. 8. Профили нейтронного потока U и нейтронного тока S на момент времени $t = 1$ ($\Delta r = 0,01, \Delta t = 0,01$) в сферически-симметричном случае: $-■-$ — U численное; \cdots — U точное; $-▲-$ — S численное; $- - -$ — S точное

потока U и профили нейтронного тока S , полученные на сетке $\Delta r = 0,01$ с шагом по времени $\Delta t = 0,01$. Несмотря на то, что решение резко возрастает на левой границе, численные и точные значения тока и потока на данной сетке полностью совпадают.

Полученное решение легко обобщается на случай $\beta = 0$. При этом точное решение легко получается, если ввести новые коэффициенты $\beta_{\text{нов}}^1 = 0$; $\alpha_{\text{нов}} = \alpha - \beta^1$; $\beta_{\text{нов}}^0 = \beta^0 - \beta^1$, т. е. в этом тесте $\beta_{\text{нов}}^1 = 0$; $\alpha_{\text{нов}} = 4/3$; $\beta_{\text{нов}}^0 = 1/3$.

Тест 4.2: точное решение одномерного уравнения переноса нейтронов в многогрупповом P_1 -приближении

Система одномерных уравнений переноса нейтронов в многогрупповом P_1 -приближении с учетом анизотропии в коэффициенте β имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_g}{v_g} \right) + \frac{1}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta S_g) + \alpha_g U_g &= \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^0 U_{g'} + f_g; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_g}{v_g} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial U_g}{\partial r} + \alpha_g S_g &= \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^1 S_{g'}. \end{aligned}$$

Предположим, что $\eta = 2$; $U_g = U_g^0 \exp(\lambda_g \xi_g)$, $\xi_g = v_g t + b_g \ln r + d_g$; $f_g = 0$; $S_g = U_g \frac{\partial \xi_g}{\partial r} = \frac{b_g}{r} U_g$, где $U_g^0 \geq 0$; v_g, d_g, b_g, λ_g — произвольные константы; произведение $\lambda_g \xi_g$ не зависит от индекса g (т. е. произведения $\lambda_g v_g, \lambda_g d_g, \lambda_g b_g$ также не зависят от g). Тогда $\lambda_g + \alpha_g = \frac{1}{U_g^0} \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^0 U_{g'}^0$; $\frac{4}{3} \lambda_g + \alpha_g = \frac{1}{U_g^0} \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^1 U_{g'}^0 \frac{b_{g'}}{b_g}$.

Из условия $\lambda_g b_g = -1$ получаем $\frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_g) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } G = 3; d_g = 0; \lambda_g v_g = \lambda_g b_g = -1; v_1 = 1; v_2 = 1/2; v_3 = 1/3; \lambda_g \xi_g = -t - \ln r; \beta_{g'g}^0 &= \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}, \\ \beta_{g'g}^1 &= \begin{pmatrix} 0,6 & 2/15 & 0,3 \\ 1/30 & 1/6 & 3/40 \\ 1/18 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда получаем } U_g = \frac{U_g^0}{\exp(t + \ln r)}; S_g = \frac{b_g U_g^0}{r \exp(t + \ln r)}. \end{aligned}$$

Трехгрупповой тест представляется в форме табл. 1. Видно, что решение имеет особенность в точке $r = 0$, поэтому область построения тестовой задачи надо выбирать для $r > 0$, например $10^{-8} \leq r \leq 1$. Начальные и граничные условия ставятся для каждой группы аналогично тесту 4.1. Решение для первой группы специально выбрано совпадающим с одногрупповым решением теста 4.1.

Численное решение рассматривается в области $0,01 \leq r \leq 1$. Пространственная сетка рассматривается в трех вариантах: по оси r берется равномерная сетка с шагом $\Delta r = 0,1$, $\Delta r = 0,01$, $\Delta r = 0,001$. Шаг по времени — $\Delta t = 0,1$. Задача считалась до $t = 1$.

На рис. 9 представлен профиль нейтронного потока U для третьей группы, полученный по DDAD-схеме с параметрами $\delta_g = \frac{3}{4} \alpha_g \Delta r$, $\theta_g = 0$ на сетке с шагом $\Delta r = 0,1$. Видно удовлетворительное совпадение численного и точного решений. Для полного совпадения численных и точных значений необходимо уменьшать сетку по пространству.

Полученное решение легко обобщается на случай $\beta_{g'g}^1 = 0$. Тогда из условий $\lambda_g + \alpha_g = \frac{1}{U_g^0} \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^0 U_{g'}^0$; $\frac{4}{3} \lambda_g + \alpha_g = 0$; $\lambda_g b_g = -1$ получаем $-\frac{1}{3} \lambda_g = \frac{1}{U_g^0} \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^0 U_{g'}^0$; $\alpha_g = -\frac{4}{3} \lambda_g = \frac{4}{3b_g}$. Вид точного решения не меня-

ется, изменятся только значения параметров $\alpha_g, \beta_{g'g}^0$; $\alpha_g = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3} \right)$; $\beta_{g'g}^0 = \begin{pmatrix} 7/30 & 4/30 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 5/30 & 4/30 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Полученный тест записывается в форме табл. 2.

Таблица 1

Тест 4.2. Значения основных величин по группам (трехгрупповой вариант)

Физическая величина	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
v_g	1	1/2	1/3
α_g	2	3	6
λ_g	-1	-2	-3
b_g	1	1/2	1/3
U_g^0	1	1/2	1/3
U_g	1	1	1
	$\exp(t + \ln r)$	$2 \exp(t + \ln r)$	$3 \exp(t + \ln r)$
S_g	1	1	1
	$r \exp(t + \ln r)$	$4r \exp(t + \ln r)$	$9r \exp(t + \ln r)$

Таблица 2

Тест 4.2. Значения основных величин по группам в случае $\beta_{g'g}^1 = 0$

Физическая величина	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
v_g	1	1/2	1/3
α_g	4/3	8/3	4
λ_g	-1	-2	-3
b_g	1	1/2	1/3
U_g^0	1	1/2	1/3
U_g	1	1	1
	$\exp(t + \ln r)$	$2 \exp(t + \ln r)$	$3 \exp(t + \ln r)$
S_g	1	1	1
	$r \exp(t + \ln r)$	$4r \exp(t + \ln r)$	$9r \exp(t + \ln r)$

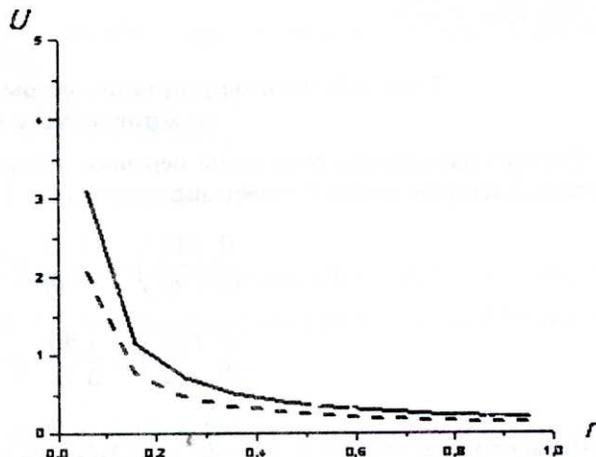


Рис. 9. Профиль нейтронного потока U для третьей группы на момент времени $t = 1$: — — точное решение; - - - численное решение

Тест 5.1: точное решение двумерного уравнения переноса нейтронов в одногрупповом P_1 -приближении

Система двумерных уравнений переноса нейтронов в одногрупповом P_1 -приближении с учетом анизотропии в коэффициенте β имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{v} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_r) + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \alpha U &= \beta^0 U + f; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_r}{v} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial r} + \alpha S_r &= \beta^1 S_r; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{S_z}{v} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial z} + \alpha S_z &= \beta^1 S_z. \end{aligned}$$

Предположим, что $U = U^0 \exp(\lambda \xi)$; $\xi = vt - \ln(c_0 - \ln r) + dz + c_2$; $f = 0$; $\vec{S} = (S_r, S_z) = \left(U \frac{\partial \xi}{\partial r}, U \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$, где $U^0 \geq 0$; v, d, c_0, c_2, λ — произвольные константы. Тогда $\beta^0 = \alpha + \lambda(1 + d^2)$; $\beta^1 = \alpha + 4\lambda/3$; $\frac{\partial}{\partial r} (r S_r) = 0$.

Пусть $v = 1$; $\lambda = -1$; $c_0 = 1$; $c_2 = 0$; $d = 1$; $\alpha = 3$; $U^0 = 1$. Тогда получаем $U = \exp(-\xi) = \frac{1 - \ln r}{\exp(t + z)}$;
 $\vec{S} = \left(\frac{1}{r \exp(t + z)}, \frac{1 - \ln r}{\exp(t + z)} \right)$; $\xi = t + z - \ln(1 - \ln r)$; $\beta^0 = 1$; $\beta^1 = 5/3$.

Видно, что данное решение определено при $1 - \ln r \geq 0$ и имеет особенность в точке $r = 0$, поэтому область построения тестовой задачи надо выбирать для $0 < r \leq e \approx 2,718$, например $e^{-8} \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $e^{-8} \approx 0,0003$.

Начальные условия при $t = 0$: $U(0, r, z) = U_0 = \frac{1 - \ln r}{\exp z}$; $\vec{S} = \left(\frac{1}{r \exp z}, \frac{1 - \ln r}{\exp z} \right)$.

Граничные условия: $U(t, r, z = 0) = U_{\text{гп}} = \frac{1 - \ln r}{\exp t}$; $U(t, r, z = 1) = \frac{1 - \ln r}{\exp(t+1)}$; $U(t, r = e^{-8}, z) = \frac{9}{\exp(t+z)}$;
 $U(t, r = 1, z) = \frac{1}{\exp(t+z)}$.

Численное решение рассматриваем в области $e^{-8} \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Сетка равномерная: $\Delta r = 0,04$ ($I = 25$), $\Delta z = 0,04$ ($J = 25$); $t_{\text{нач}} = 0$; $\tau = 0,01$. Шаг по времени выбирается постоянным. Задача считалась до $t = 1$. Расчеты проводились по программе N2, реализованной в комплексе ФЕНИКС [1].

В этой задаче осциллирует одна из компонент тока S_z . Осцилляции дает даже схема первого порядка по h и τ . При уменьшении шага по пространству осцилляции пропадают. На рис. 10, 11 приведены профили потока и токов нейтронов вдоль центрального канала разностной сетки ($z = 0,5$) на конечный момент времени. Расчеты проводились по разным схемам на сетках 25×25 и 100×100 ($\Delta r = 0,01$, $\Delta z = 0,01$). Качественно все результаты очень похожи. Результаты, приведенные на рисунках, получены по DSt-схеме первого порядка с параметрами $p = 1$; $\delta = 0,5$; $\theta = 0,5$.

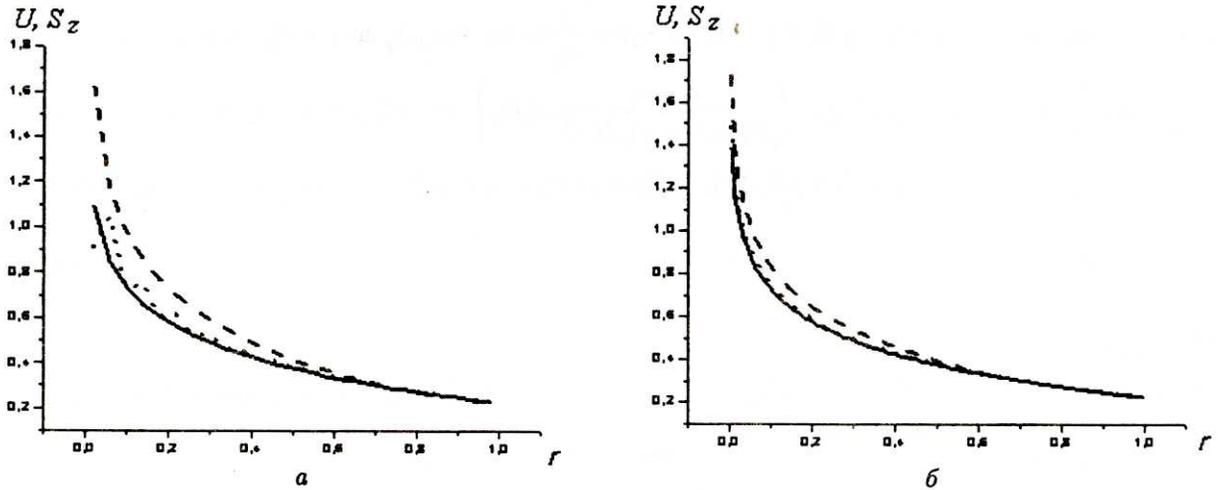


Рис. 10. Профили нейтронного потока U и компоненты тока S_z : а — на сетке 25×25 ; б — на сетке 100×100 ; — — $U = S$, аналитическое решение; - - - U , численное решение; ····· — S_z , численное решение

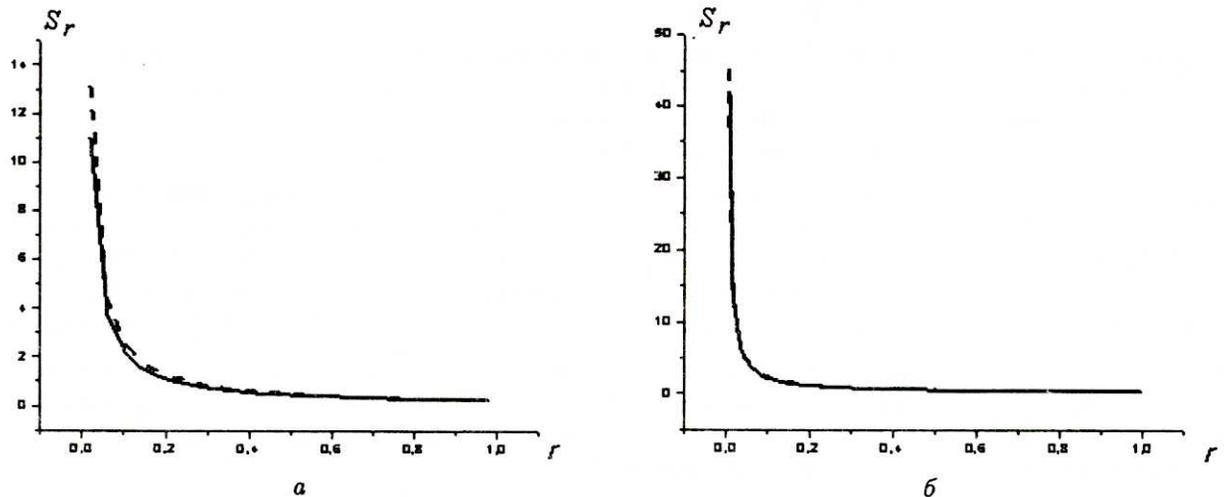


Рис. 11. Профиль компоненты тока S_r : а — на сетке 25×25 ; б — на сетке 100×100 ; — — аналитическое решение; - - - численное решение

Тест 5.2: точное решение двумерного уравнения переноса нейтронов в многогрупповом P_1 -приближении

Система двумерных уравнений переноса нейтронов в многогрупповом P_1 -приближении с учетом анизотропии в коэффициенте β имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_g}{v_g} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{r,g}) + \frac{\partial S_{z,g}}{\partial z} + \alpha_g U_g &= \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^0 U_{g'} + f_g; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{S}_g}{v_g} \right) + \frac{1}{3} \text{grad} U_g + \alpha_g \vec{S}_g &= \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^1 \vec{S}_{g'}, \end{aligned}$$

где $\text{grad} U_g = \left(\frac{\partial U_g}{\partial r}, \frac{\partial U_g}{\partial z} \right)$; $\vec{S}_g = (S_r, S_z)_g$.

Предположим, что $U_g = U_g^0 \exp(\lambda_g \xi_g)$, $\xi_g = v_g t + \frac{1}{\lambda_g} \ln(c_0 + c_{1,g} \lambda_g \ln r) + d_g z + c_{2,g}$; $f_g = 0$; $\vec{S}_g =$
 $= \left(U_g \frac{\partial \xi_g}{\partial r}, U_g \frac{\partial \xi_g}{\partial z} \right) = (\xi_{g,r} U_g, \xi_{g,z} U_g) = \left(\frac{c_{1,g} U_g}{r(c_0 + c_{1,g} \lambda_g \ln r)}, d_g U_g \right)$, где $U_g^0 \geq 0$; $v_g, d_g, c_0, c_{1,g}, c_{2,g}, \lambda_g$ —

произвольные константы; произведение $\lambda_g \xi_g$ не зависит от индекса g (т. е. произведения $\lambda_g v_g, \lambda_g d_g, \lambda_g c_{1,g},$

$\lambda_g c_{2,g}$ также не зависят от g). Тогда $\lambda_g (1 + d_g^2) + \alpha_g = \frac{1}{U_g^0} \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^0 U_{g'}^0$; $\frac{4}{3} \lambda_g + \alpha_g = \frac{1}{U_g^0} \sum_{g'=1}^G \beta_{g',g}^1 U_{g'}^0 \frac{d_{g'}}{d_g}$;

$$\frac{\partial}{\partial r} (r S_{r,g}) = 0; c_{1,g} = d_g.$$

Пусть $G = 3$; $c_0 = 1$; $c_{2,g} = 0$; $\lambda_g v_g = \lambda_g d_g = \lambda_g c_{1,g} = -1$; $v_1 = 1$; $v_2 = 1/2$; $v_3 = 1/3$; $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 4$;

$$\alpha_3 = 5; \beta_{g',g}^0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,3 \\ 1/6 & 1 & 0,25 \\ 2/15 & 0,2 & 29/30 \end{pmatrix}; \beta_{g',g}^1 = \begin{pmatrix} 49/30 & 0,8 & 0,9 \\ 1/12 & 0,8 & 0,45 \\ 2/45 & 2/15 & 0,3 \end{pmatrix}. \text{ Тогда получаем } U_g = U_g^0 \exp(-\xi),$$

$$\xi = t + z - \ln(1 - \ln r); \vec{S}_g = \left(\frac{c_{1,g} U_g}{r(1 - \ln r)}, d_g U_g \right).$$

Представим трехгрупповой тест в форме табл. 3. Видно, что данное решение имеет особенность в точке $r = 0$, поэтому область построения тестовой задачи надо выбирать для $r > 0$, например $10^{-8} \leq r \leq 1$. Начальные и граничные условия ставятся для каждой группы аналогично тесту 5.1. Решение для первой группы специально выбрано совпадающим с одногрупповым решением теста 5.1.

Численное решение рассматриваем в области $e^{-8} \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Сетка равномерная: 100×100 ($\Delta r = 0,01, \Delta z = 0,01$); $t_{\text{нач}} = 0$; $\tau = 0,01$. Шаг по времени выбирается постоянным. Задача считалась до $t = 1$. Расчеты проводились по программе N2, реализованной в комплексе ФЕНИКС [1]. На рис. 12, 13 приведены профили потока и токов нейтронов вдоль центрального канала разностной сетки ($z = 0,5$) на конечный момент времени, рассчитанные по схеме второго порядка при $p = 2$; $\delta_g = 0,75 (\alpha_g - \beta_{g',g}^1) h$; $\theta = 0$.

Из рис. 12 видно, что профили нейтронного потока U и компонент тока S_z для всех групп больше всего отличаются в точке $r = 10^{-8}$, практически совпадая с точным решением при $r > 0,5$. Из-за дельтообразного поведения решения в точке $r = 10^{-8}$ задача требует достаточно большого количества итераций по интегралу столкновений (на некоторых шагах более 1 000 итераций).

Профили тока S_r для всех групп практически совпадают с точным решением, поэтому на рис. 13 приведен профиль тока S_r вдоль центрального канала разностной сетки ($z = 0,5$) на конечный момент времени только для 3-й группы.

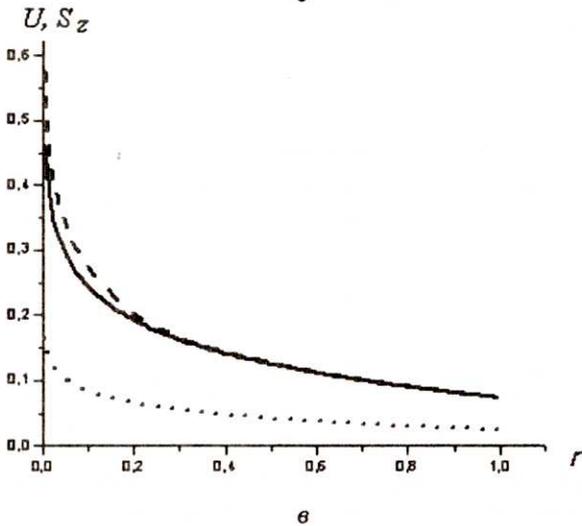
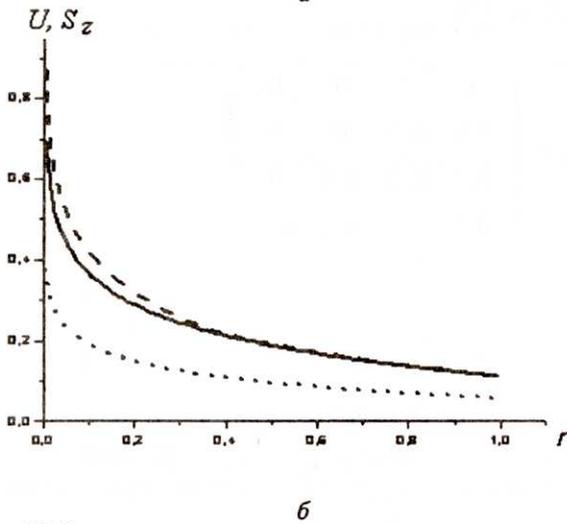
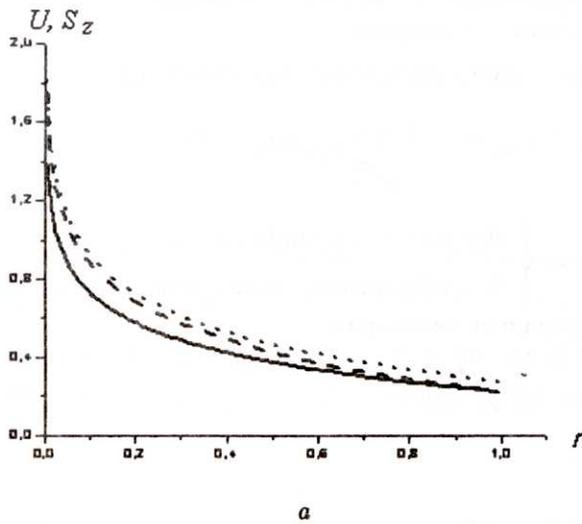


Рис. 12. Профили нейтронного потока U и компоненты тока S_z : а — для 1-й группы; б — для 2-й группы; в — для 3-й группы; — — U , аналитическое решение; - - - U , численное решение; ····· — S_z , численное решение

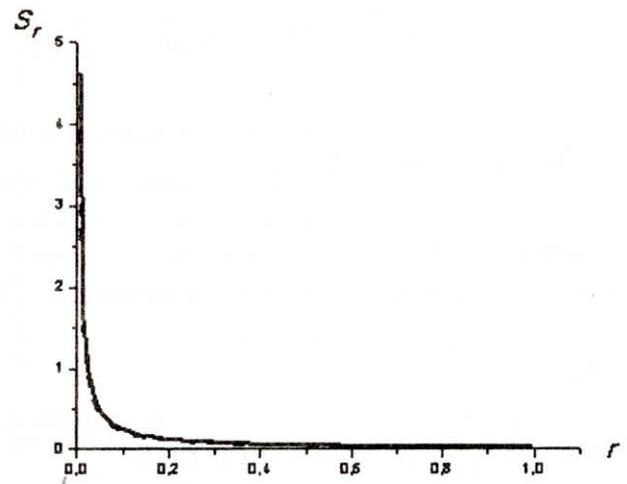


Рис. 13. Профиль компоненты тока S_r для 3-й группы: — — аналитическое решение; - - - — численное решение

Таблица 3

Тест 5.2. Значения основных величин по группам (трехгрупповой вариант)

Физическая величина	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
ν_g	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
α_g	3	4	5
λ_g	-1	-2	-3
d_g	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
c_g	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
U_g^0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
U_g	$\frac{1 - \ln r}{\exp(t+z)}$	$\frac{1}{2} \frac{1 - \ln r}{\exp(t+z)}$	$\frac{1}{3} \frac{1 - \ln r}{\exp(t+z)}$
$S_{r,g}$	$\frac{1}{r \exp(t+z)}$	$\frac{1}{4r \exp(t+z)}$	$\frac{1}{9r \exp(t+z)}$
$S_{z,g}$	$\frac{1 - \ln r}{\exp(t+z)}$	$\frac{1}{4} \frac{1 - \ln r}{\exp(t+z)}$	$\frac{1}{9} \frac{1 - \ln r}{\exp(t+z)}$

Тест 6: точное решение одномерного уравнения переноса нейтронов в сферически-симметричной геометрии

Одномерное уравнение переноса нейтронов в сферически-симметричной геометрии имеет вид

$$\frac{\xi}{v_g} \frac{\partial N_g}{\partial t} + \frac{\mu}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta N_g) + \frac{\eta}{2r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) N_g] + \alpha_g N_g = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} S N_{g'} + \frac{f_g}{2},$$

где $S N_g = \int_{-1}^1 N_g d\mu$; $\xi = \begin{cases} 0 & \text{— стационарный случай;} \\ 1 & \text{— нестационарный случай;} \end{cases}$ $\eta = \begin{cases} 0 & \text{— плоская геометрия;} \\ 2 & \text{— сферически-симметричная геометрия.} \end{cases}$

Рассмотрим нестационарный случай в сферически-симметричной геометрии.

Пусть $N_g = N_g^0 (c_{1,g} + c_{2,g} \mu r) \exp(\lambda t)$, $\lambda = -\alpha_g v_g$; $f_g = 0$, где $N_g^0 \geq 0$; $v_g, \alpha_g, c_{1,g}, c_{2,g}$ — произвольные константы; $c_{1,g} \pm c_{2,g} r \geq 0$. Тогда получаем $\text{div}(\vec{\Omega} N_g) = N_g^0 c_{2,g} \exp(\lambda t)$; $S N_g = 2 N_g^0 c_{1,g} \exp \lambda t$; $c_{2,g} N_g^0 =$

$$= \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g} c_{1,g'} N_{g'}^0.$$

Пусть $G = 4$; $c_{1,g} = c_{2,g} = 1$; $\lambda = -1$; $v_1 = 10, v_2 = 5; v_3 = 2; v_4 = 1$.

Матрица $\beta_{g'g}$ задается в четырех видах:

$$\begin{aligned} \text{1-й вариант: } \beta_{g'g} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{2-й вариант: } \beta_{g'g} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}; \\ \text{3-й вариант: } \beta_{g'g} &= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{4-й вариант } \beta_{g'g} &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,08 & 0,07 & 0,05 \\ 0,1 & 0,7 & 0,12 & 0,08 \\ 0,08 & 0,15 & 0,6 & 0,17 \\ 0,05 & 0,15 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда $\alpha_g v_g = 1$. Точное решение не меняется для всех четырех вариантов, $N_g = N_g^0 (1 + \mu r) \exp(-t)$. Это используется при тестировании численных методик. Из условия $c_{1,g} \pm c_{2,g} r \geq 0$ получаем ограничение на счетную область: $|r| \leq 1$.

Многогрупповой тест представляется в форме табл. 4.

Таблица 4

Тест 6. Значения основных величин по группам

Физическая величина	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
v_g	10	5	2	1
α_g	0,1	0,2	0,5	1
λ	-1	-1	-1	-1
$c_{1,g}$	1	1	1	1
$c_{2,g}$	1	1	1	1
N_g^0	1	1	1	1
N_g	$(1 + \mu r) \exp(-t)$	$(1 + \mu r) \exp(-t)$	$(1 + \mu r) \exp(-t)$	$(1 + \mu r) \exp(-t)$

Основное достоинство теста состоит в том, что, хотя функция распределения нейтронов зависит от времени и пространства, поток нейтронов зависит только от времени, что позволяет очень просто сравнивать численное решение с точным в каждом интервале разностной сетки.

Численное решение рассматриваем в области $0 \leq r \leq 1$. Сетка: $\Delta r = 0,01$ ($I = 100$); $\Delta \mu = 0,1$ ($M = 20$); $\tau = 0,01$. Константы сходимости итераций: $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$. Задача считалась до $t = 1$.

Численное решение по каждой разностной схеме не меняется для всех четырех вариантов матрицы $\beta_{g'g}$. Зависимость численного решения от схемы на последний момент времени приведена на рис. 14. Видно, что DD-схема дает немонотонное решение, но более точное, чем St-схема. С течением времени осцилляции уменьшаются и все численные решения сходятся к точному.

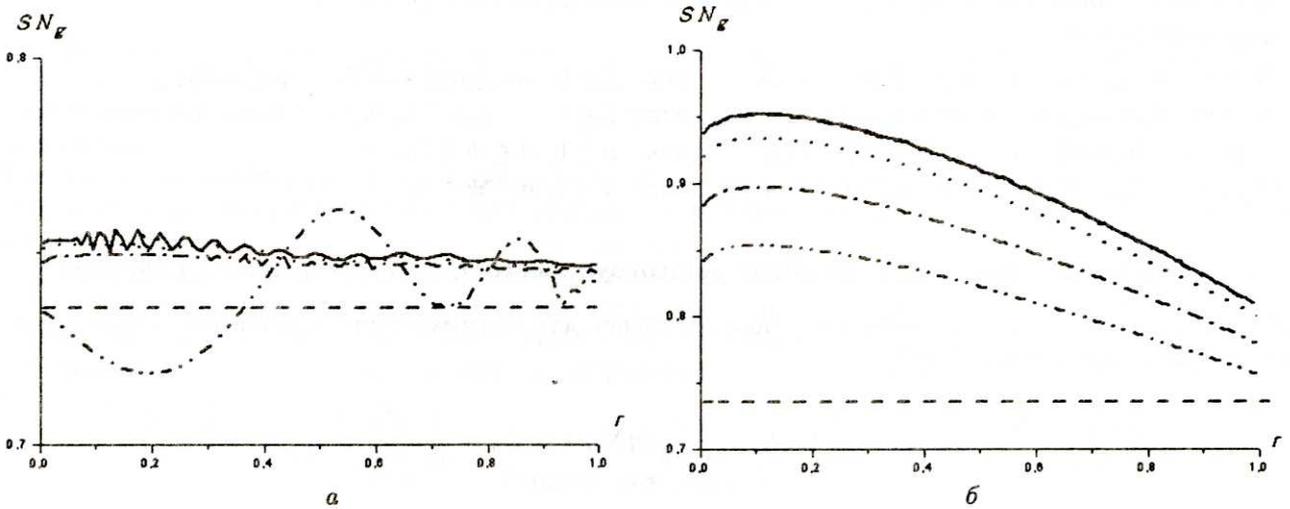


Рис. 14. Профиль SN_g для четырех групп при $t = 1$: а — расчет по DD-схеме; б — расчет по St-схеме; --- — точное решение; — — численное решение, $g = 1$; — численное решение, $g = 2$; - · - · - · — численное решение, $g = 3$; - · - · - · — численное решение, $g = 4$

Тест 7.1: точное решение двумерного одногруппового уравнения переноса нейтронов

Двумерное уравнение переноса нейтронов в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{v} \right) + \text{div} (\vec{\Omega} N) + \alpha N = \frac{\beta}{4\pi} SN + \frac{f}{4\pi},$$

где $SN = \int N d\vec{\Omega}$; $\xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi$, $\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \psi$, $\mu = \cos \theta$; $\text{div} (\vec{\Omega} N) = \vec{\Omega} \nabla N = \xi \frac{\partial N}{\partial r} + \mu \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial N}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial N}{\partial \psi}$, с учетом осевой симметрии $\text{div} (\vec{\Omega} N) = \xi \frac{\partial N}{\partial r} + \mu \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial N}{\partial \psi}$.

Предположим, что $N(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = N(\zeta)$, $\zeta = vt + b\vec{\Omega}\vec{r} + d = vt + b(\xi r + \mu z) + d$; $f = 0$; $\beta = \frac{4\pi}{SN} \beta_0$, где v, b, d, β_0 — произвольные константы. Тогда $N = \frac{1}{\alpha} \left[\beta_0 - \exp \left(-\frac{\alpha \zeta}{1+b} \right) \right]$; $\text{div} (\vec{\Omega} N) = \frac{\partial N}{\partial \zeta} \vec{\Omega} \nabla \zeta = \frac{\partial N}{\partial \zeta} b \vec{\Omega} \nabla (\vec{\Omega} \vec{r}) = b \frac{\partial N}{\partial \zeta}$; $\frac{\text{sh } x}{x} \geq 1$; $q_{\pm} = \frac{\alpha}{1+b} (vt \pm b\sqrt{r^2 + z^2})$; $SN = \frac{4\pi}{\alpha} \left\{ \beta_0 + \frac{1+b}{2b\sqrt{r^2 + z^2}} [\exp(-q_+) - \exp(-q_-)] \right\}$; $= 4\pi \left[\frac{\beta_0}{\alpha} - \exp \left(-\frac{\alpha vt}{1+b} \right) \frac{\text{sh } x}{x} \right]$, $x = \frac{\alpha b \sqrt{r^2 + z^2}}{1+b}$.

Из условий $N \geq 0$, $SN \geq 0$ получаем ограничения $\beta_0 \geq \exp \left(-\frac{\alpha \zeta}{1+b} \right)$, $\beta_0 \geq \alpha \exp \left(-\frac{\alpha vt}{1+b} \right) \frac{\text{sh } x}{x}$.

Пусть $v = 1$; $b = 1$; $d = 0$; $\alpha = 1$; $\beta_0 = 1$. Тогда $N = 1 - \exp(-0,5\zeta)$, $\zeta = t + \xi r + \mu z$; $SN = 4\pi \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{2} \right) \frac{\text{sh } x}{x} \right]$, $x = \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{2}$; $\beta = \frac{\exp(0,5t) \sqrt{r^2 + z^2}}{\exp(0,5t) \sqrt{r^2 + z^2} - 2 \text{sh}(0,5\sqrt{r^2 + z^2})}$.

Из условий $N \geq 0$, $\beta \geq 0$ получаем ограничения $\zeta \geq 0$, $\exp \frac{t}{2} \geq \frac{\text{sh } x}{x}$.

Для построения численного теста рассмотрим область $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ при $t \geq 2$.

При данных предположениях справедливы условия положительности N и β ($e \approx 2,7 \geq \frac{\text{sh } x_{\max}}{x_{\max}} = \sqrt{2} \text{sh} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,1$). В квадратной области на сторонах имеем:

- при $r = 0$ $\vec{n} = (n_r, n_z) = (-1, 0)$; $\vec{\Omega} \vec{n} = \xi n_x + \mu n_z = -\xi$;
- при $r = 1$ $\vec{n} = (1, 0)$; $\vec{\Omega} \vec{n} = \xi$;
- при $z = 0$ $\vec{n} = (0, -1)$; $\vec{\Omega} \vec{n} = -\mu$;
- при $z = 1$ $\vec{n} = (0, 1)$; $\vec{\Omega} \vec{n} = \mu$.

Начальные условия имеют вид $N(t=2, r, z, \mu, \psi) = 1 - \exp[-0,5(2 + \xi r + \mu z)]$.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} N(t, r=0, z, \mu, \psi) &= 1 - \exp[-0,5(t + \mu z)] && \text{для } \xi \geq 0, -1 \leq \mu \leq 1, 0,5\pi \leq \psi \leq 1,5\pi; \\ N(t, r=1, z, \mu, \psi) &= 1 - \exp[-0,5(t + \xi + \mu z)] && \text{для } \xi \leq 0, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \psi \leq 0,5\pi, 1,5\pi \leq \psi \leq 2\pi; \\ N(t, r, z=0, \mu, \psi) &= 1 - \exp[-0,5(t + \xi r)] && \text{для } \mu \geq 0, 0 \leq \psi \leq 2\pi; \\ N(t, r, z=1, \mu, \psi) &= 1 - \exp[-0,5(t + \xi r + \mu)] && \text{для } \mu \leq 0, 0 \leq \psi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Тест 7.2: точное решение двумерного многогруппового уравнения переноса нейтронов

Многогрупповая система уравнений переноса нейтронов для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_g}{v_g} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi N_g) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N_g) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\eta N_g) + \alpha_g N_g = \frac{1}{4\pi} \sum_{g'=1}^G \int \beta_{g'g} N_{g'} d\bar{\Omega}' + \frac{f_g}{4\pi}.$$

Предположим, что $N_g(t, \bar{r}, \bar{\Omega}) = N_g(\zeta)$; $\zeta_g = v_g t + b_g(\bar{\Omega}\bar{r}) + d_g$; $f_g = 0$; $\beta_g^0 = \frac{1}{4\pi} \sum_{g'=1}^G \int \beta_{g'g} N_{g'} d\bar{\Omega}'$, где v_g ,

b_g, d_g, β_g^0 — произвольные групповые константы. Тогда $N_g = \frac{1}{\alpha_g} \left[\beta_g^0 - \exp\left(-\frac{\alpha_g \zeta_g}{1+b_g}\right) \right]$; $\beta_{g'g} = \frac{4\pi}{SN_{g'}} \beta_{g'g}^0$;

$$\beta_g^0 = \sum_{g'=1}^G \beta_{g'g}^0; SN_g = \frac{4\pi}{\alpha_g} \left\{ \beta_g^0 + \frac{1+b_g}{2b_g \sqrt{r^2+z^2}} \left[\exp(-q_{g,+}) - \exp(-q_{g,-}) \right] \right\}; q_{g,\pm} = \frac{\alpha_g}{1+b_g} (v_g t \pm b_g \sqrt{r^2+z^2}).$$

Из условий $N_g \geq 0, SN_g \geq 0$ получаем ограничения: $\beta_g^0 \geq \exp\left(-\frac{\alpha_g \zeta_g}{1+b_g}\right)$; $\beta_g^0 \geq \alpha_g \exp\left(-\frac{\alpha_g v_g t}{1+b_g}\right) \frac{\text{sh } x_g}{x_g}$,

$x_g = \frac{\alpha_g b_g \sqrt{r^2+z^2}}{1+b_g}$. При $r^2+z^2 \rightarrow 0 (x_g \rightarrow 0) \frac{\text{sh } x_g}{x_g} \rightarrow 0$.

Пусть $G=3$; $d_g=0$; $v_1=1$; $v_2=1/2$; $v_3=1/3$; $b_1=1$; $b_2=2$; $b_3=3$; $\beta_1^0=1$; $\beta_2^0=2$; $\beta_3^0=3$; $\alpha_1=1$; $\alpha_2=2$;

$$\alpha_3=3; \beta_{g'g}^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 7/6 & 1/2 & 1/3 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}; \beta_{g'g} = \frac{\beta_{g'g}^0}{\alpha_g - \exp\left(-\frac{\alpha_g v_g t}{1+b_g}\right) \frac{\text{sh } x_g}{x_g}}.$$

Для построения теста рассмотрим область $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ при $t \geq 20$.

При данных предположениях справедливы условия положительности N и β_0^0 . Тогда получаем решение

$N_g = \frac{1}{\alpha_g} \left[\beta_g^0 - \exp\left(-\frac{\alpha_g \zeta_g}{1+b_g}\right) \right]$. Тест представляется в форме табл. 5.

Таблица 5

Тест 7.2. Значения основных величин по группам

Физическая величина	$g=1$	$g=2$	$g=3$
v_g	1	1/2	1/3
α_g	1	2	3
b_g	1	2	3
d_g	0	0	0
β_g^0	1	2	3
$q_{g,\pm}$	$\frac{1}{2} (t \pm \sqrt{r^2+z^2})$	$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} t \pm 2\sqrt{r^2+z^2} \right)$	$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} t \pm 3\sqrt{r^2+z^2} \right)$
ζ_g	$t + \xi r + \mu z$	$\frac{1}{2} t + 2(\xi r + \mu z)$	$\frac{1}{3} t + 3(\xi r + \mu z)$
N_g	$1 - \exp\left(-\frac{\zeta_1}{2}\right)$	$1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{2\zeta_2}{3}\right)$	$1 - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{3\zeta_3}{4}\right)$
SN_g	$4\pi \left\{ 1 + \frac{[e^{-q_{g,+}} - e^{-q_{g,-}}]}{\sqrt{r^2+z^2}} \right\}$	$4\pi \left\{ 1 + \frac{3[e^{-q_{g,+}} - e^{-q_{g,-}}]}{8\sqrt{r^2+z^2}} \right\}$	$4\pi \left\{ 1 + \frac{2[e^{-q_{g,+}} - e^{-q_{g,-}}]}{9\sqrt{r^2+z^2}} \right\}$

Заключение

Рассмотрены 11 модельных задач, предназначенных для тестирования одномерных и двумерных программ переноса нейтральных частиц в различных приближениях.

Тест 1.1 интересен экспоненциальным ростом температуры на оси симметрии, что представляет сложность при численной реализации теста.

Тест 3 не очень удобен из-за ограничения по времени, но представляет в настоящий момент, по-видимому, единственное аналитическое решение с зависимостью от всех переменных (t, r, z, ξ, μ) для совместной системы уравнения энергии и уравнения переноса излучения.

Основное достоинство теста 6 состоит в том, что, хотя функция распределения нейтронов зависит от времени и пространства, поток нейтронов зависит только от времени, что позволяет очень просто сравнивать численное решение с точным в каждом интервале разностной сетки.

Все приведенные в данной работе аналитические решения могут использоваться для тестирования численных методик и программ.

Список литературы

1. Гаджиев А.Д., Гаджиева В.В., Лебедев С.Н. и др. Комплекс программ ФЕНИКС для математического моделирования динамики сплошных сред и кинетических процессов и его применение для исследования развития одномодового геометрического дефекта в мишенях ЛТС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 2. С. 41–52.
2. Гаджиев А.Д., Писарев В.Н., Рыкованова В.В., Шестаков А.А. Методика и программа ТОМ1 для решения двумерного уравнения теплопроводности // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 1. С. 53–65.
3. Гаджиев А.Д., Шестаков А.А. Методика РОМБ для численного решения двумерного уравнения переноса излучения в многогрупповом P_1 -приближении // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 1. С. 41–47.
4. Гаджиев А.Д., Романова Е.М., Селезнев В.Н., Шестаков А.А. Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении // Там же. 2001. Вып. 4. С. 48–59.

Статья поступила в редакцию 17.10.02.
