

УДК 517.9:532.517.14

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РИХТМАЙЕРА—МЕШКОВА

Н. В. Змитренко, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин
(ИММ РАН)

Выполнено численное исследование динамики развития гидродинамической неустойчивости и возникновения турбулентности на контактной границе *элегаз-воздух* для условий экспериментов на ударной трубе. Расчеты проведены с помощью программного комплекса NUT, в том числе с привлечением параллельной версии кода, использующей 270 процессоров. Установлена связь характеристик турбулентности со спектром начальных возмущений. Показано, что для спектральной плотности энергии $E(q)$ в области диссипации справедлива зависимость $E(q) \sim q^{-11/3}$, наблюдавшаяся ранее в других расчетах и экспериментах.

Введение

В настоящей работе изложены постановки и результаты расчетов задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера—Мешкова для условий, соответствующих эксперименту [1]. В данном эксперименте наряду с шириной зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) измерялись пульсации продольной скорости течения, что предоставило обширный материал для сопоставления с результатами расчетов. Основные сведения об экспериментальной установке и условиях выполненного на ней ряда экспериментов содержатся в [1–4].

Из анализа приведенной литературы можно определить некоторые из условий экспериментов. Общим в этих исследованиях является создание ударной волны (УВ) с примерно одинаковыми во всех опытах параметрами; волна образуется при прорыве мембраны, отделяющей камеру высокого давления от покоящегося элегаза (SF_6), находящегося при атмосферном давлении. Неустойчивость Рихтмайера—Мешкова возбуждается при прохождении УВ тонкой мембраны, разделяющей элегаз и воздух, также находящийся при атмосферном давлении. Начальные возмущения контактной границы (КГ), заключающиеся в прогибе мембраны, создаются небольшим (1,44 Мбар) избытком давления в элегазе. В работах [1–4] описано два способа создания начальных условий: мембрана закрепле-

на либо на стенках трубы, либо на квадратной сетке проволочек. Последний способ создания начальных возмущений используется в [1].

Из имеющихся в [1–4] данных можно с уверенностью установить следующее: при подходе УВ к КГ ее число Маха составляет 1,45 (во всех опытах $1,445 < M < 1,455$). С учетом данных, приведенных на графиках (в том числе результатов измерений), скорость этой первичной УВ 194–195 м/с, скорость КГ (скорость течения), приобретенная ею после прохождения УВ, 128–130 м/с. Из параметров геометрии ударной трубы указано только сечение: 8×8 см. Ни длины трубы, ни размеров камеры высокого давления, ни давления не приведено. В работе [2] содержится указание на то, что в камере высокого давления находится воздух. Достаточно подробно описано начальное возмущение: при закреплении мембраны на стенках ее прогиб достигает 7 мм; при использовании системы проволочек диаметром 80 мкм, расположенных в виде квадратной сетки с шагом 1010 мкм (зазор между проволочками 930 мкм), прогиб составляет 80 мкм.

Вместе с тем для воспроизведения характеристик развивающейся турбулентности динамика УВ до прохождения ею КГ незначительна; при этом она была бы различной в случаях, когда камера высокого давления замкнута (волна ослабевает) и когда в камере поддерживается постоян-

ное давление (волна распространяется с постоянной скоростью).

Все измерения проводятся в области, занимаемой первоначально воздухом и имеющей продольный размер 300 мм. Временной интервал, в течение которого проводятся измерения, составляет не более 2,5 мс, данные с датчиков (лазерных доплеровских анемометров) в основном фиксируются в диапазоне $0 < t < 2$ мс ($t = 0$ — момент прохождения УВ через КГ), за исключением самого последнего датчика, расположенного на расстоянии 178,5 мм от КГ, для которого имеются данные [4] во временном диапазоне $2 < t < 2,5$ мс.

Исходя из приведенных выше данных для расчетов по коду NUT [5], была принята следующая физическая постановка задачи, соответствующая начальной температуре 291 К и давлению 10^{-4} ГПа = 1 бар в камере низкого давления. Именно, за УВ в элегазе давление 2,152 бар, плотность $1,209 \cdot 10^{-2}$ г/см³, скорость УВ 195,2 м/с, скорость течения за УВ 97,76 м/с, начальные плотности элегаза и воздуха в камере низкого давления $6,037 \cdot 10^{-3}$ и $1,198 \cdot 10^{-3}$ г/см³ соответственно. При этом скорость прошедшей в воздух УВ составляет 428,7 м/с, а скорость КГ 130,1 м/с. Физические свойства элегаза и воздуха следующие: оба вещества являются невязкими, нетеплопроводными и идеальными газами с показателями адиабаты $\gamma = 1,094$ (SF₆) и $\gamma = 1,4$ (воздух), отношение их молекулярных масс (SF₆/воздух) принято равным 5,04.

Постановка расчетных задач

Основной целью проводимых расчетов является получение и анализ временных зависимостей пульсаций продольной компоненты скорости $\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2$ в местах расположения датчиков LDA. Координаты точек измерения указаны в [1]. Примем, следуя [1], что положение контактного разрыва характеризуется значением продольной координаты $z = 0$, воздух низкого давления занимает первоначально промежуток $0 \leq z \leq 300$ мм. Тогда координаты датчиков имеют следующие значения: 1-й датчик — $z = 51$ мм, 2-й датчик — $z = 125,5$ мм, 3-й датчик — $z = 161$ мм, 4-й датчик — $z = 169$ мм, 5-й датчик — $z = 178,5$ мм.

Из физического смысла задачи и целей исследования вытекает, что можно рассмотреть в ка-

честве начальных условий следующую постановку. В области $z_{\min} \leq z \leq z_{SW} < 0$ задано состояние элегаза за УВ с числом Маха 1,45, в области $z_{SW} < z < 0$ — состояние покоящегося элегаза при давлении 10^{-4} ГПа, в области $0 < z < z_{\max}$, $z_{\max} = 300$ мм — состояние покоящегося воздуха при 10^{-4} ГПа. При этом $|z_{SW}|$ может иметь достаточно малое значение, чтобы время достижения УВ контактного разрыва было мало (например 1%) по сравнению со всем временем расчета, которое составляет ~ 2500 мкс. При прохождении УВ через КГ элегаз-воздух возникает распад разрыва, в результате которого влево (в сторону меньших значений z) начинает двигаться волна разрежения, имеющая передний (левый) и задний (правый) фронты, а вправо в воздух устремляется УВ, которая успевает дважды отразиться от торца $z = 300$ мм и от ЗТП, в которую превращается контактный разрыв. К моменту 2500—2700 мкс УВ в третий раз падает на ЗТП (последнее обстоятельство имеет значение только для сопоставления с данными 5-го датчика [4]). Значение z_{\min} должно быть таково, чтобы передний (левый) фронт волны разрежения подошел к этой границе не ранее 2000—2500 мкс, так чтобы при наличии каких-либо отражений на границе не возникало возмущений, способных исказить изучаемое решение. Поперечная геометрия трубы $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ характеризуется значениями $x_{\min} = y_{\min} = 0$ и $x_{\max} = y_{\max} = 80$ мм. Таким образом, в описываемых в настоящей работе постановках расчетов принято, что стенки $x = x_{\min}$, $x = x_{\max}$, $y = y_{\min}$, $y = y_{\max}$ и $z = z_{\max}$ — жесткие (граничное значение соответствующей нормальной компоненты скорости равно нулю). Стенка $z = z_{\min}$ — пролицируемая, здесь равны нулю производные по z -координате от плотности, давления и продольной скорости. До прихода каких-либо возмущений из счетной области эти условия обеспечивают воспроизведение в каждый момент времени условий за первичной УВ в элегазе.

Предварительные расчеты, выполненные на кубической сетке для выявления динамики распространения волн вдоль координаты z с небольшим количеством ячеек по поперечным координатам ($x_{\max} = y_{\max} = 8$ мм), показали, что значение $z_{\min} = -100$ мм достаточно, чтобы влияние левой по z границы не сказывалось на характере течения во всей счетной области $z_{\min} < z < z_{\max}$ на протяжении 2500 мкс после прохождения УВ через КГ. При этом, если $|z_{SW}| < 50$ мм, возму-

щения численного характера на контактной поверхности практически не возникают.

Исходя из полученной динамики процесса, для дальнейших расчетов было принято $z_{sw} = -5$ мм. При этом время прихода УВ на КГ составило 25,6 мкс. Далее рассматривались два основных варианта расчетов:

- 1) $z_{min} = -100$ мм; $z_{max} = 300$ мм. Расчет ведется до времени 2000 мкс, так что фиксируются значения пульсаций компонент скорости на всех пяти датчиках;
- 2) $z_{min} = -20$ мм, $z_{max} = 60$ мм. Расчет ведется до времени 500 мкс, так что фиксируются данные только 1-го датчика, расположенного на расстоянии 51 мм от КГ. В этом случае обе границы $z = z_{min}$ и $z = z_{max}$ — проницаемые. УВ проходит границу $z = z_{max}$ примерно через 170 мкс, а ЗТП подходит к правой границе $z = z_{max}$ к моменту 490 мкс; после 500 мкс счет прекращается.

Такие постановки расчетных задач основываются на предположении об отсутствии влияния границ на результаты счета (показания датчиков) и позволяют установить основные характеристики процесса при небольшом объеме вычислительных ресурсов.

Обсудим теперь способы создания начальных возмущений в численных постановках задач. Если требования к сетке определяются необходимостью разрешения задачи для наименьших характерных размеров, то максимально возможный шаг по пространству для равномерной кубической сетки есть 80 мкм $= 8 \cdot 10^{-2}$ мм (диаметр проволоочки). Это приводит к весьма значительным размерам сетки: $N_x \times N_y \times N_z = 1000 \times 1000 \times 5000 = 5 \cdot 10^9$ ячеек, что потребует 10^{11} – 10^{12} байт оперативной памяти. Отметим, что, хотя проблема может быть существенно смягчена использованием неравномерной сетки (оценки показывают, что для воспроизведения структуры начальных данных системы *проволочки-мембрана* уже достаточно $N_x \times N_y \times N_z = 160 \times 160 \times 1000 = 2,56 \cdot 10^7$ ячеек), в настоящей работе авторы провели исследования возможностей моделирования данной задачи на равномерной сетке с шагами $h = 1; 0,5; 0,333$ мм. Из семи проведенных расчетов пять (Т1–Т5) относятся к первой серии (с $h = 1; 0,5$ мм), два (Т6 и Т7) — ко второй (с $h = 0,333$ мм).

Постановка первой серии расчетов (равномерные сетки с $h = 1$ мм и $h = 0,5$ мм)

Рассмотрим сначала только равномерные сетки с шагом по пространству 0,5 и 1 мм.

Возможно, что характер начальных возмущений не влияет существенным образом на результаты измерений на датчиках. В этом случае можно наложить равномерную сетку на систему *проволочки-мембрана* и вычислить плотность газа и концентрацию тяжелого вещества в смежных с уровнем $z = 0$ ячейках, которые пересекаются мембраной. При этом соответствующие вычисления можно выполнить только для сетки с $h = 0,5$ мм, так как шаг $h = 1$ мм практически равен расстоянию между проволочками (1010 мкм) и все смежные с поверхностью разрыва ячейки будут находиться в одинаковых условиях.

Вычисления начальных плотностей и концентраций были выполнены для равномерной сетки с $h_x = h_y = h_z = 0,5$ мм. При этом во всех ячейках, примыкающих к поверхности $z = 0$ слева ($-0,5 < z < 0$), задана массовая концентрация $C = 1$ и плотность $\rho = 6,037$ мг/см³. В ячейках, характеризующихся по координатам x и y индексами i ($1 \leq i \leq 160$) и j ($1 \leq j \leq 160$) и примыкающих к этой поверхности справа ($0 < z < 0,5$), задаются следующие значения плотности ρ и массовой концентрации C :

- 1) если оба индекса нечетные, то $\rho = 1,7573$ мг/см³, $C = 0,3970945$;
- 2) если индексы разной четности, то $\rho = 1,8560$ мг/см³, $C = 0,442328$;
- 3) если оба индекса четные, то $\rho = 1,9721$ мг/см³, $C = 0,489747$.

Три типа ячеек этого слоя отражают ситуацию, при которой в одном случае в ячейку попадают обе проволоочки, в другом — только одна, в третьем — проволоочки отсутствуют. Для сетки с другим шагом (например $h = 0,333$ мм, $N_x = N_y = 240$) значения ρ и массовой концентрации C должны быть пересчитаны. Рассмотренный тип начальных возмущений, имитирующий приблизительно реальный начальный прогиб мембраны для условий [1], назовем *Tun X*.

В выполненных ранее в РФЯЦ-ВНИИЭФ расчетах был отмечен факт слабого влияния числа счетных ячеек (рассматривались шаги $h = 0,5$ мм и $h = 0,333$ мм) и способа задания возмущений на результаты расчета. Начальные возмущения моделировались с помощью генератора

случайных чисел в четырех слоях счетных ячеек, примыкающих к поверхности контактного разрыва со стороны воздуха. Именно, использовалась линейная интерполяция $\bar{\rho}(z)$ плотности от ρ_2 (воздух) до ρ_1 (SF₆) по координате z в четырех слоях и случайным образом в каждой ячейке к соответствующему значению $\bar{\rho}(z)$ прибавлялось или вычиталось значение $(\rho_1 - \rho_2)/5$, т. е. 20% скачка плотности на разрыве.

Отметим, что в первом слое такая процедура (при $h = 0,5$ мм) приводит в ряде ячеек к значению $\rho > \rho_1$, а в последнем, четвертом, слое — к значениям $\rho < \rho_2$, что физически не оправданно, так как вынуждает предполагать в этих ячейках температуру, иную, чем для окружающей среды. Кроме того, при формальном использовании указанной процедуры на сетке с $h = 0,5$ мм неравенство $\rho > \rho_1$ приводит к концентрации в этой ячейке тяжелого вещества, большей единицы, а при $\rho < \rho_2$ формально будет $C < 0$. Заметим, что при "размазывании" на два слоя с $h = 1$ мм такого явления уже не наблюдается и во всех смешанных ячейках $\rho_2 < \rho < \rho_1$.

"Нефизичности" начальных данных в этом способе задания возмущений легко избежать, если рассмотреть (по меньшей мере в крайних слоях) $\delta\rho = (\rho_1 - \rho_2)/10$ (10% амплитуды возмущения плотности). В описанных здесь расчетах преимущественно использовался именно такой способ создания начальных возмущений, который был назван *Tun Y*. При этом возмущения задавались всегда на отрезке $0 \leq z \leq 2$ мм, т. е. в двух слоях — для сетки с $h = 1$ мм, в четырех — для сетки с $h = 0,5$ мм и в шести — для сетки с $h = 0,333$ мм.

Наконец, следуя [1–4], для моделирования можно также рассмотреть регулярное возмущение КГ вида $z = f(x, y) = -\left(\frac{a_0}{4}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} y\right)$. Здесь всегда $z \leq 0$, a_0 — амплитуда возмущения (0,08 мм), $\lambda = 1$ мм примерно соответствует шагу сетки проволочек. Плотности и концентрации газов в смешанных ячейках вычисляются путем соответствующего интегрирования функции $f(x, y)$. Отметим, что такое рассмотрение возможно лишь при $h \leq 0,333$ мм. При $h = 0,5$ мм или $h = 1$ мм во всех смешанных ячейках плотности и концентрации окажутся одинаковыми. На данном этапе исследований описанный способ задания возмущений, названный *Tun Z*, не использовался.

Приведем теперь конкретные постановки задач для расчетов на сетках с $h = 1$ мм и $h = 0,5$ мм.

1. *Проверка влияния геометрических размеров трубы.* Рассматривались сетки с небольшим размером ячеек ($h = 1$ мм). Задача рассчитывалась для сечений трубы 8×8 см (расчет T1) и 4×4 см (расчет T2). Результат представляет интерес, так как ранее в РФЯЦ-ВНИИЭФ расчеты были проведены для сечения 5×5 см, отличающегося от данных [1]. В расчетах T1 и T2 использовались начальные данные *Tun Y* и брались $z_{\min} = -100$ мм, $z_{\max} = 300$ мм. Счетная сетка в расчете T1 имела $80 \times 80 \times 400$ ячеек, в расчете T2 — $40 \times 40 \times 400$. Напомним, что начальные возмущения в этих расчетах задаются в двух слоях ячеек, т. е. в области $0 \leq z \leq 2$ мм.
2. *Изучение влияния способа задания возмущений* осуществлялось при сравнении двух расчетов с учетом только 1-го датчика, т. е. $z_{\min} = -20$ мм, $z_{\max} = 60$ мм. В обоих расчетах рассматривались одинаковые сетки с $h = 0,5$ мм и одно и то же сечение трубы 8×8 см, т. е. обе сетки имели $160 \times 160 \times 160$ ячеек. Для расчета T3 брались начальные данные *Tun Y*, для T4 — *Tun X*. В расчете T3 использовалось четыре возмущенных слоя (та же область $0 \leq z \leq 2$ мм), в T4 возмущения имелись только в одном слое ячеек.
3. *Влияние шага сетки* (на примере 1-го датчика) можно увидеть из сопоставления результатов расчетов T1 и T3.
4. *Влияние уровня начальной амплитуды* в данных *Tun Y* проверялось с помощью расчета T5, отличающегося от T3 только тем, что возмущения брались с 10, а не 20%-м (как в T3) уровнем: $\delta\rho = (\rho_1 - \rho_2)/10$.

Результаты расчетов первой серии. Основные характеристики развивающейся ЗТП

Сначала сравним результаты расчетов для различных поперечных сечений ударной трубы. Это расчеты T1 и T2, выполненные с начальными возмущениями *Tun Y* с 20%-ми вариациями плотности от фонового значения (результаты линейной интерполяции плотности от ρ_1 до ρ_2 на

длине 2 мм). Как было отмечено выше, в этом случае ($h = 1$ мм) возмущенная плотность находится в пределах от ρ_1 до ρ_2 .

Прежде всего было проведено сравнение расчетной ширины ЗТП с экспериментальными данными [1]. Для этого во всех расчетах настоящей работы использовалось определение границ ЗТП по 2%-му изменению средней по сечению массовой концентрации тяжелого газа. Оказалось, во-первых, что на динамику роста ширины ЗТП не влияют размеры поперечного сечения трубы (линии границ зоны в расчетах Т1 и Т2 слились); во-вторых, результаты расчетов, полученные на грубой сетке с $h = 1$ мм для 20%-х возмущений $Tun Y$ уже неплохо согласуются с экспериментом.

На рис. 1,а представлены результаты расчетов Т1 и Т2, (совпадающие) для 1-го и 2-го датчиков в сопоставлении с измерениями [1] (для 2-го датчика указан уровень $\sim 16 \text{ м}^2/\text{с}^2$, ниже которого измерения не могли быть выполнены). На рис. 1,б приведены результаты расчетов Т1 и Т2 для 3, 4 и 5-го датчиков также в сопоставлении с данными эксперимента [1], которые изображены, как и на рис. 1,а, вертикальными отрезками. Видно, что результаты для 1-го датчика, полученные на сетке с $h = 1$ мм при указанном типе начальных возмущений, оказались занижены почти на порядок, а для 3-го датчика — завышены примерно вдвое. Расчетный уровень пульсаций на 5-м датчике согласуется с экспериментом, но достигается немного раньше (примерно на 80 мкс).

Сравним теперь результаты расчетов Т3 и Т4, отличающиеся видом задания начальных возмущений. На рис. 2 эти результаты приведены для 1-го датчика. Видно, что начальные возмущения $Tun X$ выглядят неудовлетворительно с точки зрения воспроизведения уровня пульсаций, измеренных в эксперименте: их амплитуда явно недостаточна. По-видимому, это связано с двумя обстоятельствами:

- 1) при прорыве УВ мембраны в эксперименте происходит дополнительная турбулизация зоны контактного разрыва, заметно превышающая уровень перемешивания, связанный с первоначальным прогибом мембраны;
- 2) на использованной в расчетах грубой сетке не удастся воспроизвести с достаточной точностью регулярные начальные возмущения, описанные в [1–4].

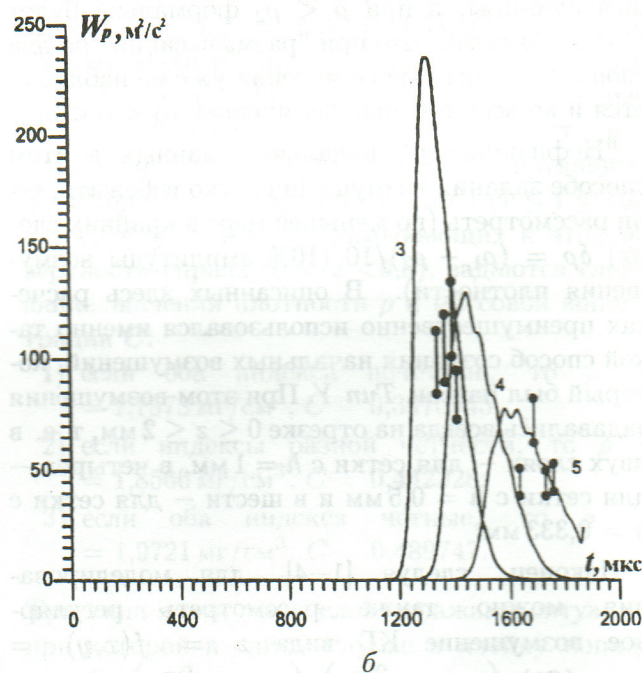
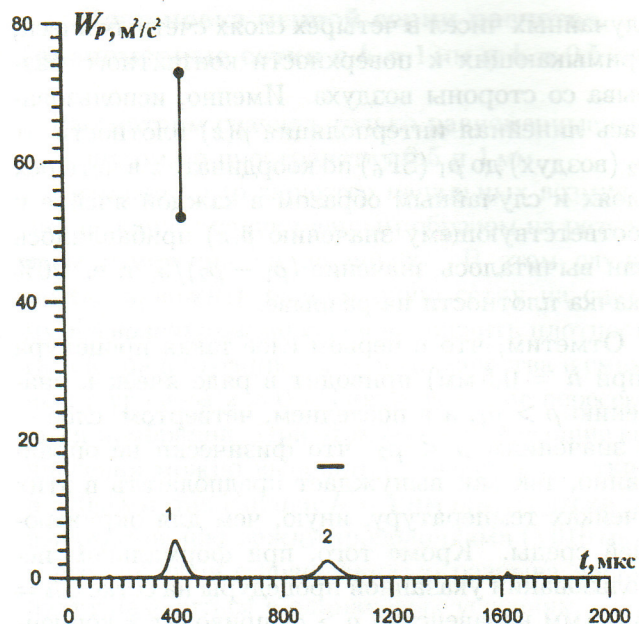


Рис. 1. Сравнение результатов расчетов Т1 и Т2 с данными экспериментов [1]: а — для 1-го и 2-го датчиков; б — для 3, 4 и 5-го датчиков

Рассмотрим теперь на примере расчета для 1-го датчика влияние подробности сетки на результаты. Для этого сопоставим расчеты Т1 ($h = 1$ мм) и Т3 ($h = 0,5$ мм), выполненные для начальных данных $Tun Y$ с 20%-ми возмущениями плотности. Соответствующие результаты приведены на рис. 3. Видно, что уровень pulsa-

ций примерно одинаков, однако на грубой сетке пик пульсаций в большей степени "размазан" по времени.

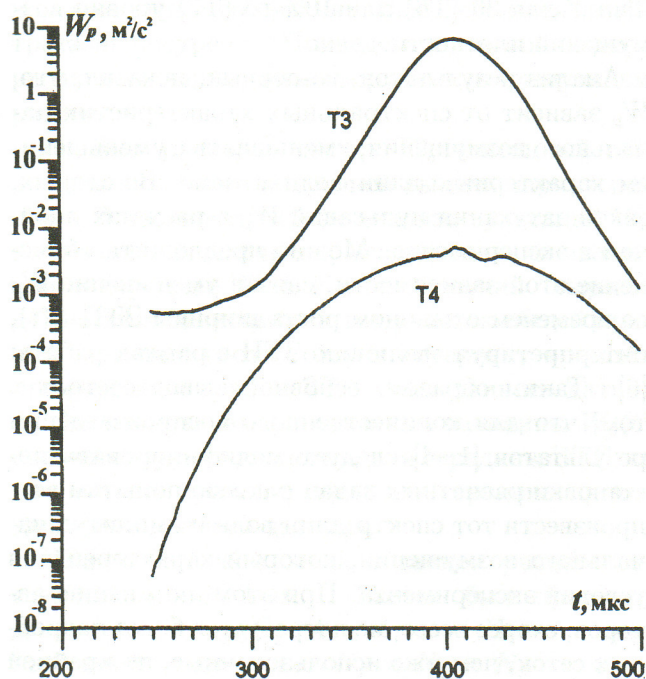


Рис. 2. Результаты расчетов T3 ($T_{un} Y$) и T4 ($T_{un} X$) для 1-го датчика

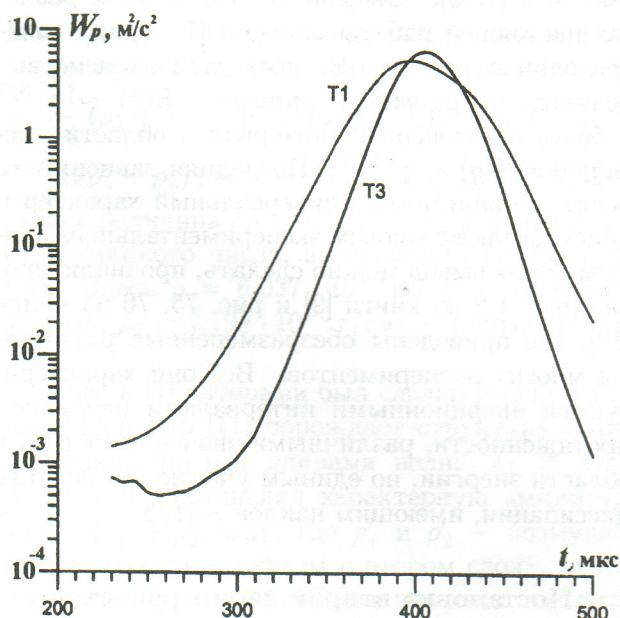


Рис. 3. Результаты расчетов с разным шагом сетки: $h = 0,5$ мм (T3) и $h = 1$ мм (T1) для 1-го датчика

Выше было сказано, что в расчете T3 ($h = 0,5$ мм) при аппроксимации перехода *элегаз-воздух* на четырех счетных слоях формально оказывается, что концентрация $C < 0$ или $C > 1$ в отдельных ячейках, если рассматриваются 20%-е вариации плотности. Тем не менее модифицированная для расчета газов с различными показателями адиабаты программа [5] может безаварийно считать и в таких ситуациях. Вместе с тем во избежание подобных нефизичных ситуаций был рассмотрен вариант T5 с начальными возмущениями $T_{un} Y$, но с 10%-й вариацией плотности и шагом $h = 0,5$ мм (как T3).

Сравнение результатов расчетов T3 и T5 (влияние уровня начальных возмущений) приведено на рис. 4 на примере 1-го датчика. Видно, что уровень начальных возмущений заметно влияет на результаты расчета при постановке $T_{un} Y$. Максимум пульсаций оказывается примерно втрое ниже. Отметим также, что экспериментальная ширина пиков пульсаций продольной скорости на датчиках примерно вдвое-втрое меньше, чем наблюдается в расчетах на сетке с $h = 1$ мм, но расчетная ширина пиков уменьшается с уменьшением шага сетки (см. рис. 3). Ширина пика пульсаций отражает ширину ЗТП, так как датчик фиксирует пульсации скорости в те моменты времени, когда ЗТП проходит мимо его местоположения. На основании расчетов,

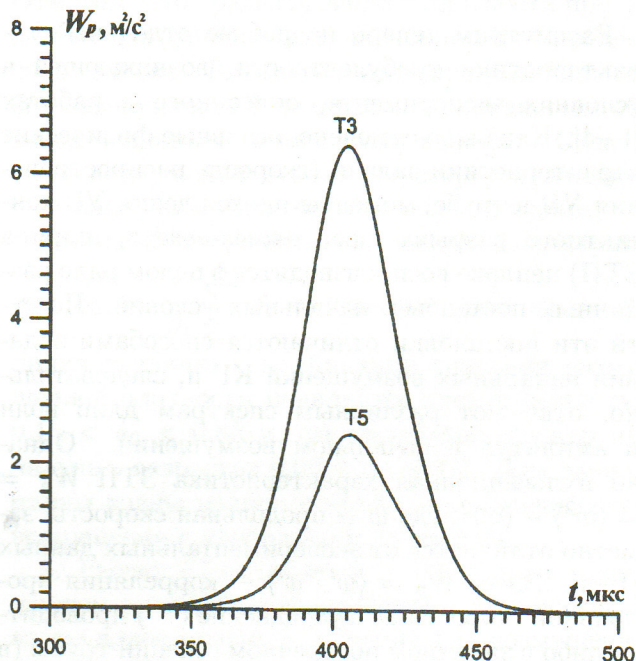


Рис. 4. Влияние уровня начальных возмущений плотности. Результаты расчетов T3 (20%-й уровень) и T5 (10%-й уровень) для 1-го датчика

выполненных на сетках с $h = 1$ мм и $h = 0,5$ мм, можно сделать следующие выводы:

1. Для удовлетворительного воспроизведения экспериментальных данных [1] вполне достаточно проводить расчеты в области с размерами $0 \leq x \leq 80$ мм, $0 \leq y \leq 80$ мм, $-100 \leq z \leq 300$ мм; при этом до прихода УВ на КГ в зоне раздела газов не возникает каких-либо возмущений численного характера.
2. Размеры поперечного сечения трубы не оказывают заметного влияния на результаты расчетов.
3. Тип задания и величина начальных возмущений плотности заметно сказываются на результатах расчетов.
4. Для приближения результатов расчета к экспериментальным данным следует уменьшить шаг сетки ($h = 0,333$ мм) и сохранить уровень начальных возмущений в переходном слое (20%-е вариации плотности с дополнительным требованием $0 \leq C \leq 1$).
5. Расчеты можно проводить для сечения трубы 4×4 см, что позволит в 4 раза сократить общее число счетных ячеек.

Цели и задачи дальнейшего исследования

Рассмотрим теперь подробнее отдельные характеристики турбулентности, возникающей в условиях эксперимента, описанного в работах [1–4]. Как было отмечено, основные физические характеристики задачи (скорость распространения УВ в трубе, моменты прохождения УВ контактного разрыва газов *элегаз-воздух*, ширина ЗТП) неплохо воспроизводятся в целом ряде различных постановок начальных условий. По сути эти постановки отличаются способами задания начальных возмущений КГ и, следовательно, отвечают различным спектрам длин волн и амплитуд в начальном возмущении. Однако пульсационная характеристика ЗТП $W_p = \langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2$, где w — продольная скорость, заметно отличается от экспериментальных данных [1–4]. Здесь $W_p = \langle w' \cdot w' \rangle$ — корреляция продольной скорости w , а усреднение $\langle \dots \rangle$ проводится либо в заданном поперечном сечении трубы (в местах расположения датчиков LDA), либо в середине ЗТП, т. е. в каждый момент времени в различных соответствующих сечениях.

Дальнейший анализ основан на результатах описанного выше расчета Т2 и новых расчетов Т6 и Т7, выполненных на более подробной сетке ($h = 0,333$ мм) с начальными возмущениями $Tun Y$ для 20 (Т6) или 10%-го (Т7) уровня возмущений плотности.

Анализ результатов, во-первых, показал, что, W_p зависит от спектральных характеристик начального возмущения, уменьшаясь с уменьшением характерных длин волн в нем. Во-вторых, закон затухания пульсаций W_p в расчетах иной, чем в эксперименте. Можно предложить объяснение этой зависимости, связав уменьшение W_p со временем с законом роста ширины ЗТП $L(t)$, интерпретируя эволюцию ЗТП в рамках работы [6]. Таким образом, основной вывод состоит в том, что для количественного воспроизведения результатов [1–4] следует модифицировать постановки расчетных задач с целью попытки воспроизвести тот спектр длин волн и амплитуд начального возмущения, который характерен для условий эксперимента. При этом, по мнению авторов, скорее всего, не потребуется более подробных сеток, чем уже использованные, по крайней мере, по порядку величины шага сетки.

Кроме того, для выполненных трех расчетов (Т2, Т6, Т7) был проанализирован спектр кинетической энергии $E(q)$ по модулю q волнового вектора в соответствии с процедурой, описанной в [7, 8]. Оказалось, что во всех расчетах настоящей работы, как и в [7, 8], вид спектра один и тот же. Во всех случаях ясно выделяется *инерционный интервал* $E(q) \sim q^{-5/3}$ и более протяженный интервал в области диссипации $E(q) \sim q^{-11/3}$. Последняя зависимость носит, по-видимому, универсальный характер и присуща также многим экспериментальным данным. Этот вывод можно сделать, проанализировав рис. 1.2 из книги [9] и рис. 75, 76 из книги [10], где приведены обезразмеренные результаты многих экспериментов. Все они характеризуются инерционными интервалами различной протяженности, различными значениями $E(q)$ в области энергии, но единым участком в области диссипации, имеющим наклон $-11/3$.

Постановка второй серии расчетов (равномерные сетки с $h = 0,333$ мм)

Выше был сделан вывод о том, что расчеты можно проводить для поперечных сечений трубы, вдвое меньших, чем в эксперименте, и при

постановке начального положения УВ в элегазе вблизи КГ. Это позволило сократить общее число ячеек и выполнить расчеты с шагом по пространству $h = 0,333$ мм на многопроцессорном комплексе со сравнительно небольшими затратами ресурсов. Приведем здесь постановки расчетных задач, анализируемых в следующем разделе.

1. Был повторен расчет Т2, описанный выше, с целью более подробной выдачи характеристик. В частности, кроме анализа пульсаций W_p на отдельных датчиках, исследовали их эволюцию в середине ЗТП. Каждый датчик "вырезает" из этой зависимости тот участок общей кривой, который соответствует интервалу времени прохождения границ ЗТП мимо данного датчика. Максимум замера датчиком величины $W_p(t)$ соответствует ее значению для середины ЗТП на тот момент времени, когда эта середина проходит мимо данного датчика.

Шаг кубической сетки в данном расчете составляет $h = 1$ мм. Расчет был проведен для сечения трубы 4×4 см. Число счетных ячеек составляло $N_x \times N_y \times N_z = 40 \times 40 \times 400 = 0,64 \cdot 10^6$; область расчета: $0 < x < 40$ мм, $0 < y < 40$ мм, $-100 < z < 300$ мм. Начальное положение УВ $z_{SW} = -5$ мм.

В соответствии с [9] возмущения создавались в области $0 < z < 2$ мм, т. е. в двух слоях. В каждом из них к линейно интерполированному значению плотности $\bar{\rho}_1 = \frac{1}{4}(\rho_1 + 3\rho_2)$ в верхнем слое или $\bar{\rho}_2 = \frac{1}{4}(3\rho_1 + \rho_2)$ в нижнем прибавлялась или вычиталась величина $\delta\rho = 0,2(\rho_1 - \rho_2)$ в зависимости от случайного числа, выдаваемого генератором [11]. Здесь $\rho = 6,037 \cdot 10^{-3}$ г/см³ — плотность элегаза, $\rho_2 = 1,198 \cdot 10^{-3}$ г/см³ — плотность воздуха.

Ранее в [7] авторами был сделан вывод о том, что генератор [11] порождает структуру с двумя характерными длинами волн: $\lambda_1 \cong 4h$ и $\lambda_2 \cong 10h$. Вычисляя характерную амплитуду $a_0 = (\rho'_1 + \rho'_2)h/\rho_1$, где ρ'_1 и ρ'_2 — возмущенные плотности в первом и втором слоях, можно получить $a_0 \approx 0,3h$. Такое значение амплитуды получается только в том случае, если в обоих слоях $\delta\rho$ либо прибавляется, либо вычитается. В противном случае (в одном слое $\delta\rho$ прибавляется, в другом — вычитается) сумма плотностей по слоям остается той же, что была до

внесения возмущений. Данный спектр характеризуется практически отсутствием зависимости амплитуды от длины волны. Вместе с тем начальный возраст возмущения $\alpha_0 = 2\pi a_0/\lambda$ имеет спектральную зависимость $\alpha_0 \sim \lambda^{-1}$ и лежит в диапазоне $0,2 \leq \alpha_0 \leq 0,5$.

2. Расчет Т6 был выполнен на кубической сетке $h = 0,333$ мм. Размеры счетной области были взяты такими же, как в случае Т2: $0 < x < 40$ мм, $0 < y < 40$ мм, $-100 < z < 300$ мм. Число счетных ячеек $120 \times 120 \times 1200 = 5,76 \cdot 10^6$. Начальное положение УВ $z_{SW} = -3$ мм.

Для расчета Т6 использовалось 270 процессоров, каждый из которых обслуживал кубическую часть сетки $40 \times 40 \times 40$. Таким образом, по длине труба была разбита на 30 слоев, с каждым из которых работали 9 процессоров.

Начальные возмущения создавались следующим образом. Для такого же, как в Т2, промежутка $0 < z < 2$ мм выбор возмущенной плотности ρ'_i осуществлялся в каждом из шести слоев, составляющих этот промежуток. В этих шести слоях к линейно интерполированному значению $\bar{\rho}_i = \rho_1 \frac{(13-2i)}{12} + \rho_2 \frac{(2i-1)}{12}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$ — номер слоя) случайным образом [11] прибавлялась или вычиталась величина $\delta_{0i}(\rho_1 - \rho_2)$, где $\delta_{0i} = 0,2$ для $i = 2, 3, 4, 5$ и $\delta_{01} = \delta_{06} = 0,08$, так чтобы всегда иметь $\rho'_1 < \rho_1$ и $\rho'_6 > \rho_2$, где $\rho'_i = \bar{\rho}_i \pm \delta_{0i}(\rho_1 - \rho_2)$ — возмущенная плотность. Отметим, что "разыгрывание" плотности проводилось для данного слоя на каждом из 9 процессоров заново. Тем самым слой представляет собой совокупность 9 квадратов с одинаковым образом заданными в них возмущениями. Спектр длин возмущений ограничен сверху значением ~ 19 мм (размер диагонали такого квадрата).

Вычисление эффективных амплитуд возмущения $a_0 = \frac{h}{\rho_1} \sum_{i=1}^6 \rho'_i$ показывает, что из-за наличия различных комбинаций создания возмущенной плотности появляется спектр амплитуд $0,1h < a_0 < 0,8h$ и, следовательно, спектр начальных возрастов $0,06 \leq \alpha_0 \leq 1,2$. Для данной длины волны наиболее интенсивно развиваются возмущения с наибольшим возрастом.

3. Расчет Т7 отличается от Т6 только уменьшением амплитуды возмущений. Именно, были взяты вдвое меньшие значения для возмущений плотности $\delta_{0i}(\rho_1 - \rho_2)$ в шести слоях: $\delta_{0i} = 0,1$ для $i = 2, 3, 4, 5$ и $\delta_{01} = \delta_{06} = 0,04$. Тем самым спектр длин волн и распределение амплитуд воз-

мушений по длинам волн такие же, как в Т6, но сами амплитуды вдвое меньше, диапазон изменения начальных возрастов $0,03 \leq \alpha_0 \leq 0,6$.

Общая характеристика результатов расчетов второй серии

Общий вид динамики ЗТП ((z,t)-диаграмма движения границ зоны) представляется сходным во всех расчетах и близким к экспериментально наблюдаемому. На рис. 5 представлена эволюция границ ЗТП для расчета Т6 в сопоставлении с экспериментом.

Однако более детальный анализ роста ширины ЗТП $L(t)$ от времени выявляет заметные различия. На рис. 6 приведена эволюция ширины ЗТП в расчетах. Видно, что уменьшение амплитуды возмущений (оценка максимальной амплитуды для Т2 $a_0 \cong 0,3h \cong 0,3$ мм, для Т6 $a_0 \cong 0,8h \cong 0,27$ мм, для Т7 $a_0 \cong 0,14$ мм) приводит к снижению ширины ЗТП. Можно сделать вывод, что в промежутках времени между моментами прохода УВ через ЗТП ширина зоны следует закону $L \sim t^k$ или $L = L_0 + A(t - t_0)^k$, $k < 1$. Здесь $L_0 = L(t_0)$, t_0 — момент, соответствующий минимуму ширины ЗТП.

Эволюция ширины ЗТП имеет три стадии. Первая стадия $t_1 < t < t_2$ соответствует промежутку времени между моментом максимального сжатия первичной УВ и моментом максимального сжатия УВ, отраженной от торца

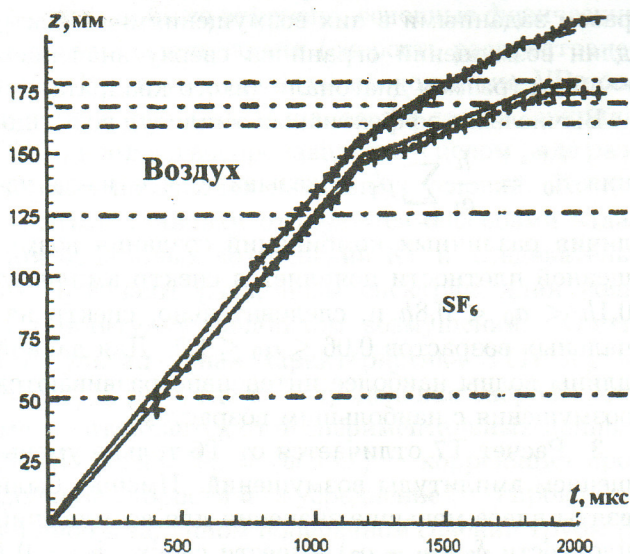


Рис. 5. (z,t)-диаграмма движения границ ЗТП: — — результаты расчета Т6; + — эксперимент [1]

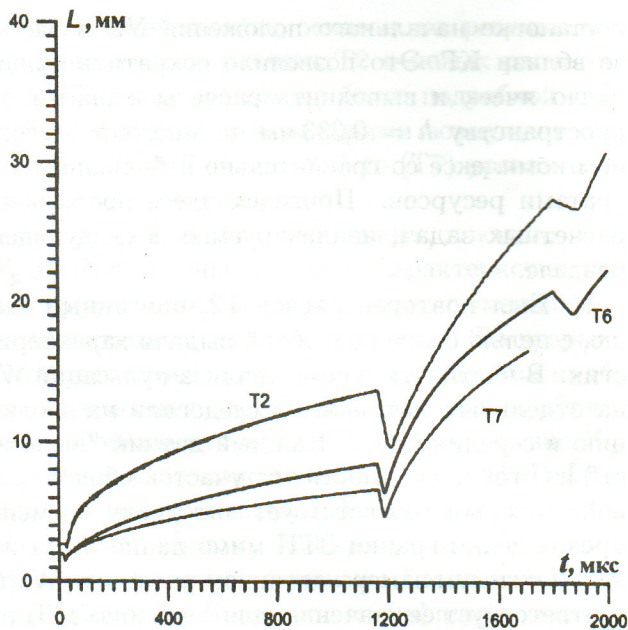


Рис. 6. Зависимость ширины ЗТП от времени в расчетах Т2, Т6 и Т7

$z = 300$ мм. Вторая стадия отвечает промежутку времени $t_2 < t < t_3$ максимального сжатия, вызванного вторично отраженной от торца УВ, третья — промежутку $t > t_3$. Соответствующие моменты времени в расчетах суть $t_1 = 28$ мкс, $t_2 = 1210$ мкс, $t_3 = 1876$ мкс (Т2); $t_1 = 22$ мкс, $t_2 = 1188$ мкс, $t_3 = 1877$ мкс (Т6) и $t_1 = 22$ мкс, $t_2 = 1188$ мкс, $t_3 = 1876$ мкс (Т7). Для экспериментальных данных можно принять $t_1 = 0$, $t_2 = 1167$ мкс, $t_3 = 1858$ мкс.

Зависимость $L(t)$ для расчетов Т2, Т6 и Т7 в логарифмическом масштабе с соответствующим сдвигом (на t_1 для первой стадии, на t_2 — для второй) изображена на рис. 7,а (первая стадия) и рис. 7,б (вторая стадия). Видно, что аппроксимация $L \sim (t - t_0)^k$ с $0,3 < k < 0,5$ неплохо подходит для обеих стадий, причем k слабо меняется при переходе от первой стадии ко второй. Анализ экспериментальных данных [1] не позволяет достаточно уверенно определить k , однако видно (см. рис. 5), что на первой стадии ширина $L(t)$ в эксперименте растет слабо ($k < 0,3$), а на второй — заметно сильнее ($k > 0,6$).

Обратимся теперь к анализу закона затухания пульсаций $W_p(t)$. Первая стадия эволюции ($t_1 < t < t_2$) представлена данными 1-го и 2-го датчиков (51 и 125,5 мм), вторая — ($t_2 < t < t_3$) — 3, 4 и 5-го (161, 169 и 178,5 мм), третья ($t > t_3$) — только 5-го (178,5 мм [4]). Закон затухания пульсаций в ЗТП $W_p(t)$ так-

же может быть аппроксимирован выражением $W_p(t) = B(t - t_0)^{-m}$, где уже из размерных соображений $W_p \sim \left(\frac{dL}{dt}\right)^2 \sim \left(\frac{L}{t}\right)^2 \sim (t - t_0)^{2k-2}$, т. е. $m = 2 - 2k$. Такое простое представление не учитывает доли возмущений с разными длинами волн в исходном спектре, от которой зависит, с каким весом амплитуды $a_i(t)$ различных возмущений складываются в $L(t)$, а величи-

ны $\left(\frac{da_i}{dt}\right)^2$ — в $W_p(t)$. Вообще говоря, простое соотношение $m = 2 - 2k$ должно быть скорректировано с учетом доли возмущений различных длин волн в спектре. Общий вид изменения интенсивности пульсаций W_p со временем показан на рис. 8 в сопоставлении с экспериментальными данными [1] для расчета Т6.

Рассмотрим теперь динамику затухания пульсаций в середине ЗТП. С этой целью был повторен расчет Т2. Зависимость интенсивности пульсаций в середине ЗТП для этого расчета представлена на рис. 9,а (первая стадия) и рис. 9,б (вторая стадия). По наклону кривых на графиках можно сделать вывод, что в этом расчете соответственно $m \cong 0,8$ и $m \cong 1,0$.

Кроме анализа пульсаций в середине ЗТП, можно обратиться к измерениям датчиков. Будем считать, что максимум пульсаций W_p фиксируется датчиком в момент прохождения через соответствующее ему сечение середины ЗТП. Тогда, сопоставляя максимумы пульсаций W_p , измеренные разными датчиками в соответствующие моменты времени, можно сделать вывод о законе затухания пульсаций в ЗТП. Для второй стадии процесса такую динамику затухания демонстрирует рис. 10, на основании которого можно сделать заключение о величине m .

Совокупные значения W_p и L на моменты прохождения ЗТП каждого из пяти датчиков приве-

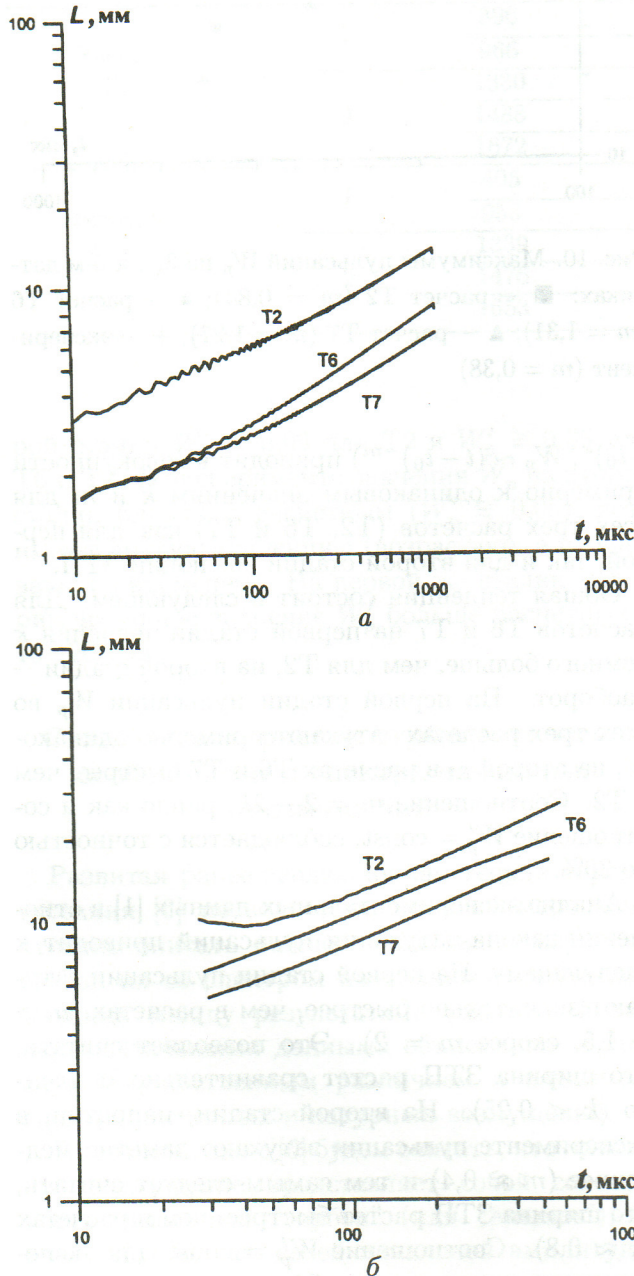


Рис. 7. Эволюция ширины ЗТП в расчетах Т2, Т6 и Т7: а — на первой стадии процесса; б — на второй стадии

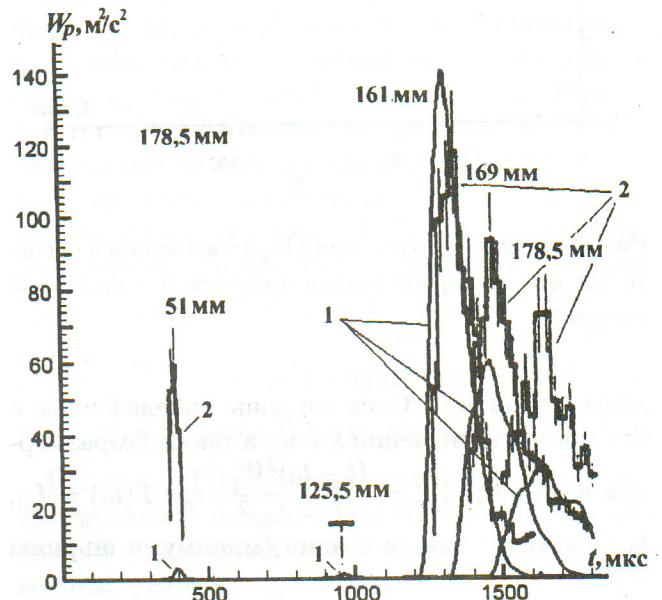


Рис. 8. Пульсации W_p в зависимости от времени для расчета Т6 в сравнении с экспериментальными данными [1]: 1 — расчет; 2 — эксперимент

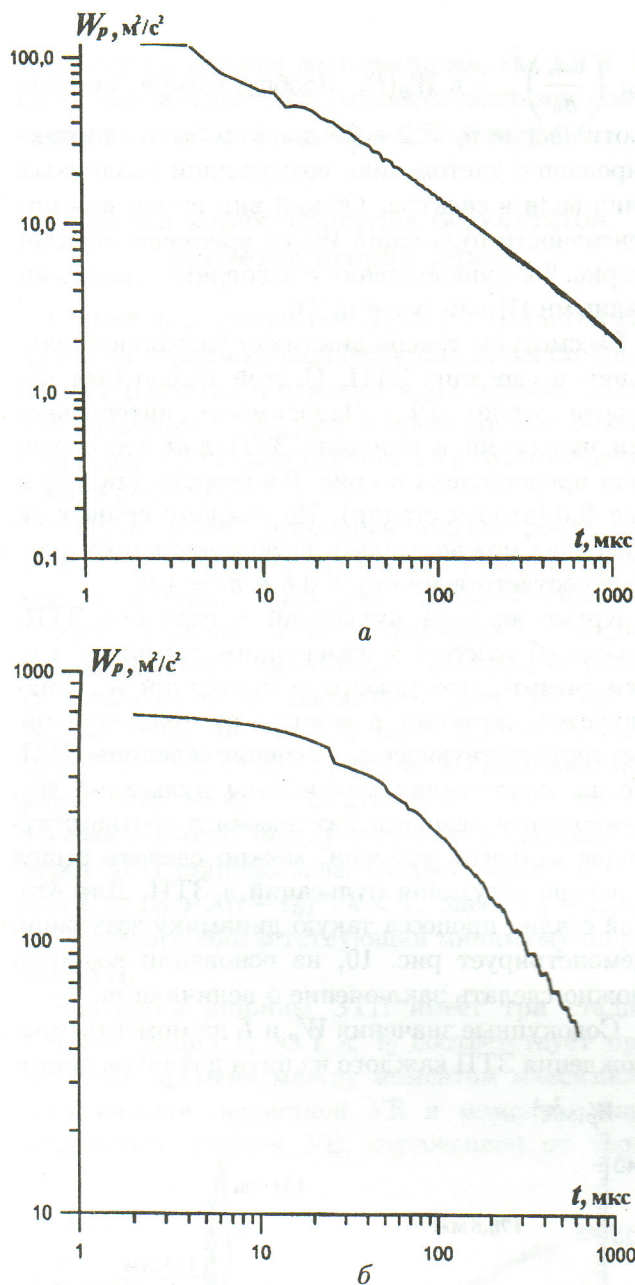


Рис. 9. Затухание пульсаций W_p со временем в расчете T2: а — на первой стадии процесса; б — на второй стадии

дены в таблице. Здесь же даны определенные в эти моменты значения k и m , а также безразмерной величины $W'_p = \frac{(t - t_0)^2 W_p}{(L - L_0)^2}$, где $L(t_0) = L_0$, t_0 — момент начала стадии (минимума ширины ЗТП).

Видно, что различные приемы обработки расчетных зависимостей ширины ЗТП L и интенсивности пульсаций W_p от времени (построение графиков в логарифмическом масштабе, подбор коэффициентов в аппроксимациях $L - L_0 \sim (t -$

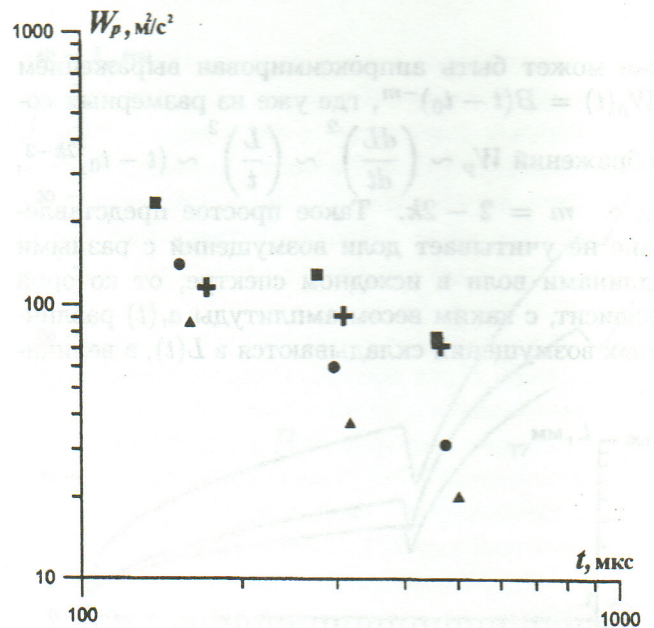


Рис. 10. Максимумы пульсаций W_p на 3, 4 и 5-м датчиках: ■ — расчет T2 ($m = 0,84$); ● — расчет T6 ($m = 1,31$); ▲ — расчет T7 ($m = 1,27$); + — эксперимент ($m = 0,38$)

$-t_0)^k$, $W_p \sim (t - t_0)^{-m}$) приводят в совокупности примерно к одинаковым значениям k и m для всех трех расчетов (T2, T6 и T7) как для первой, так и для второй стадии эволюции ЗТП.

Общая тенденция состоит в следующем. Для расчетов T6 и T7 на первой стадии значения k немного больше, чем для T2, на второй стадии — наоборот. На первой стадии пульсации W_p во всех трех расчетах затухают примерно одинаково, на второй — в расчетах T6 и T7 быстрее, чем в T2. Соотношение $m = 2 - 2k$, равно как и соотношение $W'_p = \text{const}$, соблюдается с точностью до 30%.

Анализ экспериментальных данных [1] в отношении закона затухания пульсаций приводит к следующему. На первой стадии пульсации затухают значительно быстрее, чем в расчетах ($m > 1,5$, скорее $m = 2$). Это позволяет считать, что ширина ЗТП растет сравнительно медленно ($k < 0,25$). На второй стадии, напротив, в эксперименте пульсации затухают заметно медленнее ($m \approx 0,4$) и тем самым следует считать, что ширина ЗТП растет быстрее, чем в расчетах ($k \approx 0,8$). Соотношение $W'_p = \text{const}$ для экспериментальных данных соблюдается с точностью до 20%.

Отметим, что численные значения W'_p для расчетов близки. Так, на первой стадии $W'_p \approx 0,02 \div 0,03$ для всех трех расчетов. На вто-

Результаты расчетов и экспериментальные данные на моменты прохождения ЗТП датчиков

Источник данных	Стадия	$t, \text{мкс}$	$W_p, \text{м}^2/\text{с}^2$	$L, \text{мм}$	k	m	W'_p
Расчет Т2	1	396	5,34	8,89	0,505	0,861	0,0172
		964	2,39	12,80			0,0193
		1308	235,1	14,11			0,115
	2	1446	129,5	18,79	0,820	0,678	0,087
		1628	77,17	23,67			0,069
							0,906
Расчет Т6	1	396	3,07	5,277	0,558	1,054	0,0300
		964	1,16	7,830			0,0256
		1318	140,6	12,39			0,0673
	2	1462	60,05	15,98	0,634	1,14	0,0496
		1640	31,36	18,77			0,0422
							1,30
Расчет Т7	1	396	1,17	4,379	0,525	0,964	0,0193
		966	0,479	6,202			0,0190
		1330	85,70	10,01			0,0625
	2	1488	37,10	13,45	0,673	1,12	0,0441
		1672	20,05	16,16			0,0361
							1,29
Экспери- мент	1	405	60,4	4,88	< 0,25	> 1,5	0,416
		953	< 16	9,77			—
		1339	117,5	15,88			0,0475
	2	1476	92,5	19,54	≈ 0,8	≈ 0,4	0,0592
		1653	73,0	23,21			0,0684

рой стадии $W'_p \cong 0,09$ для Т2 и $W'_p \cong 0,05$ для Т6 и Т7. В эксперименте значения W'_p на второй стадии близки к расчетным ($W'_p \cong 0,06$), хотя имеют другую тенденцию (возрастают, а не убывают со временем). На первой же стадии экспериментальное значение W'_p больше расчетных в 15–20 раз.

Связь характеристик турбулентности с особенностями спектра начальных возмущений

Развитая ранее эволюционная теория перемешивания [6] позволяет по крайней мере качественно описать наблюдаемые закономерности, связав их со спектром начальных возмущений. Разница между результатами расчетов и экспериментальными данными объясняется в этом случае существенным различием в начальном спектре расчетных и натуральных возмущений.

В соответствии с [6] будем считать, что начальное возмущение представляет собой совокупность отдельных "горбов" (или "впадин"), характеризующихся своей начальной амплитудой a_{0i} и длиной волны λ_i .

Основная идея [6] состоит в том, что каждое возмущение развивается независимо, а эволюция амплитуды в случае неустойчивости Рихтмайера–Мешкова происходит следующим

образом. Быстрый вначале рост амплитуды (при $\alpha_{0i} = \frac{2\pi}{\lambda_i} a_{0i} < 1$) сменяется нелинейной асимптотической стадией по достижении данной структуры "критического возраста" α_* . При этом соответствующая амплитуда $a_{*i} = \frac{\lambda_i}{2\pi} \alpha_*$. Таким образом, в упрощенной эффективной модели [6] предполагается, что эволюцию амплитуды можно представить как линейный рост на начальной стадии $a_i = a_{0i} + \alpha_{0i} u_* A_* t$, пока $a_i < a_{*i}$. В дальнейшем $a_i = a_{*i}$ остается постоянной. Здесь u_* и A_* суть соответственно скорость КГ и число Атвуда; a_{0i} и α_{0i} — амплитуда и возраст возмущения после прохождения УВ. Время t_* , т. е. время достижения критического возраста, можно оценить по формуле $t_{*i} = \frac{a_* - a_{0i}}{\alpha_{0i} u_* A_*} \cong \frac{a_*}{\alpha_{0i} u_* A_*} = \frac{\alpha_*}{\alpha_{0i}} \frac{\lambda_i}{2\pi u_* A_*}$. По результатам работы [6] для пары газов *элегаз-воздух* можно оценить $\alpha_* \cong 20$.

Ширина ЗТП $L(t)$ в момент времени t в рассматриваемой модели соответствует наибольшей из $a_i(t)$ для разных возмущений. Здесь принимается, что возмущение с длиной волны λ_i может привести к ширине ЗТП, не большей, чем $\frac{\lambda_i}{2\pi} \alpha_*$, т. е. сначала (при близких значениях α_{0i}) зону формируют коротковолновые возмущения, позднее — длинноволновые.

Легко заметить, что, так как скорость $\frac{da_i}{dt} = \alpha_{0i} u_* A_*$ пропорциональна начальному возрасту, возмущения с большим α_{0i} растут быстрее. Если начальный возраст возмущений одинаков, то ширина ЗТП в модели [6] растет пропорционально пройденному пути S ($L = \alpha_0 u_* A_* t$, $S = u_* t$). В расчетах, как показывает рис. 6, это не так. По-видимому, и в эксперименте $L \sim t^k \sim S^k$, $k < 1$.

Соответствующее значение $k < 1$ может быть получено в рамках модели [6], если допустить определенную зависимость начальной амплитуды от длины волны, т. е. наличие спектра $a_0(\lambda) = a_0(\lambda_0) \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^b$, где λ_0 и b — размерная и безразмерная постоянные. При этом $\alpha_0(\lambda) = \alpha_0(\lambda_0) \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{b-1}$. Действительно, пусть в момент времени t зону формирует возмущение с длиной волны λ , тогда $L = \alpha_* \frac{\lambda}{2\pi}$, $t = \frac{\alpha_*}{\alpha_0} \times \frac{\lambda}{2\pi u_* A_*} = \frac{\alpha_*}{\alpha_0(\lambda_0) 2\pi u_* A_*} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{b-1}$. Выражая из последнего соотношения λ и подставляя в выражение для L , получаем $L = \frac{\alpha_*}{2\pi} \times \left(\frac{2\pi \alpha_0(\lambda_0) A_*}{\alpha_* \lambda_0^{b-1}}\right)^{\frac{1}{2-b}} (u_* t)^{\frac{1}{2-b}}$. Таким образом, показатель k в законе $L \sim (t - t_0)^k$ связан со свойствами спектра начальных возмущений $k = \frac{1}{2-b}$. Так, например, при $b = 0$ (постоянная амплитуда) имеем $k = 0,5$. Значения $k < 0,5$ получаются при $b < 0$, т. е. для спектров, амплитуда возмущений которых уменьшается с увеличением длины волны.

В расчетах (см. таблицу) на первой стадии получается $k \geq 0,5$, т. е. $b \geq 0$. В самом деле, как описано выше, способ построения начальных возмущений приводит к почти одинаковой амплитуде при разных длинах волн отдельных возмущений.

На второй стадии показатель k в расчетах уже находится в диапазоне $0,6 < k < 0,8$. Это соответствует амплитуде возмущения, растущей с длиной волны, $0,3 < b < 0,7$. Такая модификация спектра вполне объяснима. В самом деле, если бы до прихода отраженной от торца УВ все имеющиеся в начальном спектре возмущения достигли критического возраста, то спектр имел бы вид $a_i = \frac{\lambda_i}{2\pi} \alpha_*$, т. е.

$b = 1$ (и $k = 1$). Однако, видимо, наиболее длинноволновые возмущения не успевают достигнуть критического возраста α_* . Действительно, оценим время t_* достижения возмущением с длиной волны λ возраста α_* : $t_* = \frac{\alpha_* \lambda}{\alpha_0 2\pi u_* A_*}$. Используя оцененные выше значения начальных возрастов ($0,2 < \alpha_0 < 0,5$ для Т2, $0,06 < \alpha_0 < 1,2$ для Т6 и $0,03 < \alpha_0 < 0,6$ для Т7), а также значения $u_* = 0,13$ мм/мкс, $A_* = 0,695$ и $\alpha_* = 20$, получаем, что время насыщения t_* находится в диапазоне 280 мкс $< t_* < 1760$ мкс (Т2), 37 мкс $< t_* < 1940$ мкс (Т6) и 74 мкс $< t_* < 3900$ мкс (Т7). Меньшие числа здесь соответствуют коротковолновым возмущениям. Видно, что длинноволновые возмущения не успевают достигнуть критического возраста к моменту наступления второй стадии. При этом в расчете Т2 спектр уже близок к насыщению и спектральная зависимость амплитуды от длины волны перед началом второй стадии близка к закону $a_0 \sim \lambda$, который, по-видимому, наблюдается в эксперименте (на второй стадии). Из рис. 10 видно, что результаты, полученные для 4-го и 5-го датчиков в расчете Т2 и эксперименте, близки. В расчете Т7 практически сохраняется исходная спектральная зависимость $a_0 \sim \text{const}$, расчетные значения W_p заметно меньше, чем экспериментальные (см. рис. 10).

Если изложенные соображения верны, то в отношении спектра начальных возмущений в эксперименте [1] можно сделать следующие выводы. Сначала спектр характеризуется убыванием амплитуды с увеличением длины волны ($a_0 \sim \lambda^{-2}$), что существенно отличает его от расчетного ($a_0 \sim \text{const}$). К моменту начала второй стадии этот спектр уже близок (как и в расчете Т2) к состоянию насыщения (возраст большинства структур близок к критическому).

Ограничиваясь здесь пока качественной характеристикой спектра [1] и не проводя детальных вычислений, можно сказать, что начальный спектр [1] содержит в основном коротковолновые возмущения с начальным возрастом, заметно превышающим начальный возраст аналогичных структур в расчетных задачах.

Дополнительную информацию, подтверждающую в основном характеристики начальных спектров, описанные выше, дает анализ величины W_p . В самом деле, определенный вклад в значение W_p в момент времени t вносит та структура, которая достигает к этому моменту

критического возраста. Для одиночной структуры с поперечным размером $\sim \lambda_i$ скорость ее роста $\frac{da_i}{dt}$ складывается из скорости роста струи $\frac{da_{si}}{dt}$ и пузыря $\frac{da_{bi}}{dt}$. Скорости пузыря и струи направлены в разные стороны, и по принципу сохранения массы отдельной структуры [6] в области с размером λ_i абсолютные значения величин $S_s \frac{da_{si}}{dt}$ и $S_b \frac{da_{bi}}{dt}$ равны. Тогда в пределах этой области $\langle w'^2 \rangle = \langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2 = \left[S_s \left(\frac{da_{si}}{dt} \right)^2 + S_b \left(\frac{da_{bi}}{dt} \right)^2 \right] / S_0 = \left(\frac{da_{si}}{dt} \right)^2 \left(\frac{S_s}{S_0} \right) \left(1 + \frac{S_s}{S_b} \right)$, где S_s , S_b и S_0 —

площади струи, пузыря и общая площадь структуры соответственно. Согласно [6] критический возраст пузыря близок к 1, а струи — к $\alpha_* - 1$. Поэтому из принципа сохранения массы структуры следует, что $S_b = \frac{(\alpha_* - 1) S_0}{\alpha_*} \approx S_0$, $S_s = \frac{S_0}{\alpha_*}$ и $\frac{S_s}{S_b} \approx \frac{1}{\alpha_*} \ll 1$. Тогда, усредняя w'^2 по всему поперечному сечению, можно записать $\langle w'^2 \rangle = \left(\frac{da_{si}}{dt} \right)^2 \frac{\sigma_i}{\alpha_*}$, где σ_i — доля общей площади поперечного сечения трубы, занятой возмущениями с данной длиной волны λ_i . Учитывая, что $\frac{da_{si}}{dt} \approx \frac{da_i}{dt} = \alpha_{0i}^* u_* A_* = \frac{L}{t}$, получаем окончательно $\langle w'^2 \rangle = \frac{L^2}{t^2} \frac{1}{\alpha_*} \sigma_i \approx 0,05 \frac{L^2}{t^2} \sigma_i$. Видно, что такая простая формула практически объясняет результаты расчетов, приведенные в таблице ($W'_p \approx 0,02 \div 0,05$), если L и t отсчитывать от их значений в момент прихода УВ на КГ или ЗТП.

Увеличение W'_p на второй стадии можно объяснить теперь укрупнением структур. Неожиданно большое ($W'_p \approx 0,4$) значение W'_p в эксперименте в начале первой стадии свидетельствует о том, что возрасты в начальных возмущениях [1] имеют достаточно большие значения (может быть, даже близкие к α_*). Такой вывод коррелирует с результатами анализа роста ширины ЗТП $L(t)$, описанными выше. Отметим, что сама величина α_* существенно уменьшается при переходе от трехмерного к двумерному характеру начальных возмущений.

Некоторые характеристики развивающейся турбулентности

Обратимся прежде всего к зависимостям спектральной плотности кинетической энергии E от модуля волнового вектора q , построенным в рамках процедуры [6]. Необходимо отметить, что полученные графики $E(q)$ имеют вид, общий для всех расчетов как этой работы, так и работ [7, 8]. Именно, начиная с некоторого момента (в данных расчетах практически с начала второй стадии), спектр $E(q)$ приобретает установившийся характер, и в нем можно выделить инерционный интервал $E \sim q^{-5/3}$ и интервал в области диссипации $E \sim q^{-11/3}$. Эти интервалы пересекаются при некоторых значениях E_0 и q_0 , точка q_0 соответствует положению максимума диссипативной функции $q^2 E(q)$. Заметим, что различные экспериментальные данные (упомянутые выше рисунки из [9, 10]) имеют тот же вид. Для иллюстрации на рис. 11 приведем графики из книги [10]. Начиная с инерционного интервала, при движении в сторону увеличения чисел q точки, соответствующие различным экспериментальным данным, ложатся на некоторую универсальную кривую. Обсуждение различных вариантов аппроксимации этой универсальной кривой содержится в [10]. Авторы обнаружили, что по крайней мере ее начальный участок в области диссипации имеет вид $E \sim q^{-11/3}$.

Экспериментальные данные безразмерны в [9, 10] с помощью масштабов $E_K = (\epsilon \nu^5)^{1/4}$ и $q_K = (\epsilon \nu^{-3})^{1/4}$, где ϵ и ν — диссипация энер-

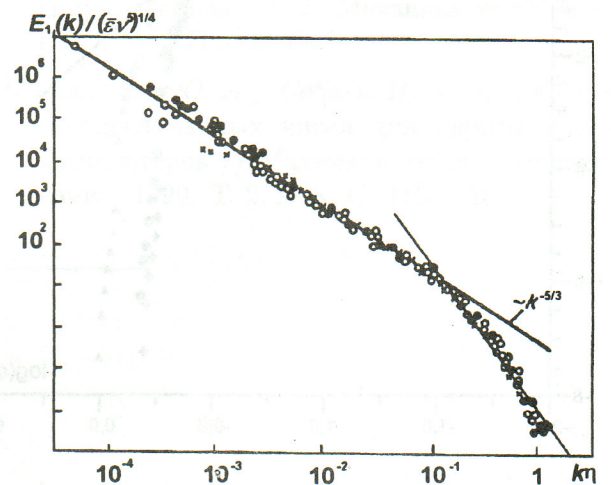


Рис. 11. Экспериментальные значения спектральной плотности энергии [10]. Прямые проведены с наклоном к осям $-5/3$ и $-11/3$

гии единицы массы в единицу времени и кинематическая вязкость соответственно. Экспериментально полученная универсальная кривая (с точностью до 10%) характеризуется следующими значениями E_0 и q_0 : $E_0 \approx 5E_K$, $q_0 \approx q_K/5$. Располагая полученными в расчетах для Т2, Т6 и Т7 значениями E_0 и q_0 , можно найти, что $\nu \cong 5 \div 10 \text{ см}^2/\text{с}$ (Т6, Т7), $\nu \cong 50 \text{ см}^2/\text{с}$ (Т2); $\varepsilon = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^2/\text{с}^3$ (Т7, $t = 1600 \text{ мкс}$), $\varepsilon = 4 \cdot 10^9 \text{ см}^2/\text{с}^3$ (Т6, $t = 1600 \text{ мкс}$), $\varepsilon = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^2/\text{с}^3$ (Т2, $t = 2000 \text{ мкс}$).

Отметим, что в отличие от случая однородной и изотропной турбулентности [10] в приведенных расчетах ε не является постоянной во времени величиной, что видно, например, из затухания пульсаций на рис. 9. В соответствии с выводами настоящей работы должно быть $\varepsilon \sim t^{-m-1}$. Проводя обезразмеривание спектральных данных (так, чтобы точка (q_0, E_0) имела координаты $(5, 1/5)$) для Т2 ($t = 2000 \text{ мкс}$), Т6 ($t = 1600 \text{ мкс}$) и Т7 ($t = 1600 \text{ мкс}$), получаем кривые, изображенные на рис. 12.

В отличие от экспериментальных данных в области больших значений q и резкого уменьшения $E(q)$ ввиду ограниченности разностной сетки [8] зависимость $E(q)$ не сохраняет универсальности.

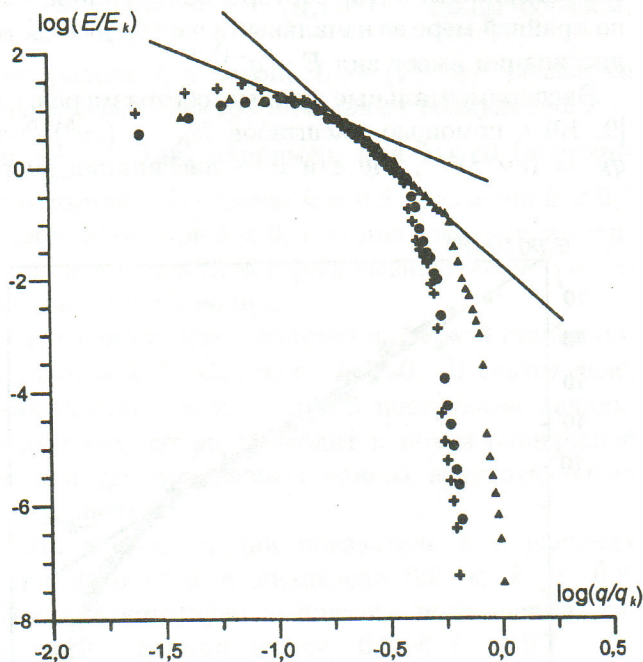


Рис. 12. Отнормированная спектральная плотность кинетической энергии в расчетах Т2 (●), Т6 (▲) и Т7 (+). Прямые линии проведены с наклоном к осям $-5/3$ и $-11/3$

В качестве заключительных иллюстраций, характеризующих возникающую турбулентность, приведем рис. 13, 14, на которых изображены отношения поперечных пульсаций $\langle u'^2 \rangle / \langle v'^2 \rangle$ и продольных к поперечным $\langle w'^2 \rangle / \langle v'^2 \rangle$ для расчета Т2. Видно, что первое отношение (см. рис. 13) варьирует в пределах 0,9–1,1, а второе (см. рис. 14) отражает несимметрию, связанную с движением УВ вдоль трубы.

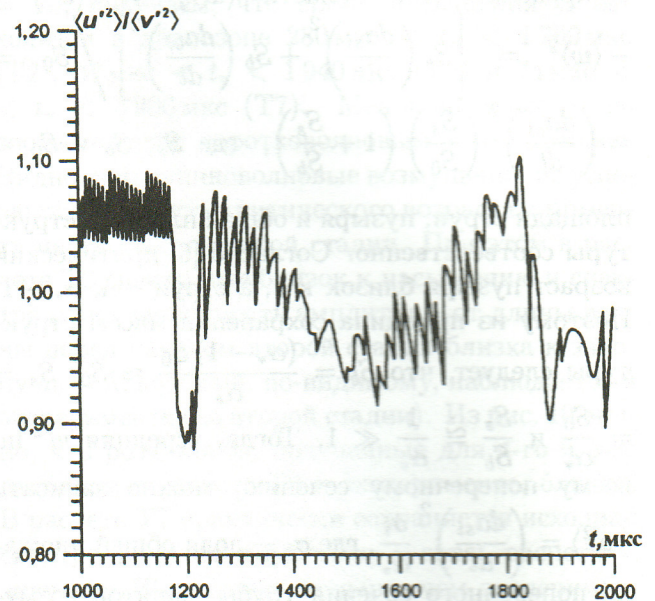


Рис. 13. Отношение поперечных пульсаций скорости в расчете Т2

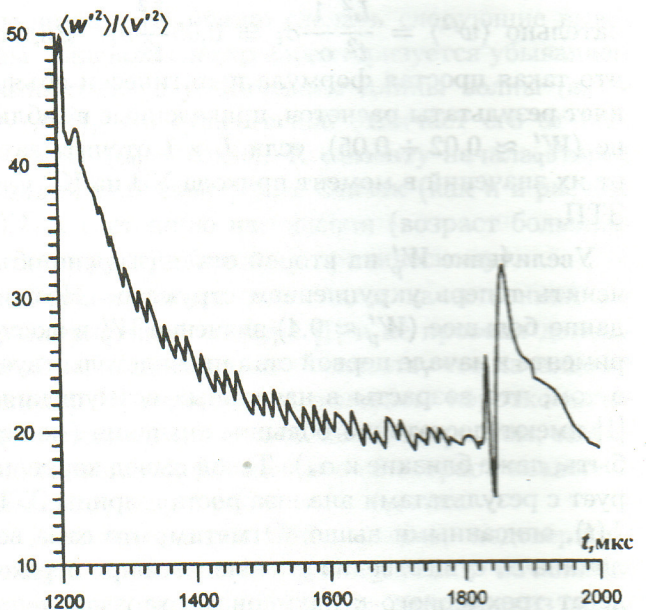


Рис. 14. Отношение продольной пульсации скорости $\langle w'^2 \rangle$ к поперечной $\langle v'^2 \rangle$ для расчета Т2

Заключение

В работе проведены расчеты семи задач на последовательности сгущающихся сеток ($h = 1; 0,5; 0,333$ мм). Использованы возможности многопроцессорного комплекса. Получены расчетные зависимости ширины ЗТП и корреляций скоростей (уровня пульсаций), предложено объяснение наблюдаемым отличиям расчетных значений от эксперимента [1]. Проведенное исследование дает основания полагать, что ряд таких характеристик развивающейся ЗТП, как ширина зоны $L(t)$ или уровень пульсаций $W_p(t)$, зависит от спектра начальных данных $a_0(\lambda)$, т. е. от того, какие длины волн и с какими амплитудами представлены в начальном возмущении. Для воспроизведения результатов [1] и других экспериментов следует подбирать тип начальных возмущений и зависимость $a_0(\lambda)$, которые наилучшим образом соответствуют условиям эксперимента.

Список литературы

1. *Poggi F., Thorembey M.-H., Rodriguez G.* Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability // *Physics of Fluids*. 1998. Vol. 10, No 11. P. 2698–2700.
2. *Lacassin G., Poggi F., Rodriguez G.* Experiment and numerical computation on a large-scale Richtmyer–Meshkov instability // *Proc. of 6-th IWPCTM*. Marseille, France, 1997. P. 289–294.
3. *Poggi F., Thorembey M.-H., Rodriguez G., Haas J.-F.* Velocity measurement in turbulent gaseous mixture induced by Richtmyer–Meshkov instability // *Ibid.* P. 416–421.
4. *Souffland D., Gregoire O., Gauthier S., Poggi F., Koenig J. M.* Measurements and simulation of the turbulent energy levels in mixing zones generated in shock tubes // *Ibid.* P. 486–491.
5. *Тишкин В. Ф., Никишин В. В., Попов И. В., Фаворский А. П.* Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // *Математическое моделирование*. 1995. Т. 7, № 5. С. 15–25.
6. *Змитренко Н. В., Прончева Н. Г., Розанов В. Б.* Эволюционная модель турбулентного слоя перемешивания: Препринт № 65. М.: ФИАН, 1997.
7. *Гарина С. М., Змитренко Н. В., Прончева Н. Г., Тишкин В. Ф.* Динамика роста зоны перемешивания в прямом численном моделировании гравитационной неустойчивости // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2002. Вып. 2. С. 10–17.
8. *Гарина С. М., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Лебо И. Г., Никишин В. В., Прончева Н. Г., Розанов В. Б., Тишкин В. Ф.* Численное моделирование и анализ характеристик турбулентного перемешивания с помощью трехмерного кода NUT // *Математическое моделирование*. 2003. Т. 15, № 5. С. 3–11.
9. *Belotserkovsky O. M.* Turbulence and Instabilities. М.: МИПТ, 1999.
10. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. Механика турбулентности. М.: Наука, 1967.
11. *Левитан Ю. Л., Соболев И. М.* О датчике псевдослучайных чисел для персональных компьютеров // *Математическое моделирование*. 1990. Т. 2, № 8. С. 119–126.