УДК 519.642.2

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ С ИСКУССТВЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ (DDAD-СХЕМА) ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

А. Д. Гаджиев, И. А. Кондаков, В. Н. Писарев, О. И. Стародумов, А. А. Шестаков
(РФЯЦ—ВНИИТФ)

Рассмотрен метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов в одномерной и двумерной геометриях. Искусственная диссипация вводится для ослабления нефизических осцилляций, возникающих при решении уравнения переноса в оптически плотных средах методом дискретных ординат второго порядка точности.

Введение

Одним из основных при решении уравнения переноса является DS_n-метод [1]. Хорошо известно, что DS_n-метод второго порядка точности (DD-схема) в оптически плотной среде выдает осциллирующее решение [2]. Причиной этого дефекта является применение в DD-схеме линейной интерполяции выражения αN, описывающего поглощение частиц в кинетическом уравнении. Такая аппроксимация порождает в первом дифференциальном приближении антидиссипативную добавку вида $-\frac{\alpha}{8}h^2\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$.

В работе Рида [2] в оптически плотных средах ($\alpha h \geq 2$) рекомендовано применять трехточечную схему, а при $\alpha h < 2$ — двухточечную DD-схему. В трехточечной схеме нет интерполяции выражения αN, как в DD-схеме, поэтому не образуется антидиссипативная добавка, о которой говорилось выше. Однако комбинированная схема сложна для численной реализации. В данной работе предлагается другое решение: оставаясь в рамках DS_n-метода, уменьшить антидиссипацию введением диссипативных членов. Реализуется это посредством специально подобранной искусственной диссипации. Новый метод сохраняет второй порядок точности. Схема этого метода получила название DDAD-схемы (Diamond Difference with Artificial Dissipation).

Постановка задачи

Уравнение переноса нейтронов в многогрупповом приближении имеет вид [1]

$$\frac{1}{v_g}\frac{\partial N_g}{\partial t} + \vec{\Omega}\nabla N_g + \alpha_g N_g = Q_g, \quad g = 1, 2, \dots G. \tag{1}$$

Здесь $N_g\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, t\right)$ — плотность потока нейтронов; $\alpha_g\left(\vec{r}, t\right)$ — коэффициент поглощения; v_g — модуль скорости нейтронов; $\vec{\Omega}$ — единичный вектор в направлении движения нейтронов; $Q_g\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, t\right)$ — плотность эмиссии нейтронов группы g.

Для простоты рассмотрим случай с изотропным рассеянием. Тогда

$$Q_g = \frac{1}{4\pi}\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g'g} S N_{g'} + \frac{1}{4\pi} f_g, \tag{2}$$

где $\beta_{g'g}(\vec{r},t)$ — коэффициент размножения; $f_g(\vec{r},t)$ — независимый источник; $SN_{g'} = \int\limits_{\Omega} N_{g'} d\vec{\Omega}$ — скалярный поток нейтронов.

Для многогрупповой системы уравнений (1), (2) в некоторой области D, ограниченной замкнутой поверхностью Σ, решается смешанная краевая задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$N_g\left(\vec{r},\vec{\Omega},t\right)\Big|_{t=t_0} = N_g^0\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right);$$
$$N_g\left(\vec{r},\vec{\Omega},t\right)\Big|_{\vec{r}\in\Sigma} = \tilde{N}_g\left(P,\vec{\Omega},t\right) \text{ при } \vec{n}\vec{\Omega}<0, \quad g=1,2,\ldots G.$$

Здесь P — точка на поверхности Σ; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к Σ; $\tilde{N}_g$ — известная функция.

В дальнейшем будем рассматривать систему уравнений (1), (2) лишь для одномерных (плоской и сферической) и двумерной (осесимметричной) геометрий [3]. В соответствии с этим будем иметь:

– для одномерных геометрий

$$N_g = N_g(r,\mu,t); \quad SN_g(r,t) = \int\limits_{-1}^{1} N_g(r,\mu',t)\,d\mu';$$

$$Q_g(r,t) = \frac{1}{2}\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g'g}SN_{g'} + \frac{1}{2}f_g(r,t);$$

$$\vec{\Omega}\nabla N = \begin{cases} \mu\dfrac{\partial N}{\partial r} & \text{для плоской геометрии;} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mu N\right) + \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\dfrac{1-\mu^2}{2}N\right) & \text{для сферической геометрии;} \end{cases}$$

– для двумерной (осесимметричной) геометрии

$$N_g = N_g(r,z,\mu,\phi,t); \quad SN_g(r,z,t) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\pi} N_g(r,z,\mu',\phi',t)\,d\mu' d\phi';$$

$$Q_g(r,z,t) = \frac{1}{4\pi}\sum_{g'=1}^{G}\beta_{g'g}SN_{g'} + \frac{1}{4\pi}f_g(r,z,t);$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{\Omega}N\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi N) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\mu N) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}(\eta N);$$

$$\vec{\Omega} = (\xi,\eta,\mu); \quad \xi = \sqrt{1-\mu^2}\cos\phi; \quad \eta = \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi.$$

Разностная аппроксимация

Одномерная геометрия. Для одномерных геометрий сетка по переменной $\vec{r}$ задается координатами r_i $(i=0,1,\ldots,J)$, которые, в частности, совпадают с границами раздела сред. По переменной μ сетка задается узлами μ_m $(m=0,1,\ldots,M;\ \mu_0=-1;\ \mu_M=1)$.

В качестве разностного аналога для $\vec{\Omega}\nabla N$ применяем выражение:

– для плоской геометрии

$$\operatorname{div}_h\vec{\Omega}N = \mu_{m+1/2}\frac{N_{i+1}-N_i}{\Delta r_i}; \tag{3}$$

– для сферической геометрии

$$\operatorname{div}_h\vec{\Omega}N = \mu_{m+1/2}\frac{r_{i+1}^2 N_{i+1} - r_i^2 N_i}{\Delta V_i} + \frac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta V_i}\frac{\left(1-\mu_{m+1}^2\right)N_{m+1} - \left(1-\mu_m^2\right)N_m}{\Delta\mu_m}, \tag{4}$$

где $r_{i+1/2} = \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i)$; $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$; $\Delta V_i = \frac{1}{3}\left(r_{i+1}^3 - r_i^3\right)$; $i = 0, 1, \ldots, J-1$; $m = 0, 1, \ldots, M-1$.

Запишем разностную аппроксимацию уравнения (1):

$$\frac{N_g^{n+1} - N_g^n}{v_g \Delta t^n} + \mathrm{div}_h\left(\vec{\Omega} N_g\right) + \alpha_g N_g = Q_g, \quad g = 1, 2, \ldots, G. \tag{5}$$

Здесь оператор $\mathrm{div}_h\left(\vec{\Omega} N_g\right)$ определяется формулами (3), (4). Дробные индексы у функций N, α, Q для краткости записи опущены.

Получены разностные уравнения, отвечающие DS_n-методу. Они выражают закон сохранения нейтронов в ячейке и удовлетворяют требованию консервативности. Система уравнений (5) не является полной, ее необходимо дополнить граничными условиями и дополнительными соотношениями, связывающими N с целыми и полуцелыми индексами. Эти соотношения будут рассмотрены после введения искусственной диссипации.

Двумерная осесимметричная геометрия. Для двумерной осесимметричной геометрии область D разбивается регулярной четырехугольной сеткой на ячейки D_{ij}. Сетка задается цилиндрическими координатами вершин ячеек (r_{ij}, z_{ij}), $i = 0, 1, \ldots, I$, $j = 0, 1, \ldots, J$ (рис. 1).

По переменным μ, ϕ сетка строится по ES_M-квадратуре [4]. Поверхность единичной полусферы разбивается на $\frac{M^2 + 2M}{2}$ ячеек с одинаковыми площадями. При этом количество интервалов по переменной μ равно M, причем сетка неравномерная, но симметричная относительно $\mu = 0$.

Разностный аналог уравнения (1) для двумерной осесимметричной геометрии имеет вид

$$\frac{N_g^{n+1} - N_g^n}{v_g \Delta t^n} + \mathrm{div}_h\left(\vec{\Omega} N_g\right) + \alpha_g N_g = Q_g, \tag{6}$$

где $\mathrm{div}_h\left(\vec{\Omega} N_g\right) \equiv \frac{1}{\Delta V_{ij}} \sum_{s=1}^{4} \vec{\Omega}\left(\vec{n} \Delta l r N_g\right)_{s+1/2} + \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta V_{ij}} \frac{\eta_{k+1} N_{g,k+1} - \eta_k N_{g,k}}{\Delta \phi_{k,m+1/2}}$; $\eta_{k+1,m+1/2} = \eta_{k,m+1/2} - \xi_{k+1,m+1/2} \Delta \phi_{k,m+1/2}$; $\eta_{0,m+1/2} = 0$; $\Delta \phi_{k,m+1/2} = \phi_{k,m+1/2} - \phi_{k+1,m+1/2}$; $k = 0, 1, \ldots, K_{m+1/2} - 1$; $m = 0, 1, \ldots, M-1$; $g = 1, 2, \ldots G$; $i = 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J$.

В качестве квадратурной формулы используется следующая:

$$SN = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\pi} N d\phi d\mu = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K_{m+1/2}-1} N_{m+1/2,k+1/2} \Delta \phi_{k,m+1/2} \Delta \mu_m.$$

Разностное уравнение (6), отвечающее методу дискретных ординат [5, 6], представляет собой интегральный закон сохранения нейтронов для ячейки $\left[t^n \le t \le t^{n+1}\right] \times D_{ij} \times \left[\mu_m \le \mu \le \mu_{m+1}\right] \times$

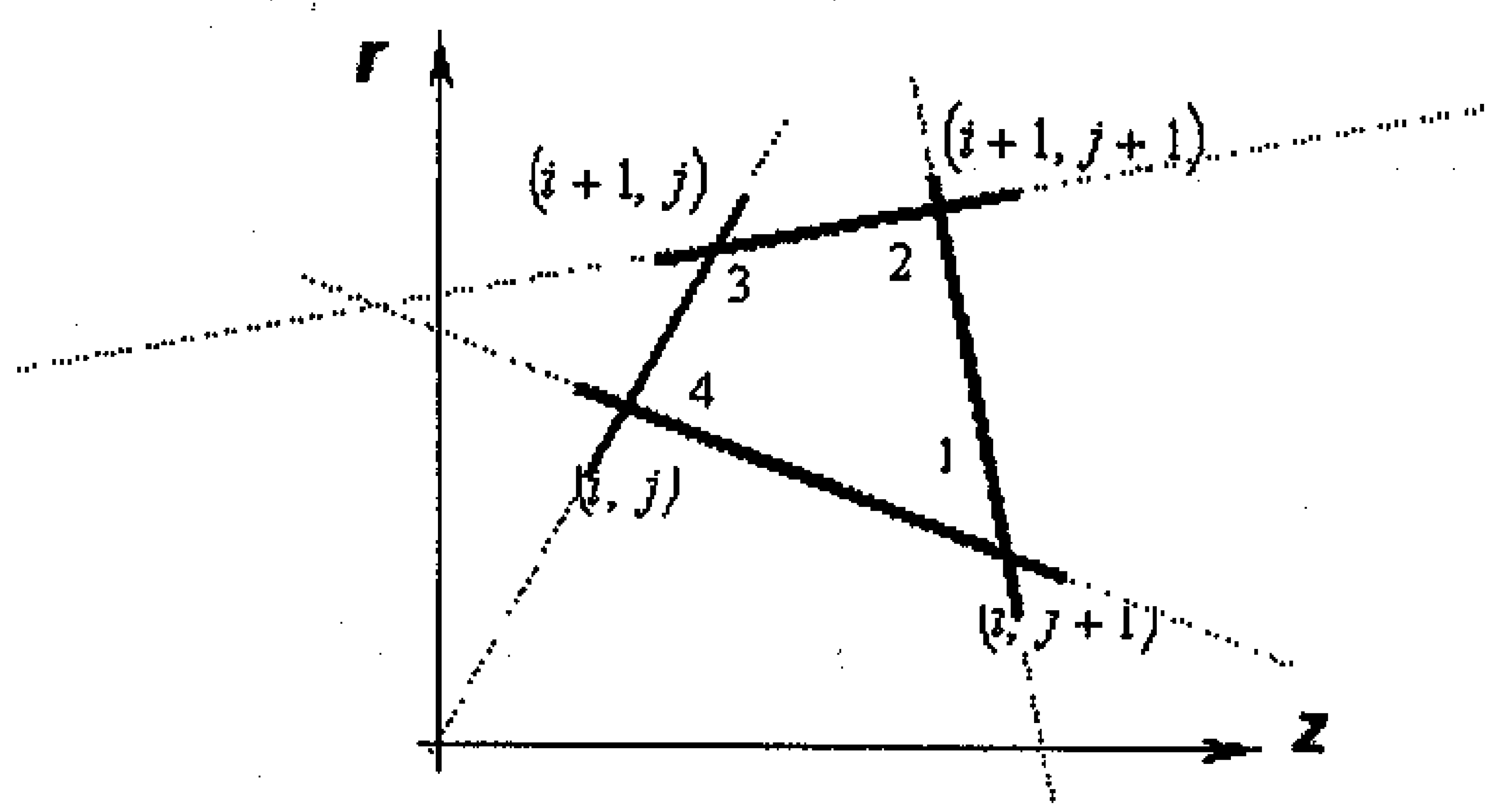

Рис. 1. Типичная ячейка D_{ij} на плоскости (r, z)

$\times \left[\phi_{k+1,m+1/2} \le \phi \le \phi_{k,m+1/2}\right]$. В уравнении (6) суммирование ведется по граням ячейки; ΔS_{ij}, ΔV_{ij} — соответственно площадь и объем ячейки; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к граням.

Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (схема DDAD)

Введение искусственной диссипации. Используя соотношение

$$N^{n+1} = p^n N + (1 - p^n) N^n,$$

где $1 \le p^n \le 2$ — весовой параметр по временной переменной, запишем уравнение (6) в виде

$$\tilde{\alpha}_g N_g + \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} N_g\right) = \tilde{Q}_g, \quad g = 1, 2, \ldots, G, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\alpha}_g = \frac{p^n}{v_g \Delta t^n} + \alpha_g; \quad \tilde{Q}_g = Q_g + \frac{p^n}{v_g \Delta t^n} \left(\frac{N_g}{\rho}\right)^n \rho.$$

Введем в уравнение (7) искусственную диссипацию через вспомогательную диссипативную функцию Ψ_g:

$$\tilde{\alpha}_g N_g + \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right) = \tilde{Q}_g, \quad N_g = \Psi_g + \delta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right) - \theta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \tilde{Q}_g\right), \tag{8}$$

где Δx — линейный размер ячейки; $\delta_g \ge 0$, $\theta_g \ge 0$ — коэффициенты искусственной диссипации. Подстановка Ψ_g из второго уравнения (8) в первое приводит к уравнению

$$\tilde{\alpha}_g N_g + \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} N_g\right) = \tilde{Q}_g + \left[\mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \delta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right)\right) - \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \theta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \tilde{Q}_g\right)\right)\right]. \tag{9}$$

Выражение

$$AD_g = \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \delta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right)\right) - \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \theta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \tilde{Q}_g\right)\right)$$

со вторыми производными, входящее в правую часть уравнения (9), есть введенная искусственная диссипация, а δ_g, θ_g — ее параметры.

Выбор параметров δ_g, θ_g. Подставим N_g из второго уравнения (8) в первое:

$$\tilde{\alpha}_g \Psi_g + (1 + \delta_g \Delta x \tilde{\alpha}_g) \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right) = \tilde{\alpha}_g \left[\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g} + \tilde{\alpha}_g \theta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right)\right], \quad g = 1, 2, \ldots, G. \tag{10}$$

Здесь параметр $\tilde{\alpha}_g$ в предположении его постоянства в рассматриваемой ячейке внесен под знак $\mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \tilde{Q}_g\right)$.

Введя приведенный коэффициент поглощения

$$\alpha_g^* = \frac{\tilde{\alpha}_g}{1 + \delta_g \Delta x \tilde{\alpha}_g},$$

запишем уравнение (10) в виде

$$\alpha_g^* \Psi_g + \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \Psi_g\right) = \alpha_g^* Q_g^*, \quad g = 1, 2, \ldots, G, \tag{11}$$

где

$$Q_g^* = \frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g} + \tilde{\alpha}_g \theta_g \Delta x \, \mathrm{div}_h \left(\vec{\Omega} \frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right).$$

Оценим разность

$$N_g - \Psi_g = \delta_g \Delta x \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\Psi_g\right) - \theta_g \Delta x \tilde{\alpha}_g \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right). \tag{12}$$

Выразим Ψ_g из уравнения (11) и вычислим

$$\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\Psi_g\right) = -\frac{1}{\alpha_g^*}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\Psi_g\right)\right) + \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right) + \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\tilde{\alpha}_g \theta_g \Delta x \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right)\right).$$

Подставив в (12), получим

$$\begin{aligned} N_g - \Psi_g \;=\; & -\frac{\delta_g \Delta x}{\alpha_g^*}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\Psi_g\right)\right) + \delta_g \Delta x \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right) + \\ & + \left(\delta_g \Delta x^2 \tilde{\alpha}_g \theta_g\right) \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right)\right) - \theta_g \Delta x \tilde{\alpha}_g \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right). \end{aligned}$$

Теперь, выбрав параметр θ_g из условия

$$\delta_g \Delta x \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right) - \theta_g \Delta x \tilde{\alpha}_g \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right) = 0, \tag{13}$$

получим

$$\theta_g = \frac{\delta_g}{\tilde{\alpha}_g}. \tag{14}$$

После этого разность $N_g - \Psi_g$ принимает вид

$$N_g - \Psi_g = -\frac{\delta_g \Delta x}{\alpha_g^*}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\Psi_g\right)\right) + \left(\delta_g \Delta x\right)^2 \operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\operatorname{div}_h \left(\vec{\Omega}\frac{\tilde{Q}_g}{\tilde{\alpha}_g}\right)\right). \tag{15}$$

Параметр δ_g будем выбирать из условия малости $N_g - \Psi_g = O\left(\Delta x^2\right)$ и обеспечения монотонных свойств решения в оптически плотных средах. Запишем систему разностных уравнений (8) в разностно-характеристическом виде:

$$\tilde{\alpha}_g N_g + \frac{\left(\Psi_g\right)_{s+1} - \left(\Psi_g\right)_s}{\Delta x_s} = \tilde{Q}_g, \quad N_g = \Psi_g + \delta_g \Delta x \frac{\left(\Psi_g\right)_{s+1} - \left(\Psi_g\right)_s}{\Delta x_s} - \theta_g \Delta x \frac{\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s}{\Delta x_s}, \tag{16}$$

где Ψ_s — значение функции Ψ в точке пересечения характеристикой гиперплоскости, проходящей через центры освещенных ребер; Ψ_{s+1} — значение функции Ψ в точке пересечения характеристикой гиперплоскости, проходящей через центры неосвещенных ребер; Δx_s — расстояние между этими двумя точками. Возможность приведения разностного оператора $\operatorname{div}_h\left(\vec{\Omega}N_g\right)$ к разностно-характеристическому виду $\dfrac{\left(\Psi_g\right)_{s+1} - \left(\Psi_g\right)_s}{\Delta x_s}$ рассмотрена в [7]. В соответствии с этим подходом получим для одномерного сферического случая

$$\Psi_s = \begin{cases} \left(-\mu_{m+1/2} r_{i+1}^2 \Psi_{i+1} + \dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta \mu_m}\left(1-\mu_m^2\right)\Psi_m\right)\left(-\mu_{m+1/2} r_{i+1}^2 + \dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta \mu_m}\left(1-\mu_m^2\right)\right)^{-1} & \text{при } \mu_{m+1/2}<0; \\ \left(\mu_{m+1/2} r_i^2 \Psi_i + \dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta \mu_m}\left(1-\mu_m^2\right)\Psi_m\right)\left(\mu_{m+1/2} r_i^2 + \dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta \mu_m}\left(1-\mu_m^2\right)\right)^{-1} & \text{при } \mu_{m+1/2}>0; \end{cases}$$

$$\Psi_{s+1}=\begin{cases}\left(-\mu_{m+1/2}r_i^2\Psi_i+\dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta\mu_m}(1-\mu_{m+1}^2)\Psi_{m+1}\right)\left(-\mu_{m+1/2}r_i^2+\dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta\mu_m}(1-\mu_{m+1}^2)\right)^{-1} & \text{при } \mu_{m+1/2}<0;\\ \left(\mu_{m+1/2}r_{i+1}^2\Psi_{i+1}+\dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta\mu_m}(1-\mu_{m+1}^2)\Psi_{m+1}\right)\left(\mu_{m+1/2}r_{i+1}^2+\dfrac{r_{i+1/2}\Delta r_i}{\Delta\mu_m}(1-\mu_{m+1}^2)\right)^{-1} & \text{при } \mu_{m+1/2}>0;\end{cases}$$

$$\Delta x_s=\begin{cases}\dfrac{\Delta V_i}{-\mu_{m+1/2}r_i^2+r_{i+1/2}\Delta r_i\dfrac{1}{\Delta\mu_m}(1-\mu_{m+1}^2)}=\dfrac{\Delta V_i}{-\mu_{m+1/2}r_{i+1}^2+r_{i+1/2}\Delta r_i\dfrac{1}{\Delta\mu_m}(1-\mu_m^2)} & \text{при } \mu_{m+1/2}<0;\\ \dfrac{\Delta V_i}{\mu_{m+1/2}r_{i+1}^2+r_{i+1/2}\Delta r_i\dfrac{1}{\Delta\mu_m}(1-\mu_{m+1}^2)}=\dfrac{\Delta V_i}{\mu_{m+1/2}r_i^2+r_{i+1/2}\Delta r_i\dfrac{1}{\Delta\mu_m}(1-\mu_m^2)} & \text{при } \mu_{m+1/2}>0.\end{cases}$$

Функция Ψ_s представляет собой линейную интерполяцию средних значений Ψ на освещенных гранях в точку на характеристике, проведенной через центр ячейки. Аналогично, функция Ψ_{s+1} есть линейная интерполяция средних значений Ψ на неосвещенных гранях (рис. 2).

В случае плоской геометрии величины Ψ_s, Ψ_{s+1}, Δx_s определяются проще:

$$\Psi_s=\begin{cases}\Psi_{i+1} & \text{при } \mu_{m+1/2}<0;\\ \Psi_i & \text{при } \mu_{m+1/2}>0;\end{cases}\qquad \Psi_{s+1}=\begin{cases}\Psi_i & \text{при } \mu_{m+1/2}<0;\\ \Psi_{i+1} & \text{при } \mu_{m+1/2}>0;\end{cases}\qquad \Delta x_s=\frac{\Delta r}{|\mu_{m+1/2}|}.$$

Для двумерной осесимметричной геометрии получим

$$\Psi_s=\left(-\sum_{\vec\Omega\vec n_l<0}\left(\vec\Omega\vec n\Delta lr\Psi\right)_{l+1/2}+\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_k\Psi_k\right)\left(-\sum_{\vec\Omega\vec n_l<0}\left(\vec\Omega\vec n\Delta lr\right)_{l+1/2}+\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_k\right)^{-1};$$

$$\Psi_{s+1}=\left(\sum_{\vec\Omega\vec n_l>0}\left(\vec\Omega\vec n\Delta lr\Psi\right)_{l+1/2}+\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_{k+1}\Psi_{k+1}\right)\left(\sum_{\vec\Omega\vec n_l>0}\left(\vec\Omega\vec n\Delta lr\right)_{l+1/2}+\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_{k+1}\right)^{-1};$$

$$\Delta x_s=\Delta V_{ij}\left(-\sum_{\vec\Omega\vec n_l<0}\left(\vec\Omega\vec n\Delta lr\right)_{l+1/2}+\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_k\right)^{-1}=\Delta V_{ij}\left(\sum_{\vec\Omega\vec n_l>0}\left(\vec\Omega\vec n\Delta lr\right)_{l+1/2}+\frac{\Delta S_{ij}}{\Delta\phi_k}\eta_{k+1}\right)^{-1}.$$

Здесь $\sum\limits_{\vec\Omega\vec n_l<0}(\ldots)$ — суммирование по освещенным граням, $\sum\limits_{\vec\Omega\vec n_l>0}(\ldots)$ — суммирование по неосвещенным граням.

Будем применять DD-схему для решения системы (8) или эквивалентной ей системы (16). Тогда значение Ψ_g в центре ячейки можно представить как полусумму Ψ_g на противоположных гранях, кроме случая, когда лишь одно ребро освещено, а три — нет. В такой ячейке вместо DD-схемы

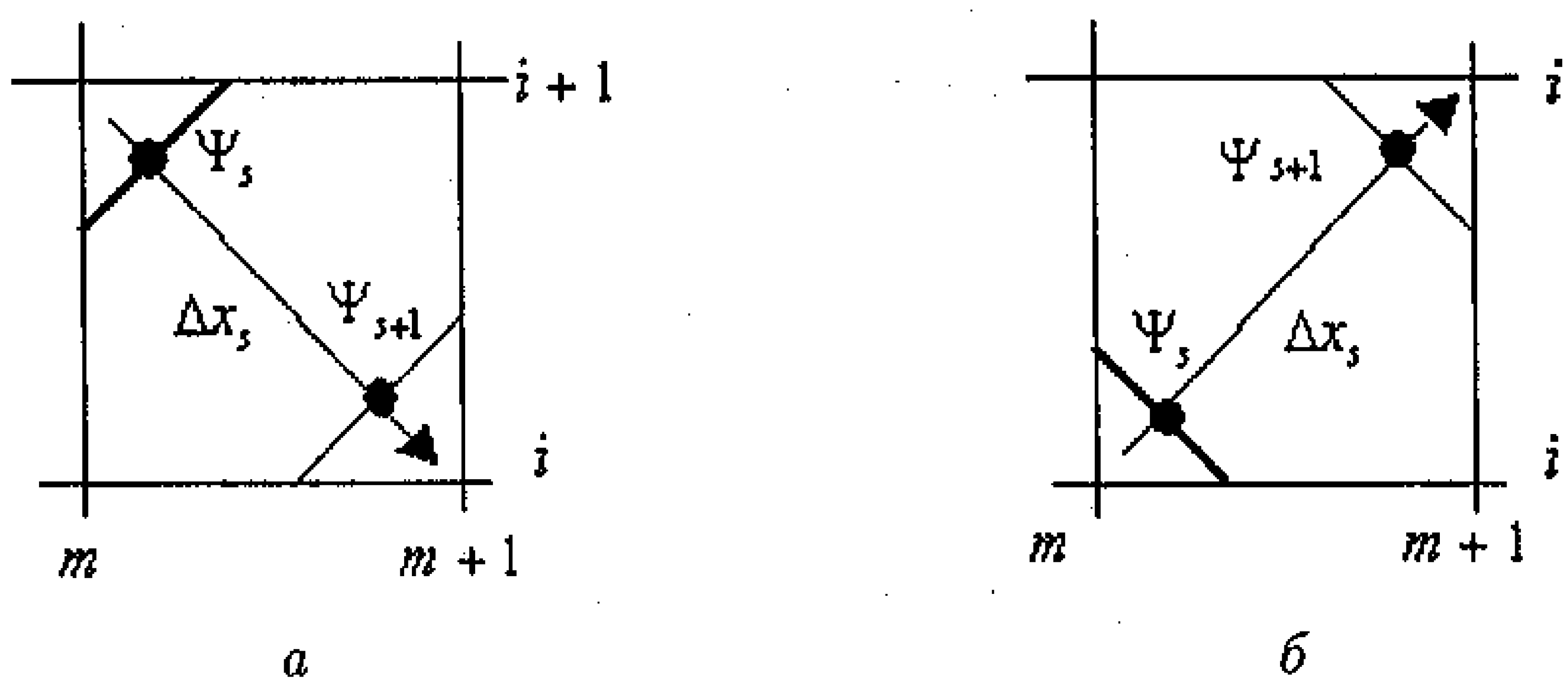

Рис. 2. Графическое представление величин Ψ_s, Ψ_{s+1}, Δx_s: *а* — $\mu_{m+1/2}<0$; *б* — $\mu_{m+1/2}>0$

второго порядка точности используется St-схема первого порядка точности. Соотношения для Ψ_g в центре ячейки, используемые в DD-схеме, можно привести к виду

$$\Psi_g = \frac{(\Psi_g)_{s+1} + (\Psi_g)_s}{2} + O\left(\Delta x^2\right). \tag{17}$$

Для этого надо составить полусумму из формул для Ψ_{s+1}, Ψ_s и воспользоваться соотношениями DD-схемы. Подставляя (17) в (16) и полагая $\Delta x = \Delta x_s$, можно вывести следующую формулу решения на характеристической базе $[x_s \le x \le x_{s+1}]$:

$$(\Psi_g)_{s+1} = (\Psi_g)_s \frac{2 - \tilde{\alpha}_g \Delta x_s (2\delta_g - 1)}{2 + \tilde{\alpha}_g \Delta x_s (2\delta_g + 1)} + \frac{\Delta x_s \left[\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} + \left(\tilde{Q}_g\right)_s + 2\delta_g \left((Q_g)_{s+1} - (Q_g)_s\right)\right]}{2 + \tilde{\alpha}_g \Delta x_s (2\delta_g + 1)}. \tag{18}$$

Теперь запишем исходное уравнение переноса (7) в характеристической форме:

$$\frac{\partial N_g}{\partial x} + \tilde{\alpha}_g N_g = \tilde{Q}_g. \tag{19}$$

Предположив постоянство $\tilde{\alpha}_g$ в ячейке на интервале $[x_s \le x \le x_{s+1}]$ и линейность $\tilde{Q}_g$,

$$\tilde{Q}_g(x) = \frac{\left(\tilde{Q}_g\right)_s + \left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1}}{2} + \frac{\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s}{\Delta x_s}\left(x - x_{s+1/2}\right),$$

проведем точное интегрирование уравнения (19) на характеристической базе $[x_s \le x \le x_{s+1}]$. Тогда получим

$$(N_g)_{s+1} = \exp(-\tilde{\alpha}_g \Delta x_s)(N_g)_s + \left(1 - \exp(-\tilde{\alpha}_g \Delta x_s)\right)\frac{\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s}{-\tilde{\alpha}_g^2 \Delta x_s} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_g}\left(\left(\tilde{Q}_g\right)_{s+1} - \left(\tilde{Q}_g\right)_s \exp(-\tilde{\alpha}_g \Delta x_s)\right). \tag{20}$$

Теперь, предположив равенство значений $(\Psi_g)_s = (N_g)_s$ на входе, потребуем совпадения выходящих значений: $(\Psi_g)_{s+1} = (N_g)_{s+1}$. Выберем параметр δ_g из этого требования. Сравнивая (18) и (20), получаем следующие формулы для δ_g, θ_g:

$$\delta_g = \frac{1}{2}\frac{1 + \exp(-\tilde{\alpha}_g \Delta x_s)}{1 - \exp(-\tilde{\alpha}_g \Delta x_s)} - \frac{1}{\tilde{\alpha}_g \Delta x_s}; \quad \theta_g = \frac{1}{\tilde{\alpha}_g}\delta_g. \tag{21}$$

Заметим, что данная формула для θ_g совпадает с формулой (14), выведенной из условия (13). Схема (16), (17) с параметрами δ_g, θ_g из формул (21) совпадает с линейной характеристической LC-схемой [4], написанной на характеристической базе $[x_s \le x \le x_{s+1}]$. Поэтому формулы (21) для выбора параметров будем называть LC-вариантом, а саму схему (16) с данными параметрами и соотношениями DD-схемы — DDAD-схемой с LC-вариантом выбора параметров искусственной диссипации. Возможны и другие варианты выбора параметров δ_g, θ_g. Например, в качестве δ, θ можно выбрать следующие:

$\delta = 1/2$, $\quad \theta = 0$ — параметры St-схемы;

$\delta = 0$, $\quad \theta = 0$ — параметры DD-схемы, где искусственная диссипация не вводится;

$\delta = \tilde{\alpha}\Delta x/12$, $\quad \theta = 0$ — параметры CM-схемы (константная моментная);

$\delta = \dfrac{1}{2}\dfrac{1 + \exp(-\tilde{\alpha}\Delta x)}{1 - \exp(-\tilde{\alpha}\Delta x)} - \dfrac{1}{\tilde{\alpha}\Delta x}$, $\quad \theta = 0$ — параметры SC-схемы (шаговая характеристическая);

$\delta = \tilde{\alpha}\Delta x/12$, $\quad \theta = \delta/\tilde{\alpha}$ — параметры LM-схемы (линейная моментная).

Здесь использованы общепринятые обозначения схем [4]. Во всех этих схемах, кроме LM и LC, полагается $(\Delta Q/\Delta x)_{s+1/2} \equiv 0$, поскольку линейное приближение Q используется только в схемах LM и LC. Схемы DD, CM, SC имеют второй порядок точности аппроксимации как при интегрировании уравнения (19) на характеристической базе $[x_s, x_{s+1}]$, так и для исходного уравнения. Схемы же LM и LC имеют четвертый порядок точности на характеристической базе и второй для исходного уравнения, что следует из соотношения (17). Во всех случаях DDAD-схемы с выбором параметров δ, θ по CM, SC, LM, LC-схемам проблема оптически плотных сред, в отличие от DD-схемы, разрешается за счет вводимой искусственной диссипации. Это, в частности, следует из того, что приведенная оптическая плотность для них мала ($\alpha^*\Delta x \leq 2$).

Теперь вернемся к оценке величины $N_g - \Psi_g$ в формуле (15). При $\tilde{\alpha}_g\Delta x < 1$, используя разложение $\exp\left(-\tilde{\alpha}_g\Delta x\right)$ в ряд Тейлора, получаем оценку

$$\frac{\delta_g\Delta x}{\alpha_g^*} = \frac{\delta_g\Delta x}{\tilde{\alpha}_g}\left(1+\delta_g\Delta x\tilde{\alpha}_g\right) = \frac{\Delta x^2}{12} + O\left(\Delta x^3\right). \tag{22}$$

Если же $\tilde{\alpha}_g\Delta x \geq 1$, то

$$\frac{\delta_g\Delta x}{\alpha_g^*} = \frac{\delta_g\Delta x}{\tilde{\alpha}_g} + \left(\delta_g\Delta x\right)^2 \leq 2\delta_g\Delta x^2 < \Delta x^2. \tag{23}$$

Применив (22), (23) к (15), получим оценку

$$N_g - \Psi_g = O\left(\Delta x^2\right). \tag{24}$$

На рис. 3 приведены зависимости δ и $\alpha^*\Delta x$ от $\tilde{\alpha}\Delta x$.

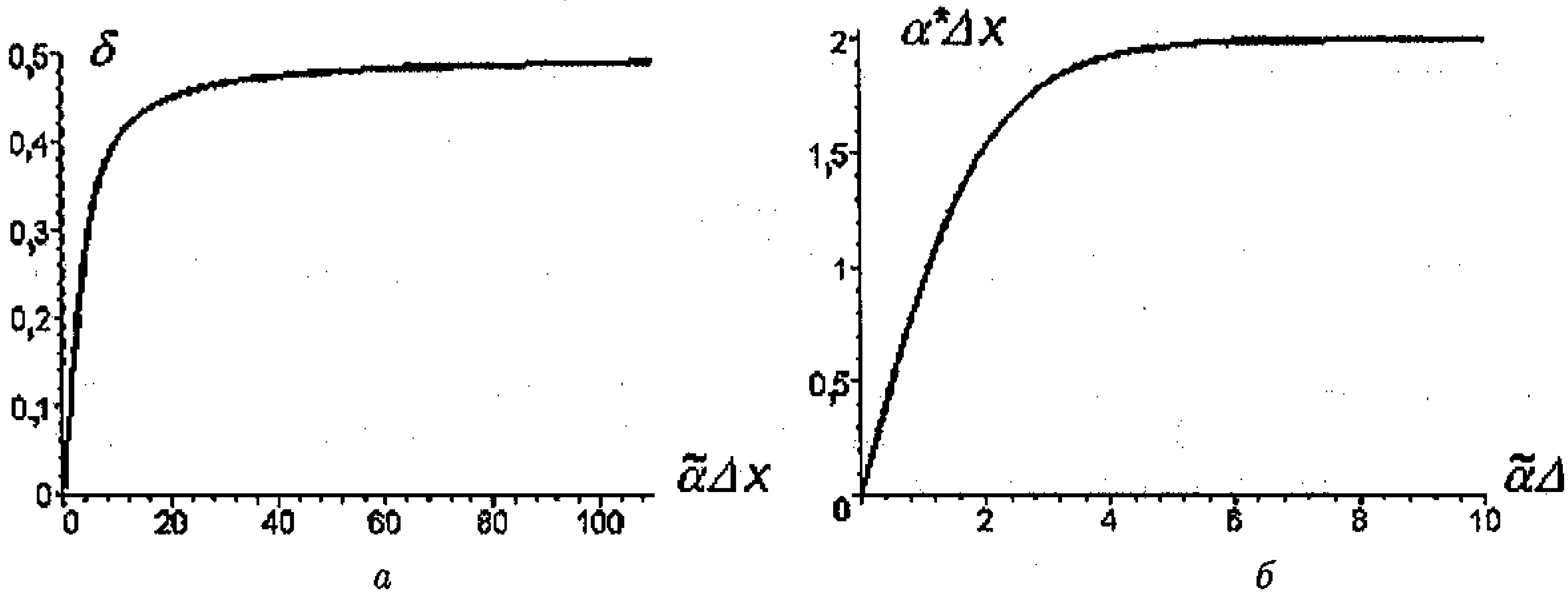

Рис. 3. Зависимость δ (*а*) и $\alpha^*\Delta x$ (*б*) от $\tilde{\alpha}\Delta x$

В итоге имеем следующее. Вместо исходного уравнения (7), где оптическая плотность $\tilde{\alpha}_g\Delta x$ может быть значительной и использование DD-схемы может привести к большим нефизическим осцилляциям, решается эквивалентная задача (11) относительно диссипативной функции Ψ_g. Для новой задачи оптическая толщина мала $\left(\alpha_g^*\Delta x < 2\right)$, и применение DD-схемы для ее решения оправданно. Это не будет приводить к тем нефизическим осцилляциям, о которых говорилось выше. Решение новой задачи остается близкой к решению исходной задачи $\left(N_g - \Psi_g = O\left(\Delta x^2\right)\right)$.

Численные расчеты

Задача 1. Эта задача заимствована из работы Рида [2] для плоской геометрии. Расчетная система состоит из пяти областей различной оптической плотности. Геометрия системы, значения коэффициентов поглощения α, рассеяния β и источник f приведены на рис. 4. Задача односкоростная (v=1).

Левое граничное условие — отражатель: $N(0,\mu) = N(0,-\mu)$, правое граничное условие — нулевой входящий поток: $N(R,\mu) = 0$ при $-1 \leq \mu \leq 0$.

Сетка по оси r берется равномерная, с шагом $\Delta r = 0,2$, по угловой переменной μ — равномерная, с числом интервалов $M = 16$.

Результаты расчетов в виде профилей SN приведены на рис. 5. В качестве точного приведено решение, полученное с очень подробной сеткой: $\Delta r = 0,001$ и $\Delta\mu = 0,01$. Варианты B1, B2 расчетов отличаются выбором параметров DDAD-схемы: B1 — $\delta = \dfrac{\tilde{\alpha}h}{8}$, $\theta = \dfrac{\delta}{\tilde{\alpha}}$; B2 — $\delta = \dfrac{\tilde{\alpha}h}{4}$, $\theta = \dfrac{\delta}{\tilde{\alpha}}$. При получении отрицательного решения происходит пересчет по St-схеме с $\delta = 1/2$, $\theta = 0$. На рис. 5 видна немонотонность решения в оптически плотной среде для DD-схемы и улучшение монотонности в вариантах LC, B1, B2 схемы DDAD. Зависимость результата от r и μ в трехмерном виде для варианта B1 схемы DDAD представлена на рис. 6.

Задача 2. Эта задача составлена на основе первой. Расчетная система состоит из семи областей и приведена на рис. 7.

Левое граничное условие — отражатель: $N(0,\mu) = N(0,-\mu)$, правое граничное условие — входящий поток: $N(R,\mu) = 1$, $-1 \le \mu \le 0$.

Сетка по оси r берется равномерная, с шагом $\Delta r = 0{,}2$, по угловой переменной μ — равномерная, с числом интервалов $M = 16$. Задача считалась для плоской и сферической геометрий.

Результаты расчетов для сферической геометрии представлены на рис. 8. "Точное" решение — результат, полученный по одномерной программе на подробной сетке; DD/St — результат, полученный по двумерной программе с использованием DD-схемы с пересчетом отрицательных N по St-схеме; DDAD/St — результат, полученный по двумерной программе с использованием DDAD-схемы с пересчетом отрицательных N по St-схеме. Из рис. 8 видно, что кривая для DD/St-схемы

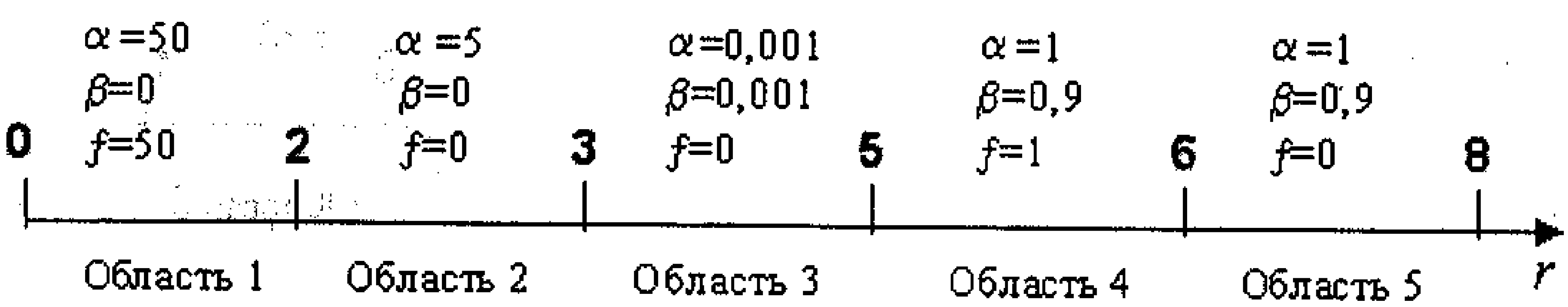

Рис. 4. Задача 1. Геометрия и параметры расчетной системы

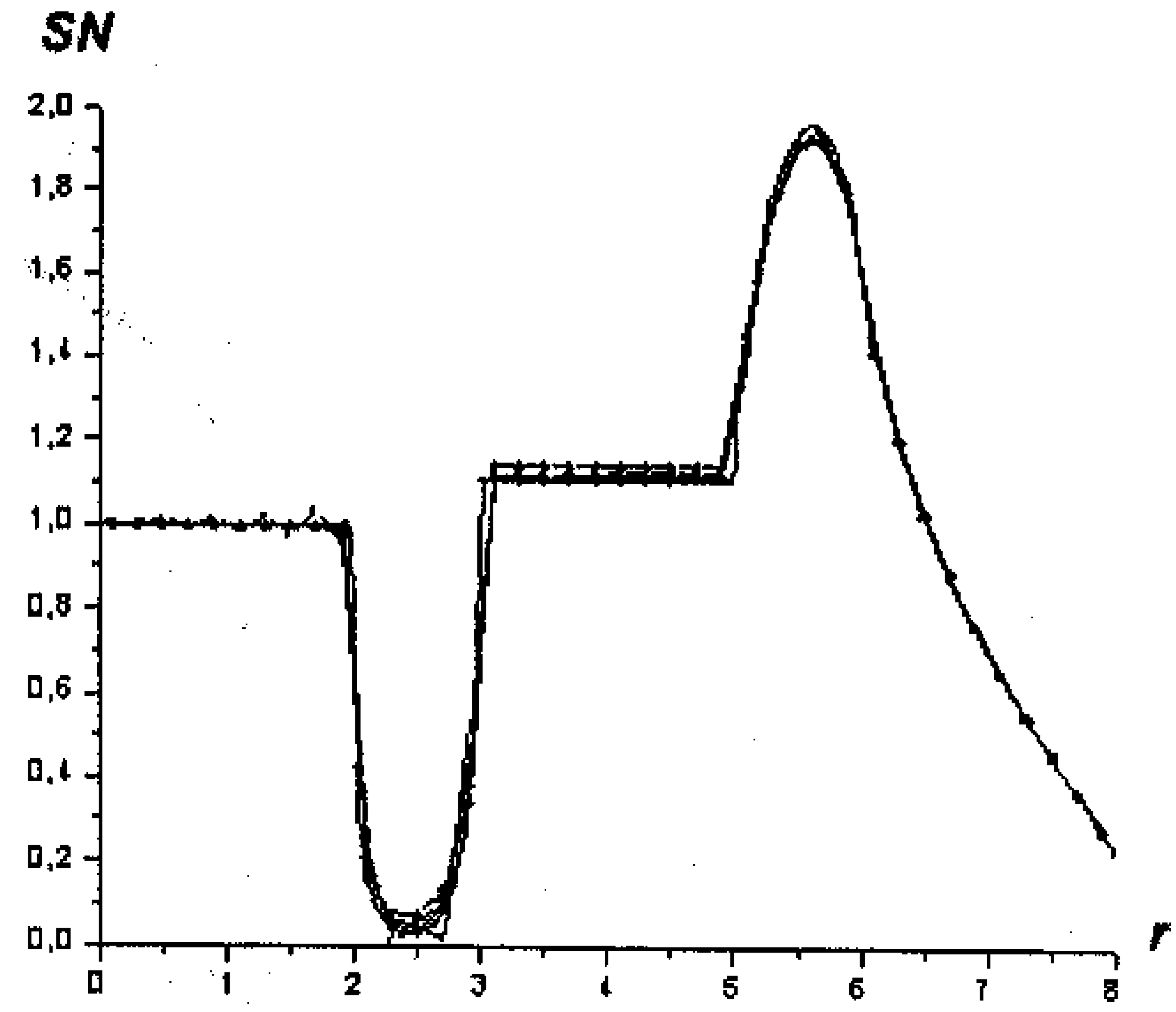

Рис. 5. Задача 1. Расчетные профили SN: —— — точное решение; – · – — DD-схема; –▲– — DDAD-схема, вариант B1; –♦– — DDAD-схема, вариант LC; –★– — DDAD-схема, вариант B2

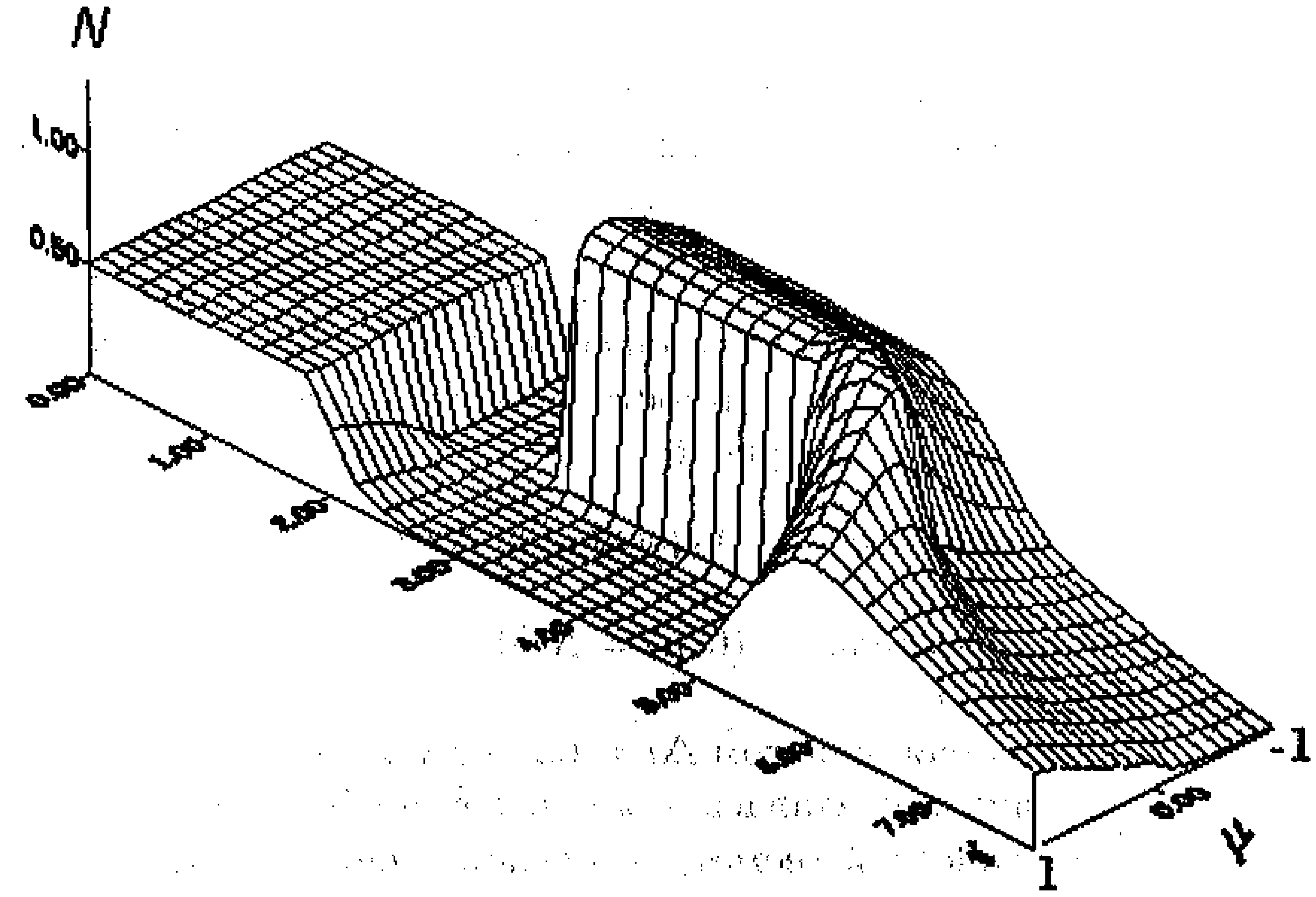

Рис. 6. Распределение нейтронов по пространству r и μ для варианта B1 схемы DDAD

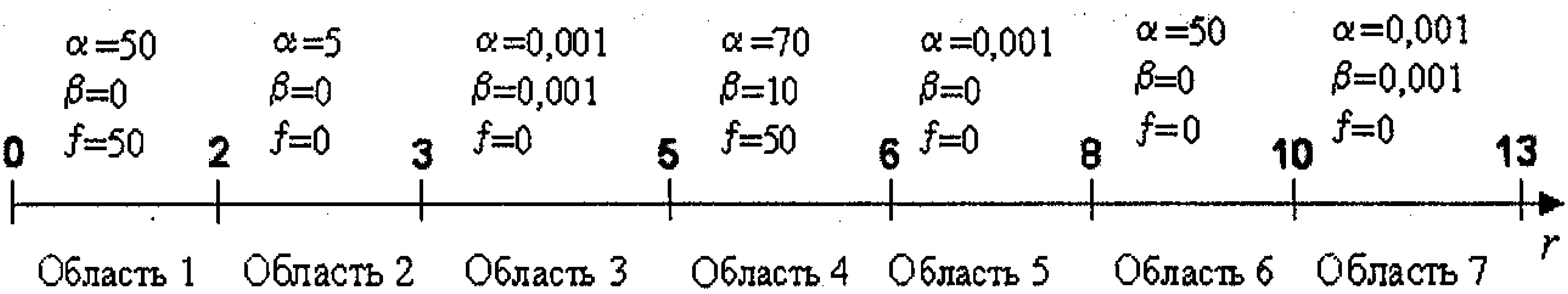

Рис. 7. Задача 2. Геометрия и параметры расчетной системы

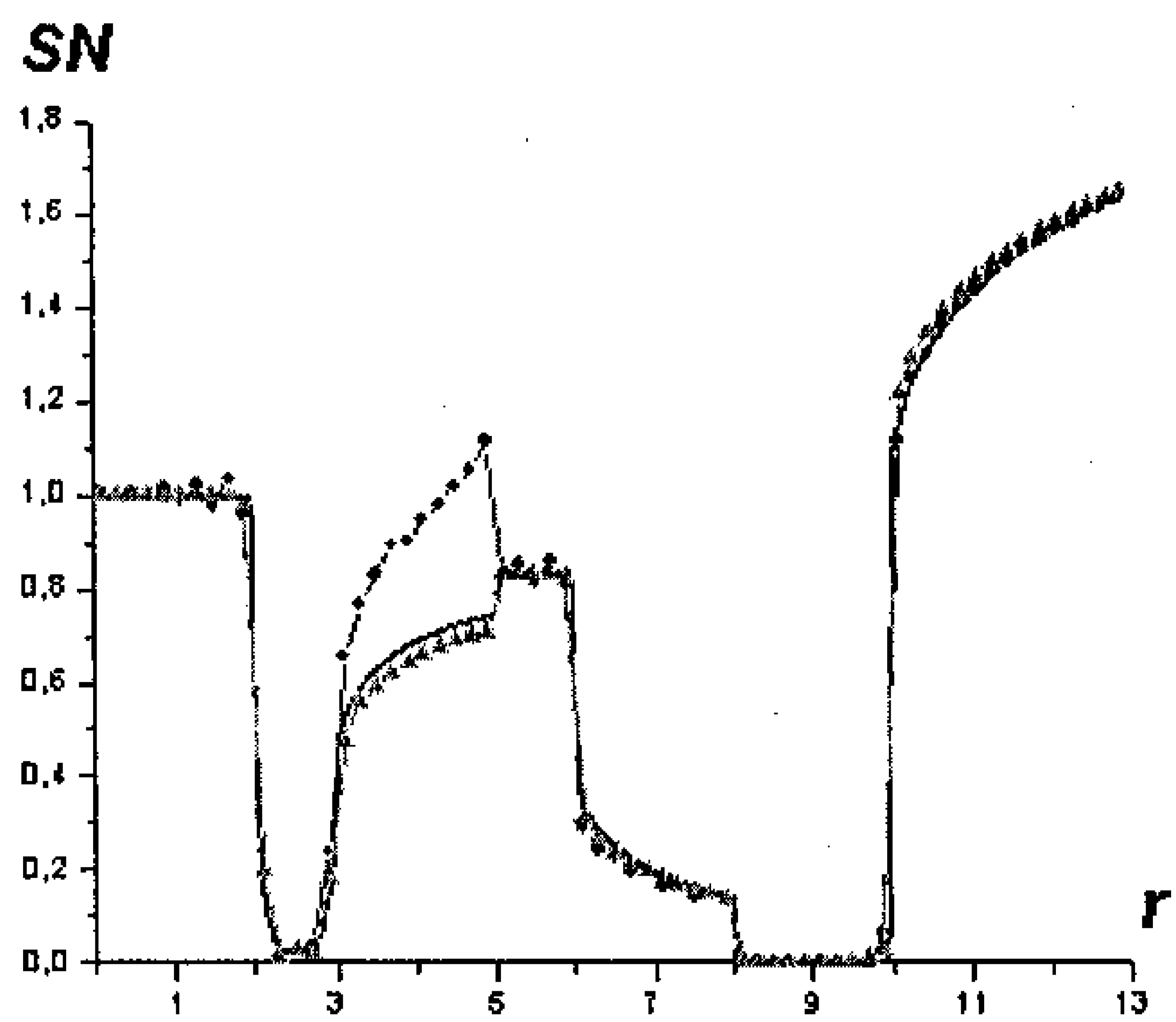

Рис. 8. Задача 2. Расчетные профили SN в сферической геометрии: —— —"точное" решение; –•– — расчет по DD/St-схеме; –▲– — расчет по DDAD/St-схеме

существенно отклонилась от точного решения в области 3 ($3 \le r \le 5$). Гораздо лучше ведет себя DDAD/St-схема: решение всюду близко к точному, осцилляции имеют меньшую амплитуду, выброс в области 3 отсутствует.

Далее геометрия задачи была модифицирована из одномерной сферической в двумерную цилиндрическую (рис. 9).

Результат расчета при $z \approx 0$ представлен на рис. 10. Качественно он повторяет одномерный.

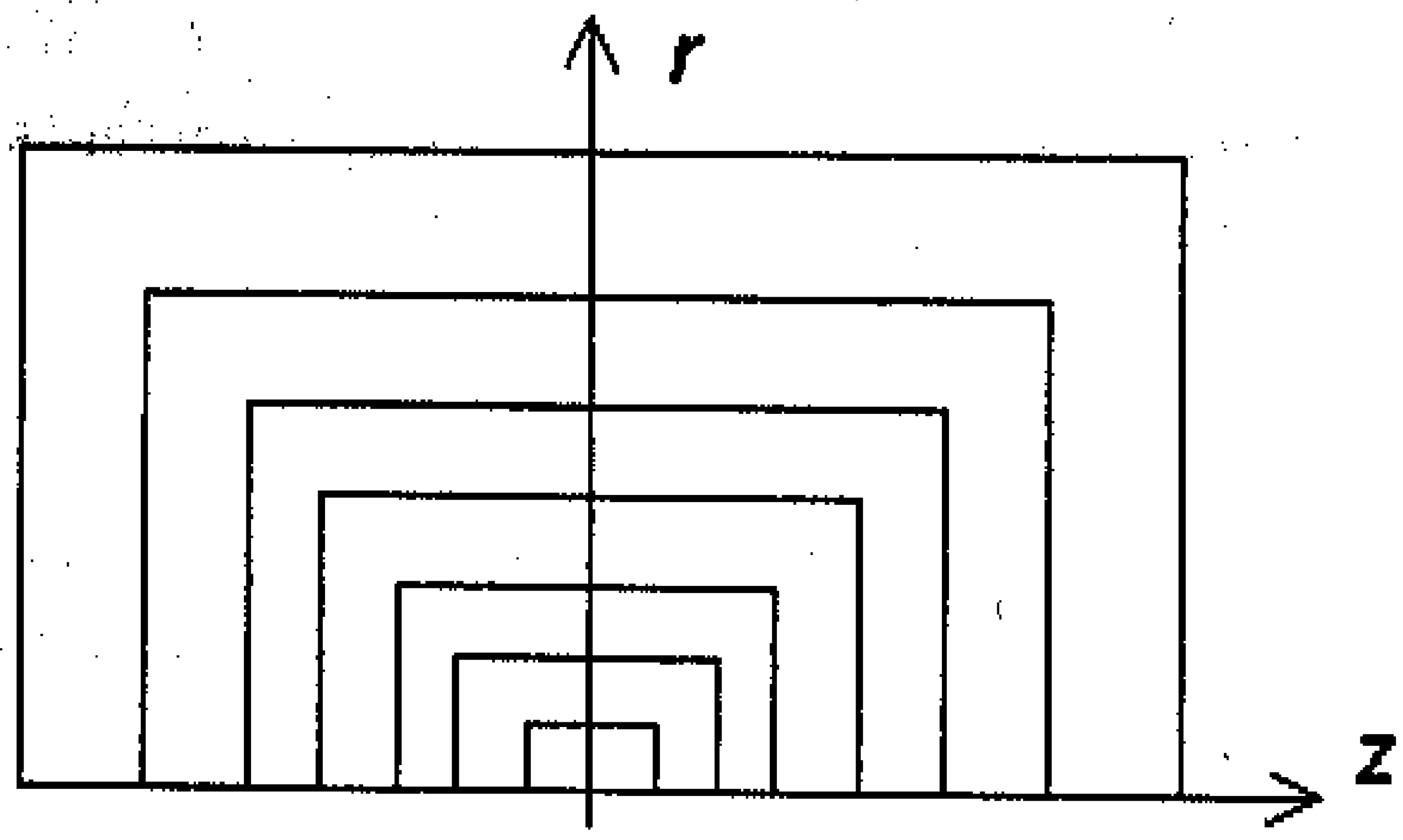

Рис. 9. Геометрия модифицированной задачи

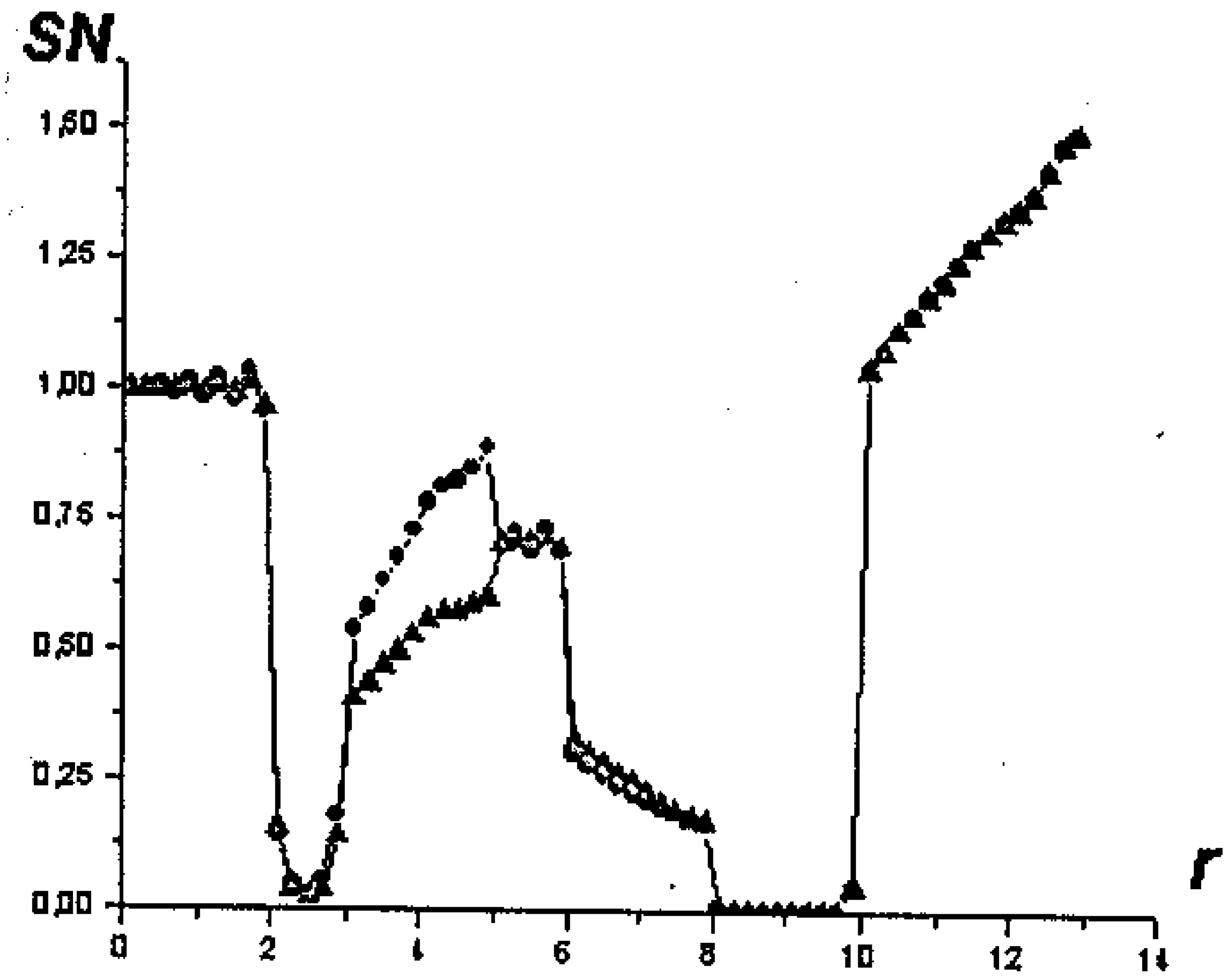

Рис. 10. Расчетные профили SN для модифицированной задачи: – • – – по DD/St-схеме; –▲– – по DDAD/St-схеме

Расчеты показали, что рассмотренный в работе метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) ослабляет нефизические осцилляции, возникающие в оптически плотных средах.

Список литературы

1. *Карлсон Б.* Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243—258.
2. *Reed W. H.* New difference schemes for the neutron transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1971. Vol. 46, No 2. P. 309—314.
3. *Белл Д., Глесстон С.* Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.

4. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.

5. *Трощиев В. Е., Шумилин В. А.* Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 26. С. 230—241.

6. *Alcouff R. E.* Diffusion synthetic acceleration methods for the diamond-differenced discrete-ordinates equations // Nucl. Sci. Eng. 1977. Vol. 64. P. 344.

7. *Carlson B. G.* A method of characteristics and other improvements in solutions methods for the transport equation // Ibid. 1976. G1, No 3. P. 408—425.