

УДК 517.9+519.6+533.7+536.7

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ: РОЛЬ МЕЖФАЗНОЙ КИНЕТИКИ

Ю. А. Бондаренко, В. Н. Софронов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Известные в литературе результаты о свойствах ударных волн разрежения основаны на предположении, что любые разрывные решения уравнений газовой динамики должны получаться методом исчезающей вязкости. В настоящей работе аналитически получены свойства ударных волн разрежения в случае регуляризации уравнений газовой динамики с помощью искусственной межфазной кинетики. Доказано, что если уравнения состояния двух чистых фаз не пересекаются, то ударные волны разрежения, полученные методом искусственной межфазной кинетики и методом исчезающей вязкости, совпадают между собой. В случае пересечения уравнений состояния чистых фаз эти ударные волны существенно отличаются друг от друга. Данные свойства подтверждены одномерными газодинамическими расчетами.

Введение

В газовой динамике привлекающим внимание исследователей объектом являются вещества с аномальными термодинамическими свойствами, когда нарушены условия Бете—Вейля, в частности, когда адиабата в плоскости (P, V) имеет невыпуклые участки. Обычно такие адиабаты появляются при равновесном описании фазовых переходов. Известно, что в этих случаях при разгрузке сжатого вещества образуются ударные волны (УВ) разрежения.

В предыдущей работе [1] рассмотрен случай невыпуклого баротропного уравнения состояния (УРСа) и доказано, что при размазывании УВ разрежения вязкостью и дисперсией вместо вязкости получаются разные параметры этих УВ. В настоящей работе изучается поведение УВ разрежения, когда для их размазывания вместо вязкости и дисперсии используется кинетика фазового перехода. Здесь также ограничимся для простоты случаем баротропного УРСа, в котором давление зависит только от плотности или удельного объема [2]. Будем предполагать, что УРС $p = P(v)$ достаточно гладкий (в частности не имеет точек излома), строго монотонный и имеет только один интервал с "обратной" выпуклостью:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_0(p)}{dp^2} &> 0, \quad \text{если } p < p_{\min} \text{ или } p > p_{\max}; \\ \frac{d^2 V_0(p)}{dp^2} &< 0, \quad \text{если } p_{\min} < p < p_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для любого непрерывного монотонного начального профиля $p_0(m) = p(t, m)|_{t=0}$, $u_0(m) = u(t, m)|_{t=0}$, $p(t, m)|_{m=0} = p_- < p_{\min}$, $p(t, m)|_{m=+\infty} = p_+ > p_{\max}$, который разгружается влево, характеристики в интервале давлений $p_{\min} < p < p_{\max}$ со временем обязательно пересекутся, что и приведет к появлению УВ разрежения с параметрами $(p_1, v_1, u_1) \rightarrow (p_2, v_2, u_2)$, где $p_2 < p_1$, $v_2 > v_1$, $u_2 < u_1$. Параметры УВ разрежения в случае баротропного УРСа удовлетворяют двум условиям Ренкина—Гюгиони, из которых находится массовая скорость УВ разрежения

$$\sigma = \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{V_0(p_2) - V_0(p_1)}}. \quad (2)$$

С течением времени все профили должны приблизиться к автомодельному решению задачи распада разрыва.

Ясно, что УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ в предельном автомодельном решении должна "поглотить" участок невыпуклости УРСа (1), и поэтому она должна удовлетворять условию

$$p_2 \leq p_{\min} < p_{\max} \leq p_1. \quad (3)$$

В работе [1] (см. также [3]) показано, что УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ в предельном автомодельном решении должна удовлетворять в дополнение к условию (3) еще и условию

$$(s(p_2))^2 \equiv \left(- \frac{dV_0(p)}{dp} \Big|_{p=p_2} \right)^{-1} \leq \sigma^2 \equiv \frac{p_1 - p_2}{V_0(p_2) - V_0(p_1)} \leq (s(p_1))^2 \equiv \left(- \frac{dV_0(p)}{dp} \Big|_{p=p_1} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Условие (4) удобно рассматривать как требование выпуклости объединенной адиабаты, состоящей из отрезка прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$, к которому с двух сторон примыкают участки УРСа $v = V_0(p)$. Напомним, что на плоскости (P, V) УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$, удовлетворяющая условиям Ренкина—Гюонио, изображается отрезком прямой Рэлея—Михельсона

$$V_{RM}(p) = \frac{(p_1 - p)V_0(p_2) + (p - p_2)V_0(p_1)}{p_1 - p_2}, \quad (5)$$

концевые точки которого (p_1, v_1) и (p_2, v_2) находятся на адиабате $v = V_0(p)$.

Для каждой УВ разрежения, которая удовлетворяет условиям (3) и (4), существует автомодельное решение. Если при этом отрезок прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$ своим концом (p_1, v_1) или (p_2, v_2) касается адиабаты $v = V_0(p)$, т. е. массовая скорость УВ разрежения равна массовой скорости звука, то между УВ разрежения и автомодельным непрерывным профилем разрежения нет интервала постоянного течения. Если касания нет, то между УВ разрежения и автомодельным непрерывным профилем разрежения находится интервал с постоянным течением, который со временем увеличивается.

Для выделения единственного решения из этой многозначности нужны дополнительные правила отбора. Для этого в литературе обычно используется требование допустимости УВ [3, 4], которое в рассматриваемом случае баротропного УРСа имеет следующую формулировку:

Ударный переход $(p_1, v_1, u_1) \rightarrow (p_2, v_2, u_2)$ называется допустимым, если существует классическое решение системы уравнений газовой динамики для вязкого газа с любым положительным коэффициентом вязкости $\mu > 0$, соединяющее точки (p_1, v_1, u_1) и (p_2, v_2, u_2) .

Говорят, что такой ударный переход допустим методом исчезающей вязкости.

Г. Я. Галин в 1959 г. доказал [4], что ударный переход $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ в виде УВ разрежения допустим, если адиабата $v = V_0(p)$ лежит в плоскости (P, V) выше прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$. Среди всего многообразия случаев требование допустимости (методом исчезающей вязкости) выделяет единственную УВ разрежения, отрезок прямой Рэлея—Михельсона которой касается адиабаты $v = V_0(p)$ в обеих своих концевых точках $(p_{1\text{вязк}}, v_{1\text{вязк}})$ и $(p_{2\text{вязк}}, v_{2\text{вязк}})$ (рис. 1).

Такое определение допустимости УВ разрежения исходит из привычного предположения, что главным физическим процессом, который отбрасывается при использовании уравнений идеальной газовой динамики, является вязкость.

В работе [1] рассмотрен другой способ определения допустимых УВ разрежения, основанный на их размазывании с помощью малой нормальной дисперсии, когда уравнение для скорости в переменных Лагранжа имеет вид

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial m} - \eta \frac{\partial^3 v}{dt^2 \partial m} = 0, \quad \eta = \text{const} > 0, \quad \eta \rightarrow +0.$$

В этой работе доказана следующая

Теорема 1. *В автомодельной задаче распада разрыва с невыпуклым УРСом существует УВ разрежения, допускаемая методом исчезающей нормальной дисперсии. Эта УВ разрежения единственная, она однозначно определяется следующими своими свойствами:*

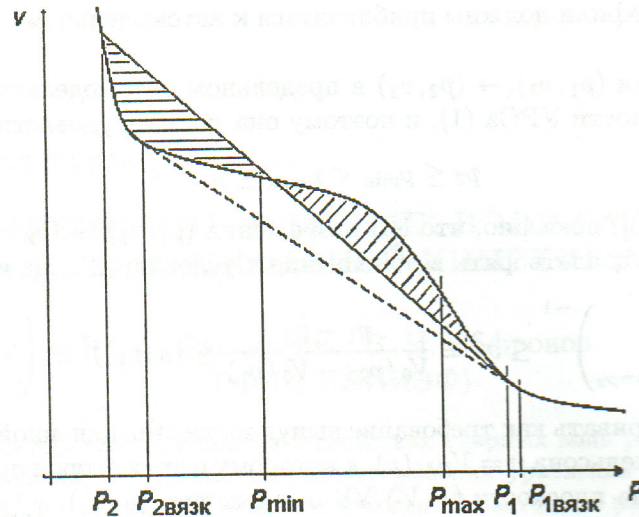


Рис. 1. Адиабата с невыпуклым УРСом и прямые Рэлея—Михельсона УВ разрежения: — — допускаемой методом исчезающей нормальной дисперсии ($p_1 \rightarrow p_2$); - - - — допускаемой методом исчезающей вязкости ($p_{1вязк} \rightarrow p_{2вязк}$)

- 1) в плоскости (P, V) отрезок прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$ УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ касается УРСа $v = V_0(p)$ в своей концевой точке (v_1, p_1) ;
- 2) прямая Рэлея—Михельсона пересекает адиабату $v = V_0(p)$ в промежуточной точке и в концевой точке (p_2, v_2) так, чтобы для $v = v_2$ был равен нулю интеграл

$$\Phi(v) = \int_{v_1}^v \left[P(v) - \frac{p_1(v_2 - v) + p_2(v - v_1)}{v_2 - v_1} \right] dv.$$

Схематически такие допустимые предельные решения показаны на рис. 1. В точке (p_1, v_1) прямая Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$ должна касаться адиабаты $v = V_0(p)$, а площади двух криволинейных заштрихованных треугольников должны быть равны.

УВ разрежения, полученная методом исчезающей нормальной дисперсии, всегда отличается от УВ разрежения, полученной методом исчезающей вязкости. Даже скорости таких УВ разрежения всегда разные. Массовая скорость УВ разрежения, допускаемой методом исчезающей нормальной дисперсии, в предельном автомодельном решении всегда меньше, чем массовая скорость УВ разрежения, допускаемой методом исчезающей вязкости.

1. Метод искусственной межфазной кинетики и УВ разрежения в автомодельной задаче распада разрыва

Для размазывания УВ разрежения вместо вязкости и дисперсии можно также использовать искусственную межфазную кинетику. Для этого используем модель двухфазной среды, аналогичную рассмотренной в работах [5, 6], с естественными обобщениями и принятыми в данной работе упрощениями.

Предполагается, что вещество состоит из смеси двух фаз с выпуклыми УРСами $v = V_1(p)$ и $v = V_2(p)$ для каждой из чистых фаз, равновесный УРС

$$v = V_0(p) \equiv \Theta_0(p)V_1(p) + (1 - \Theta_0(p))V_2(p) \quad (6)$$

строго монотонный, но имеет один непустой интервал невыпуклости; $\Theta_0(p)$ — строго монотонная равновесная концентрация первой фазы. Считаем выполненными условия

$$\frac{d^2 V_k(p)}{dp^2} > 0, \quad k = 1, 2; \quad (7)$$

$$\frac{1}{(s_k(p))^2} = -\frac{dV_k(p)}{dp} > 0, \quad k = 1, 2; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 V_0(p)}{dp^2} > 0, \quad \text{если } p < p_{\min} \text{ или } p > p_{\max}, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 V_0(p)}{dp^2} < 0, \quad \text{если } p_{\min} < p < p_{\max};$$

$$\frac{1}{(s_0(p))^2} = -\frac{dV_0(p)}{dp} > 0; \quad (10)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \Theta_0(p) = 1, \quad \lim_{p \rightarrow +0} \Theta_0(p) = 0; \quad (11)$$

$$0 \leq \frac{d\Theta_0(p)}{dp} \leq \text{const} < +\infty, \quad (12)$$

$$\frac{d\Theta_0(p)}{dp} > 0 \quad \text{при } 0 < \Theta_0(p) < 1.$$

В методе искусственной межфазной кинетики уравнения газовой динамики

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \quad \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0 \quad (13)$$

замыкаются неравновесным УРСом

$$v = V(p, \Theta) \equiv \Theta V_1(p) + (1 - \Theta) V_2(p), \quad (14)$$

а концентрация $\Theta(t, m)$ первой фазы описывается уравнением кинетики фазового перехода

$$\tau \frac{d\Theta}{dt} = -(\Theta - \Theta_0(p)) \omega(\Theta, p) \quad (15)$$

с положительным временем релаксации фаз $\tau = \text{const} \rightarrow +0$ и положительной непрерывной по совокупности аргументов функцией $\omega(\Theta, p)$, которая описывает зависимость "частоты" межфазной релаксации от давления и концентраций фаз.

Вязкость и дисперсия не учитываются.

1.1. Условия существования размазанных искусственной межфазной кинетикой УВ разрежения, бегущих с постоянной скоростью. Изучим вопрос существования размазанных УВ разрежения, бегущих с постоянной скоростью. Для этого в уравнения одномерной лагранжевой газовой динамики (13)–(15) подставляем решение в форме бегущей волны:

$$u(t, m) = u(\mu), \quad p(t, m) = p(\mu), \quad \Theta(t, m) = \Theta(\mu), \quad \mu = m - \sigma t, \quad \sigma = \text{const} > 0.$$

Здесь σ — положительная массовая скорость УВ разрежения.

Будем считать, что газ перед УВ разрежения покоится. Ищем непрерывные и непрерывно дифференцируемые решения такого вида, которые на бесконечности выходят на константы, т. е. удовлетворяют следующим краевым условиям "на бесконечности":

$$u(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow +\infty, \quad u(\mu) \rightarrow u_2 \quad \text{при } \mu \rightarrow -\infty; \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow \pm\infty; \quad (17)$$

$$p(\mu) \rightarrow p_1 \text{ при } \mu \rightarrow +\infty, \quad p(\mu) \rightarrow p_2 \text{ при } \mu \rightarrow -\infty; \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mu} \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow \pm\infty; \quad (19)$$

$$\Theta(\mu) \rightarrow \Theta_1 = \Theta_0(p_1) \text{ при } \mu \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

$$\Theta(\mu) \rightarrow \Theta_2 = \Theta_0(p_2) \text{ при } \mu \rightarrow -\infty; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mu} \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow \pm\infty. \quad (22)$$

Здесь

$$p_1 = \text{const} > p_2 = \text{const} > 0. \quad (23)$$

$$1 \geq \Theta_1 = \Theta_0(p_1) = \text{const} > \Theta_2 = \Theta_0(p_2) = \text{const} \geq 0. \quad (24)$$

В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sigma \frac{dv}{d\mu} + \frac{du}{d\mu} = 0; \quad (25)$$

$$\sigma \frac{du}{d\mu} - \frac{dp}{d\mu} = 0; \quad (26)$$

$$v = \Theta V_1(p) + (1 - \Theta) V_2(p);$$

$$\tau \sigma \frac{d\Theta}{d\mu} = (\Theta - \Theta_0(p)) \omega(\Theta, p), \quad (27)$$

решение которой должно удовлетворять условиям на бесконечности. Интегрированием уравнений (25), (26) получаем

$$\begin{aligned} \sigma v + u &= \sigma v_1 = \sigma v_2 + u_2; \\ p - \sigma u &= p_1 = p_2 - \sigma u_2 \end{aligned} \quad (28)$$

и известные условия Ренкина—Гюгонио

$$\begin{aligned} \sigma (V_0(p_1) - V_0(p_2)) &= u_2; \\ p_1 - p_2 &= -\sigma u_2, \end{aligned}$$

из которых следуют полезные соотношения (2) и

$$p_1 + \sigma^2 V_0(p_1) = p_2 + \sigma^2 V_0(p_2).$$

Здесь

$$v_k = V(p_k, \Theta_k) = V_0(p_k) = \Theta_0(p_k) V_1(p_k) + (1 - \Theta_0(p_k)) V_2(p_k), \quad k = 1, 2.$$

Исключая из (28) скорость и удельный объем, получаем

$$p + \sigma^2 [\Theta V_1(p) + (1 - \Theta) V_2(p)] = p_1 + \sigma^2 V_0(p_1),$$

откуда находим

$$\Theta = \vartheta(p) \equiv \frac{V_2(p) - V_{RM}(p)}{V_2(p) - V_1(p)}, \quad (29)$$

где линейная функция $V_{RM}(p)$, определенная формулой (5), описывает прямую Рэлея—Михельсона УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ в плоскости (P, V) . С помощью (29) исключаем из (27) концентрацию первой фазы и получаем уравнение

$$\frac{\vartheta'(p)}{\psi(p) \omega(\vartheta(p), p)} \frac{dp}{d\mu} = \frac{1}{\tau \sigma}, \quad (30)$$

которое формально легко интегрируется в квадратурах. Здесь использовано обозначение

$$\psi(p) \equiv \vartheta(p) - \Theta_0(p) = \frac{V_0(p) - V_{RM}(p)}{V_2(p) - V_1(p)},$$

при этом $\psi(p_1) = \psi(p_2) = 0$.

Решение уравнения (30) должно удовлетворять крайевым условиям на бесконечности (18), (19), остальные крайевые условия (16)–(24) будут выполнены автоматически.

Вернемся к уравнению (27). Его решение, если оно существует, можно записать в виде

$$\Theta(\mu) = \Theta_0(p(\mu)) + e^{\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\omega(\mu'')}{\tau\sigma} d\mu''} [\Theta(\mu_0) - \Theta_0(p(\mu_0))] - \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\Theta_0(p(\mu'))}{d\mu'} e^{\int_{\mu_0}^{\mu'} \frac{\omega(\mu'')}{\tau\sigma} d\mu''} d\mu',$$

где μ_0 — произвольная точка внутри размазанной УВ. Здесь используется обозначение $\omega(\mu'') = \omega(\Theta(\mu''), p(\mu''))$. Для $\mu = \mu_1 > \mu_0$ эту формулу удобно переписать в виде

$$e^{-\int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{\omega(\mu'')}{\tau\sigma} d\mu''} [\Theta(\mu_1) - \Theta_0(p(\mu_1))] = [\Theta(\mu_0) - \Theta_0(p(\mu_0))] - \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{d\Theta_0(p(\mu'))}{d\mu'} e^{-\int_{\mu_0}^{\mu'} \frac{\omega(\mu'')}{\tau\sigma} d\mu''} d\mu'.$$

Для монотонно возрастающего решения $p(\mu)$ из условия (12) следует положительность последнего интеграла. Поэтому справедливо неравенство

$$\Theta(\mu_0) - \Theta_0(p(\mu_0)) > e^{-\int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{\omega(\mu'')}{\tau\sigma} d\mu''} [\Theta(\mu_1) - \Theta_0(p(\mu_1))], \quad \forall \mu_1 > \mu_0.$$

Переходя к пределу $\mu_1 \rightarrow +\infty$ и учитывая крайевые условия (21), (24), получаем

$$\Theta(\mu) - \Theta_0(p(\mu)) > 0, \quad \forall \mu: \mu_- < \mu < \mu_+,$$

где μ_{\pm} — конечные или бесконечные границы размазанной УВ разрежения. Тем самым доказано, что для существования монотонного решения, удовлетворяющего условиям на бесконечности, необходимо (но далеко не достаточно), чтобы выполнялось неравенство

$$\psi(p) = \Theta - \Theta_0(p) = \frac{V_0(p) - V_{RM}(p)}{V_2(p) - V_1(p)} > 0, \quad \forall p: p_2 < p < p_1. \quad (31)$$

Условия существования решений уравнения вида (30) устанавливаются основной леммой 1, формулировка которой дана в Приложении. Из нее с учетом необходимого условия (31) следует

Предложение. Размазанная с помощью искусственной межфазной кинетики УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ существует тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- 1) функция $\psi(p) = \frac{V_0(p) - V_{RM}(p)}{V_2(p) - V_1(p)}$ строго положительна для всех p внутри интервала $p_2 < p < p_1$;
- 2) функция $\vartheta'(p) = \frac{d}{dp} \left(\frac{V_2(p) - V_{RM}(p)}{V_2(p) - V_1(p)} \right)$ строго положительна для всех p внутри интервала $p_2 < p < p_1$;
- 3) функция $f(p) = \vartheta'(p)/\psi(p)$ непрерывна всюду внутри интервала $p_2 < p < p_1$;
- 4) функция $1/f(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_1 - 0$;
- 5) функция $1/f(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_2 + 0$.

Самым сложным для проверки является условие 2 положительности функции $\vartheta'(p)$, остальные условия проверяются намного легче.

Дальнейший анализ удобно провести отдельно для двух случаев, когда УРСы $v = V_1(p)$ и $v = V_2(p)$ чистых фаз не пересекаются и когда они пересекаются в одной точке. Параметры УВ разрезания в этих двух случаях получаются разные.

1.2. Предельные УВ разрезания в случае, когда УРСы чистых фаз не пересекаются. Рассмотрим в методе искусственной межфазной кинетики случай, когда УРСы $v = V_1(p)$ и $v = V_2(p)$ двух чистых фаз не пересекаются:

$$V_2(p) > V_1(p); \quad P_2(v) > P_1(v). \quad (32)$$

Для уменьшения числа возможных вариантов будем использовать необходимые условия существования предельных автомодельных решений (3) и (4), последнее — для равновесного УРСа $v = V_0(p)$.

При выполнении условия (32) непересечения чистых фаз необходимое условие (31) существования размазанной УВ разрезания $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ принимает вид

$$V_{RM}(p) < V_0(p), \quad \forall p: p_2 < p < p_1, \quad (33)$$

т. е. отрезок прямой Рэлея—Михельсона для УВ разрезания $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ должен целиком лежать ниже равновесного УРСа $v = V_0(p)$.

Анализ разных случаев расположения отрезка прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$ показывает, что условия (3), (4) и (33) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда отрезок прямой Рэлея—Михельсона для УВ разрезания $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ в обеих своих концевых точках (p_1, v_1) и (p_2, v_2) касается равновесного УРСа $v = V_0(p)$. Это видно из рассмотрения примеров, показанных на рис. 2. Так, на рис. 2, а для точки p_{21} нарушено условие (33), для точки p_{23} — условие (4), и только точка касания p_{22} удовлетворяет всем условиям. Аналогично, на рис. 2, б для точки p_{11} нарушено условие (33), для точки p_{13} — условие (4), и только точка касания p_{12} удовлетворяет всем условиям.

Докажем, что полученная здесь УВ разрезания $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ (с касанием в двух концевых точках отрезка прямой Рэлея—Михельсона и равновесного УРСа) действительно существует, т. е. для такой УВ разрезания выполнены все условия предложения из подразд. 1.1. Ключевым здесь является условие 2 положительности функции $\vartheta'(p)$.

Сначала рассмотрим это условие в концевых точках (p_k, v_k) , $k = 1, 2$. В этих точках выполнены соотношения

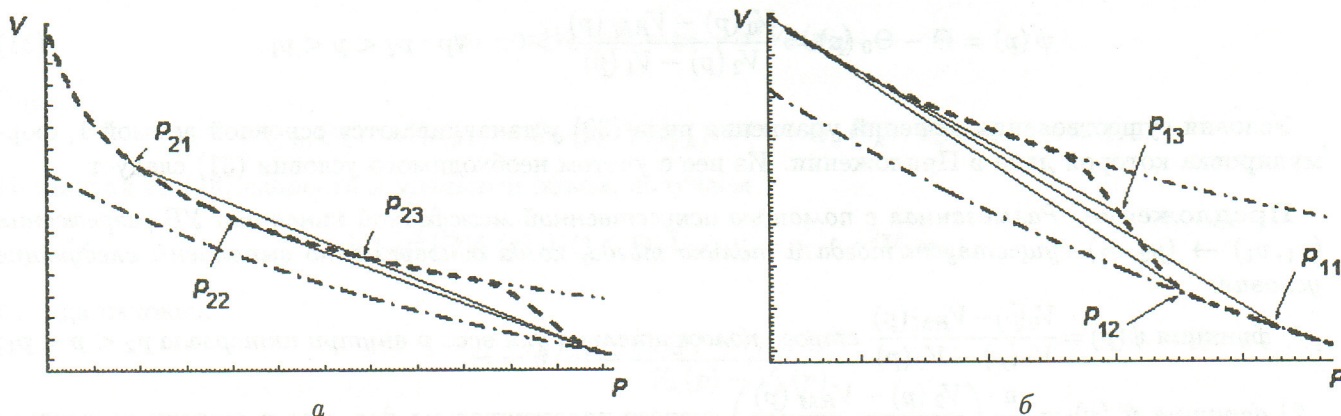


Рис. 2. Примеры положения точки пересечения прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$ и равновесного УРСа $v = V_0(p)$, когда УРСы чистых фаз не пересекаются: а — точка пересечения (p_2, v_2) ; б — точка пересечения (p_1, v_1) ; - · - · - · — удельный объем первой фазы; - · - · - · — удельный объем второй фазы; - - - — равновесный удельный объем

$$V_0(p_k) = V_{RM}(p_k), \quad k = 1, 2; \quad (34)$$

$$\frac{dV_0(p_k)}{dp} = \frac{dV_{RM}(p_k)}{dp}, \quad k = 1, 2. \quad (35)$$

Последнее соотношение есть условие касания. Для краткости здесь и ниже используем обозначения вида $\left. \frac{dF_j(p_k)}{dp} = \frac{dF_j(p)}{dp} \right|_{p=p_k}$. Подставляем (6) в (35):

$$\frac{dV_{RM}(p_k)}{dp} = \Theta_0(p_k) \frac{dV_1(p_k)}{dp} + (1 - \Theta_0(p_k)) \frac{dV_2(p_k)}{dp} - \frac{d\Theta_0(p_k)}{dp} (V_2(p_k) - V_1(p_k)).$$

Используя это соотношение и (34), находим

$$\vartheta'(p_k) = \frac{d}{dp} \left(\frac{V_2(p_k) - V_{RM}(p_k)}{V_2(p_k) - V_1(p_k)} \right) = \frac{d\Theta_0(p_k)}{dp}, \quad k = 1, 2.$$

По предположению (12) это всегда неотрицательные величины, а если

$$V_1(p_k) < V_0(p_k) < V_2(p_k),$$

т. е. равновесный УРС в концевых точках отрезка прямой Рэлея—Михельсона еще не совпадает с УРСом чистой фазы (фазовый переход еще не завершился полностью), то значения $\vartheta'(p_k)$ будут строго положительны.

С учетом этого результата из леммы 2 о двух непересекающихся выпуклых функциях и прямой (см. Приложение) следует, что функция $\vartheta'(p)$ будет строго положительна внутри интервала $p_2 < p < p_1$.

Выполнение условия 3 предложения из подразд. 1.1 теперь очевидно. Проверка условий 4 и 5 этого предложения сводится к простому вычислению порядков малости функций $\vartheta'(p)$ и $\psi(p)$ при $p \rightarrow p_1$ и $p \rightarrow p_2$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Пусть УРСы двух чистых фаз $v = V_1(p)$ и $v = V_2(p)$ не пересекаются (т. е. справедливы условия (32)) и выполнены предположения (6)–(12). Тогда в автомодельной задаче распада разрыва существует УВ разрежения, полученная методом искусственной межфазной кинетики. Эта УВ разрежения единственная, она однозначно определяется следующим своим свойством.

В плоскости (P, V) отрезок прямой Рэлея—Михельсона $v = V_{RM}(p)$ УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ касается равновесного УРСа $v = V_0(p)$ в своих концевых точках (v_2, p_2) и (v_1, p_1) .

Параметры УВ разрежения, полученной методом искусственной межфазной кинетики, совпадают с параметрами УВ разрежения, полученной для равновесного УРСа $v = V_0(p)$ методом исчезающей вязкости.

1.3. Предельные УВ разрежения в случае пересечения УРСов чистых фаз. Рассмотрим теперь в методе искусственной межфазной кинетики случай, когда УРСы двух чистых фаз $v = V_1(p)$ и $v = V_2(p)$ пересекаются в единственной точке (p_3, v_3) , $p_1 > p_3 > p_2$:

$$v_3 = V_1(p_3) = V_2(p_3), \quad p_2 \leq p_3 \leq p_1. \quad (36)$$

Очевидно, что равновесный УРС также должен проходить через точку пересечения фаз:

$$v_3 = V_0(p_3) = \Theta_0(p_3) V_1(p_3) + (1 - \Theta_0(p_3)) V_2(p_3), \quad (37)$$

иначе концентрации фаз выйдут за пределы отрезка $[0; 1]$.

Здесь дополнительно будем предполагать, что выполнены неравенства

$$P_2(v) > P_1(v) \quad \text{при} \quad v < v_3; \quad P_2(v) < P_1(v) \quad \text{при} \quad v > v_3, \quad (38)$$

или эквивалентные неравенства

$$V_2(p) < V_1(p) \quad \text{при } p < p_3; \quad V_2(p) > V_1(p) \quad \text{при } p > p_3. \quad (39)$$

Кроме того, массовые скорости звука фаз в точке пересечения предполагаются разными:

$$\left. \frac{dV_1(p)}{dp} \right|_{p=p_3} \neq \left. \frac{dV_2(p)}{dp} \right|_{p=p_3};$$

$$(s_1(p_3))^2 = - \left(\left. \frac{dV_1(p)}{dp} \right|_{p=p_3} \right)^{-1} < (s_2(p_3))^2 = - \left(\left. \frac{dV_2(p)}{dp} \right|_{p=p_3} \right)^{-1}. \quad (40)$$

Из необходимого условия (31) существования размазанной с помощью искусственной межфазной кинетики УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ и условия (39) пересечения чистых фаз сразу получаем следующие необходимые условия расположения отрезка прямой Рэля—Михельсона:

$$V_{RM}(p) > V_0(p), \quad p < p_3; \quad V_{RM}(p) < V_0(p), \quad p > p_3. \quad (41)$$

Отсюда следует, в частности, что прямая $v = V_{RM}(p)$ Рэля—Михельсона должна проходить через точку пересечения чистых фаз (p_3, v_3) : $V_{RM}(p_3) = v_3$.

Вращая прямую Рэля—Михельсона вокруг точки (p_3, v_3) пересечения чистых фаз и проверяя условия (41) и условия (3), (4) существования предельных автомодельных решений, находим из рис. 3, 4, что в предельном автомодельном решении допустима только одна единственная УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$. Соответствующая ей прямая Рэля—Михельсона на рис. 4, а касается снизу в точке $p_{1,\min}$ равновесного УРСа $v = V_0(p)$, проходит через точку пересечения фаз (p_3, v_3) и пересекает (сверху без касания) равновесный УРС в точке $p_{2,\min}$.

Из леммы 3 (см. Приложение) о двух выпуклых функциях и прямой, пересекающихся в одной точке, следует, что функция $\vartheta'(p)$ будет строго положительна внутри интервала $p_2 < p < p_1$. Поэтому условия 1 и 2 предложения из подразд. 1.1 выполнены.

Используя предположение (40), легко доказать, что функция $\vartheta'(p)/\psi(p)$ имеет одинаковые односторонние пределы при $p \rightarrow p_3 - 0$ и при $p \rightarrow p_3 + 0$. Поэтому функцию $\vartheta'(p)/\psi(p)$ можно так

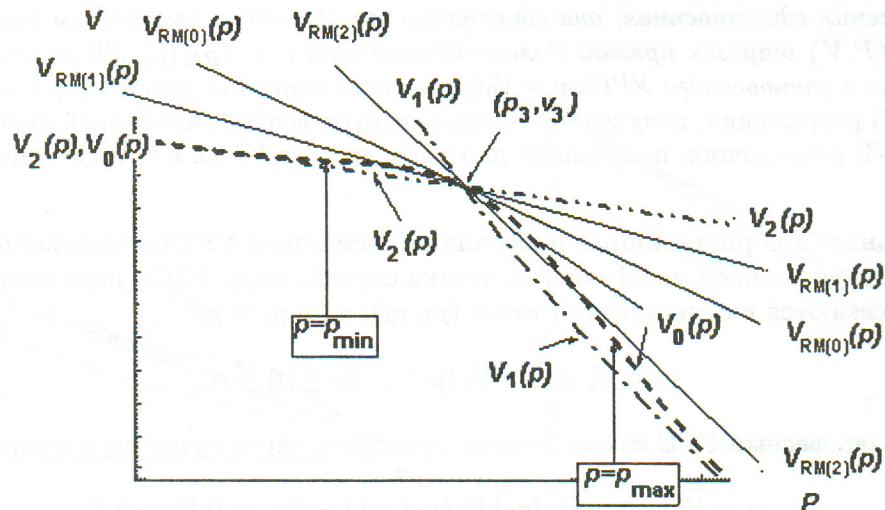


Рис. 3. Возможные положения $v = V_{RM(k)}(p)$ прямой Рэля—Михельсона $v = V_{RM}(p)$, равновесного УРСа $v = V_0(p)$ и УРСов первой фазы $v = V_1(p)$ и второй фазы $v = V_2(p)$ в окрестности точки (p_3, v_3) пересечения фаз

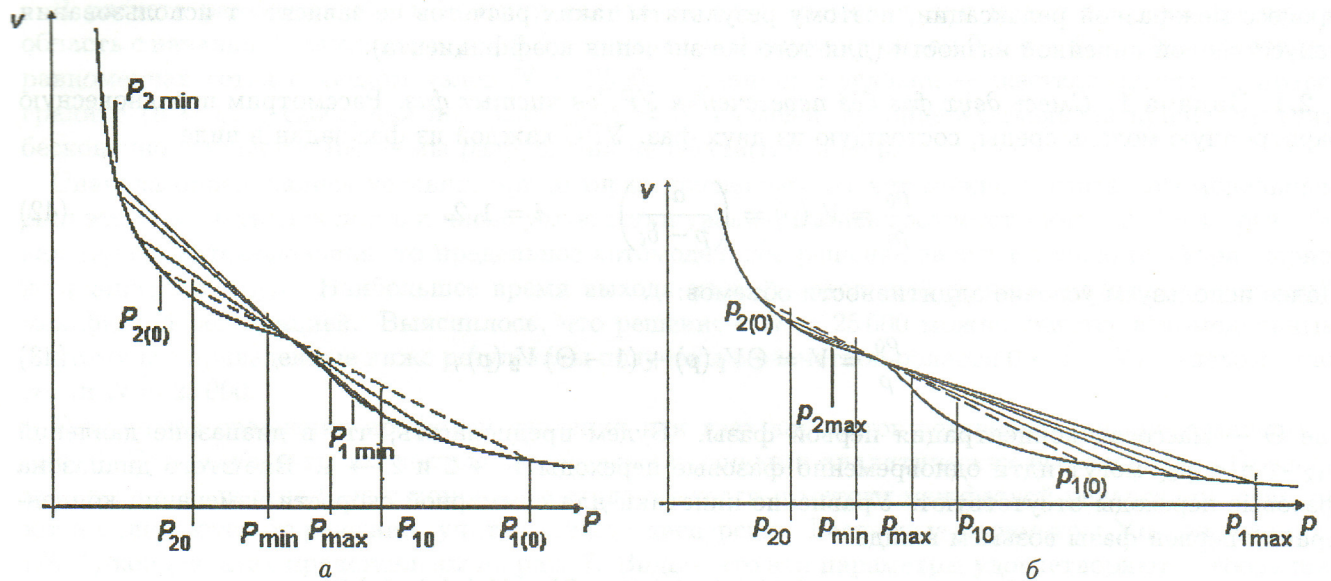


Рис. 4. Возможные положения прямой Рэлея–Михельсона $v = V_{RM}(p)$ и равновесного УРСа $v = V_0(p)$, которые получаются вращением прямой $v = V_{RM(0)}(p)$ (показана пунктиром) вокруг точки пересечения фаз: а — по часовой стрелке; б — против часовой стрелки

доопределить в точке $p = p_3$, что она станет непрерывной внутри интервала $p_2 < p < p_1$. Поэтому условие 3 предложения также выполнено. Проверка выполнения условий 4 и 5 предложения легко проводится простым вычислением порядков малости функций $\vartheta'(p)$ и $\psi(p)$ при $p \rightarrow p_1$ и $p \rightarrow p_2$.

В результате доказана следующая

Теорема 3. Пусть УРСы двух чистых фаз $v = V_1(p)$ и $v = V_2(p)$ пересекаются в одной точке (p_3, v_3) (т. е. выполнены условия (36), (37)) и справедливы предположения (6)–(12) и (38)–(40). Тогда в автомодельной задаче распада разрыва существует УВ разрежения, полученная методом искусственной межфазной кинетики. Эта УВ разрежения единственная, она однозначно определяется следующим своим свойством.

В плоскости (P, V) отрезок прямой Рэлея–Михельсона $v = V_{RM}(p)$ УВ разрежения $(p_1, v_1) \rightarrow (p_2, v_2)$ проходит через точку пересечения фаз (p_3, v_3) , касается (снизу) равновесного УРСа $v = V_0(p)$ в одной своей концевой точке (v_1, p_1) и пересекает (сверху и уже без касания) равновесный УРС в другой своей концевой точке (p_2, v_2) .

В случае пересечения УРСов чистых фаз параметры УВ разрежения, полученной методом искусственной межфазной кинетики, существенно отличаются от параметров УВ разрежения, полученной для равновесного УРСа $v = V_0(p)$ методом исчезающей вязкости и методом исчезающей дисперсии.

2. Результаты одномерных расчетов автомодельных задач распада разрыва с УВ разрежения

Проведем сравнение автомодельных решений с результатами численных расчетов, выполненных по программе УП [7]. В расчетах использовалась разностная схема крест, обладающая счетной вязкостью и счетной дисперсией.

Расчеты без искусственной вязкости с равновесным УРСом соответствуют регуляризации уравнений газовой динамики с помощью нормальной дисперсии. Расчеты, соответствующие вязкой регуляризации, которая применяется как на волнах сжатия, так и на волнах разрежения, проведены с безразмерным коэффициентом линейной вязкости, равным 0,5, а также с равновесным УРСом. Наконец, регуляризация с помощью искусственной кинетики фазового перехода осуществлялась с использованием неравновесного УРСа (42)–(44) (см. ниже). В этом случае ведущим является

процесс межфазной релаксации, поэтому результаты таких расчетов не зависят от использования искусственной линейной вязкости (для того же значения коэффициента).

2.1. Задача 1. Смесь двух фаз без пересечения УРСов чистых фаз. Рассмотрим неравновесную баротропную модель среды, состоящую из двух фаз. УРС каждой из фаз задан в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho_i} = V_i(p) = \left(\frac{a_i}{p - b_i} \right)^{n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Далее используем условие аддитивности объемов:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = V = \Theta V_1(p) + (1 - \Theta) V_2(p), \quad (43)$$

где Θ — массовая концентрация первой фазы. Будем предполагать, что в диапазоне давлений $p_{12} < p < p_{21}$ могут идти одновременно фазовые переходы $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$. Вне этого диапазона фазовые переходы отсутствуют. Уравнение кинетики для суммарной скорости изменения концентрации первой фазы возьмем в виде

$$\frac{d\Theta}{dt} = j_{21} - j_{12} = \frac{V_2(p) f_{21}(p) (1 - \Theta) - V_1(p) f_{12}(p) \Theta}{\tau}, \quad (44)$$

где τ — время межфазной релаксации. Скорость фазовых переходов $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$ определяется функциями f_{12} и f_{21} , вид которых взят из работы [6]:

$$f_{12} = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{p - p_{12}}{\Delta_{12}}\right)^3\right), & p > p_{12}; \\ 0, & p < p_{12}; \end{cases}$$

$$f_{21} = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{p_{21} - p}{\Delta_{21}}\right)^3\right), & p < p_{21}; \\ 0, & p > p_{21}. \end{cases}$$

Запишем уравнение кинетики в стандартном представлении (15):

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{V_1(p) f_{12}(p) + V_2(p) f_{21}(p)}{\tau} (\Theta_0(p) - \Theta).$$

Здесь

$$\Theta_0(p) = \begin{cases} 0, & p_{21} < p; \\ \frac{V_2(p) f_{21}(p)}{V_1(p) f_{12}(p) + V_2(p) f_{21}(p)}, & p_{12} < p < p_{21}; \\ 1, & p < p_{12} \end{cases} \quad \text{— равновесная концентрация первой фазы.}$$

В пределе очень быстрой межфазной релаксации $\tau \rightarrow 0$ рассмотренный двухфазный УРС будет состоять из трех веток (первой фазы, второй фазы и равновесной смеси фаз):

$$V_0(p) = \begin{cases} V_1(p), & p < p_{12}; \\ \frac{V_1(p) V_2(p) (f_{12}(p) + f_{21}(p))}{V_1(p) f_{12}(p) + V_2(p) f_{21}(p)}, & p_{12} < p < p_{21}; \\ V_2(p), & p_{21} < p. \end{cases}$$

В табл. 1 приведены параметры УРСа. На рис. 5 представлены УРСы чистых фаз и равновесной смеси фаз.

В расчете рассматривалась центрированная волна разрежения для плоского слоя. Расчетная область с начальной плотностью $\rho = 9,3$ в момент $t = 0$ занимает объем $0 < x < 7,5$. Использовалась равномерная сетка с числом узлов $N = 2500$. Граничные условия — жесткая стенка на правой границе ($u = 0$) и свободная поверхность ($p = 0$) на левой границе. Откольная прочность взята бесконечно большой. Проблемы разрушения не рассматривались.

Сначала определялись условия, при которых численный расчет можно считать автомодельным. Для этого расчетная область и число узлов сетки увеличивались соответственно в 2, 5 и 10 раз. Так как задача автомодельная, то предельное автомодельное решение зависит только от безразмерной координаты $x/(c_0 t)$. Наибольшее время выхода на автомодельный режим получено в расчетах с межфазной релаксацией. Выяснилось, что решение с $N = 25000$ можно считать автомодельным, поэтому все приведенные ниже результаты получены в расчетной области $0 < x < 75$ с числом узлов сетки $N = 25000$.

Результаты сравнения профилей давления для трех вариантов регуляризации представлены на рис. 6. Эти результаты полностью согласуются с данными аналитических исследований. Предельные решения, полученные с помощью метода вязкости и метода межфазной релаксации, совпадают и отличаются от решения, учитывающего дисперсию. Расчетные параметры УВ разрежения в (P, V) -координатах представлены на рис. 7. Видно, что эти параметры удовлетворяют требованиям допустимости разрывов для трех вариантов регуляризации уравнений газовой динамики.

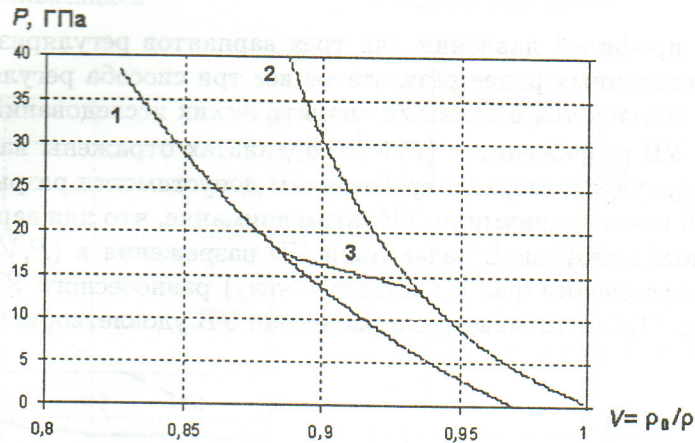


Рис. 5. Ударная адиабата для двухфазного УРСа: 1 — первая фаза; 2 — вторая фаза; 3 — смесь фаз

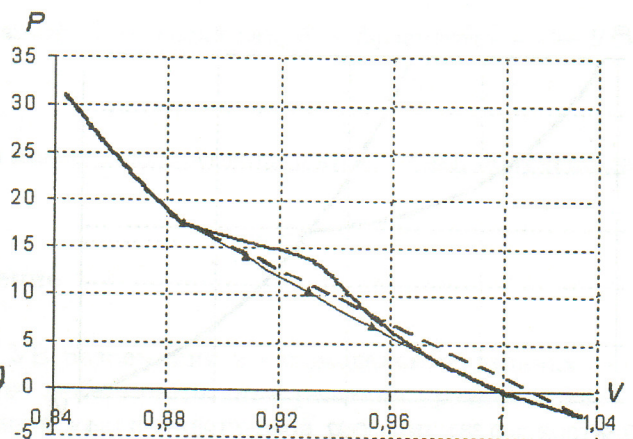
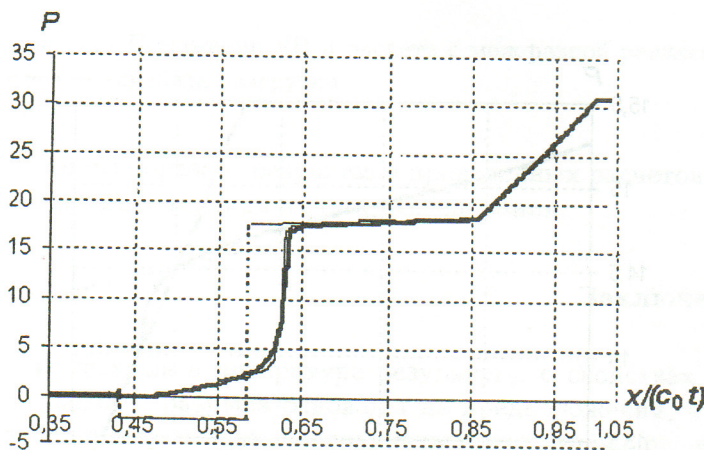


Рис. 6. Профиль давления в центрированной волне разрежения для УРСа без пересечения фаз в расчетах с регуляризацией: — — вязкостью; - - - дисперсией; — — межфазной релаксацией

Рис. 7. Положение УВ в расчетах с регуляризацией: — — вязкостью; - - - дисперсией; ▲ — межфазной релаксацией; — — адиабата разгрузки

Таблица 1

Параметры УРСа для задачи 1

$\rho_0, \text{г/см}^3$	$a_1, \text{ГПа}$	$b_1, \text{ГПа}$	n_1	$a_2, \text{ГПа}$	$b_2, \text{ГПа}$	n_2	$p_{12}, \text{ГПа}$	$p_{21}, \text{ГПа}$	$\Delta_{12}, \text{ГПа}$	$\Delta_{21}, \text{ГПа}$	$\tau, \text{мкс}$
7,85	6,9523	-6,9523	16	19,845	-23,824	6	12,1	18,6	3,2	3,2	0,04

требованиям допустимости разрывов для трех вариантов регуляризации уравнений газовой динамики.

2.2. Задача 2. Смесь двух фаз, когда УРСы чистых фаз пересекаются. В этом случае параметры допустимых УВ разрежения отличаются от параметров УВ, полученных методом исчезающей вязкости и исчезающей дисперсии.

Параметры УРСа для варианта пересечения фаз приведены в табл. 2.

УРСы каждой фазы в отдельности и равновесный УРС смеси фаз представлены на рис. 8. Из рис. 8,б следует, что в (P, V) -координатах все три УРСа пересекаются в одной точке.

Рассмотрим, как и ранее, центрированную волну разрежения для плоского слоя. Здесь также наибольшее время выхода на автомодельный режим получено в расчетах с межфазной релаксацией. В качестве окончательного варианта выбрана расчетная область $0 < x < 75$ с числом узлов сетки $N = 25\,000$.

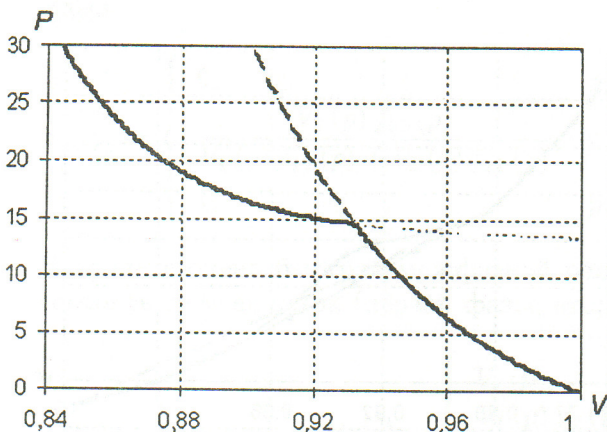
Результаты сравнения профилей давления для трех вариантов регуляризации представлены на рис. 9. В отличие от приведенных ранее результатов все три способа регуляризации дают разные решения, что полностью согласуется с данными аналитических исследований.

Расчетные параметры УВ разрежения в (P, V) -координатах отражены на рис. 10, 11,а. Из них следует, что эти параметры удовлетворяют требованиям допустимости разрывов для трех способов регуляризации уравнений газовой динамики. Обратим внимание, что для варианта пересечения фаз допустимая с точки зрения межфазной релаксации УВ разрежения в (P, V) -координатах обязана проходить через точку пересечения фаз и касаться (снизу) равновесного УРСа $v = V(p)$. Увеличенный фрагмент на рис. 11,б показывает, что расчетная УВ удовлетворяет этим требованиям.

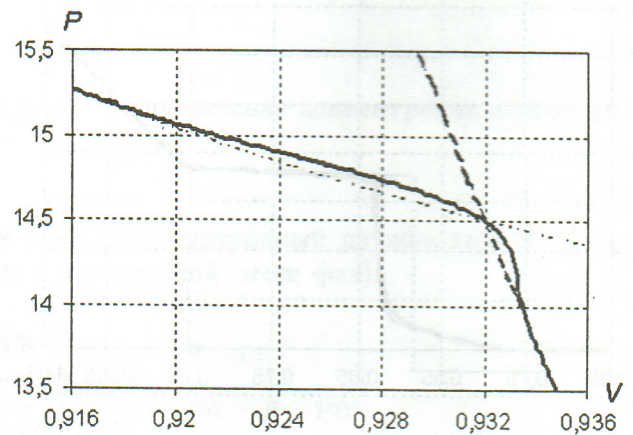
Таблица 2

Параметры УРСа для задачи 2

$\rho_0, \text{г/см}^3$	$a_1, \text{ГПа}$	$b_1, \text{ГПа}$	n_1	$a_2, \text{ГПа}$	$b_2, \text{ГПа}$	n_2	$p_{12}, \text{ГПа}$	$p_{21}, \text{ГПа}$	$\Delta_{12}, \text{ГПа}$	$\Delta_{21}, \text{ГПа}$	$\tau, \text{мкс}$
7,85	6,9523	-6,9523	16	0,2424	13,09027	25	13,8	15,45	1,2	1,15	0,04



а



б

Рис. 8. Двухфазный УРС с пересечением фаз: а — общий вид; б — фрагмент в окрестности точки пересечения; - - - — первая фаза; - · - · - — вторая фаза; — — смесь фаз

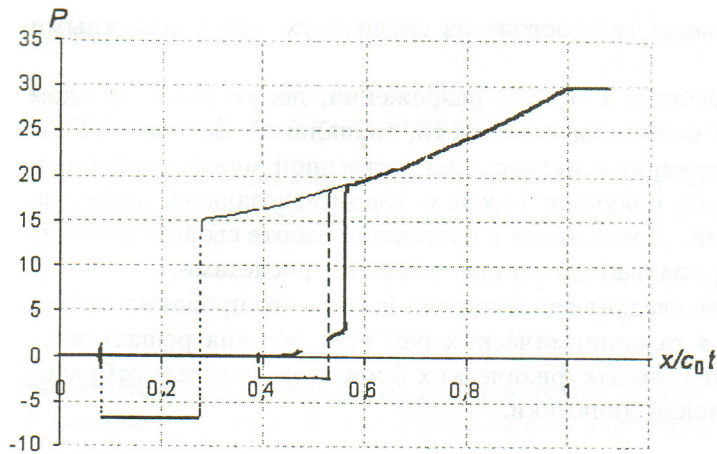


Рис. 9. Профиль давления в центрированной волне разрежения для УРСа с пересечением фаз в расчетах с регуляризацией: — — вязкостью; - - - - дисперсией; - - - - межфазной релаксацией

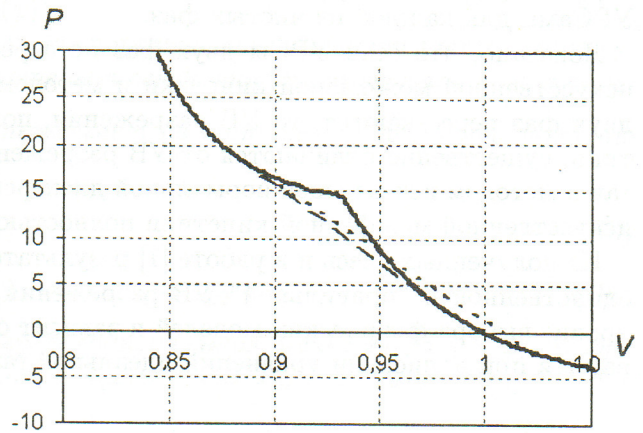


Рис. 10. Положение УВ в расчетах с регуляризацией: - - - - вязкостью; - - - - дисперсией; — — адиабата разгрузки

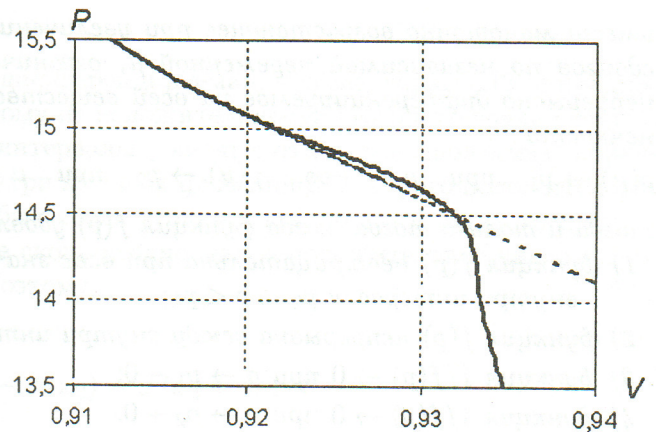
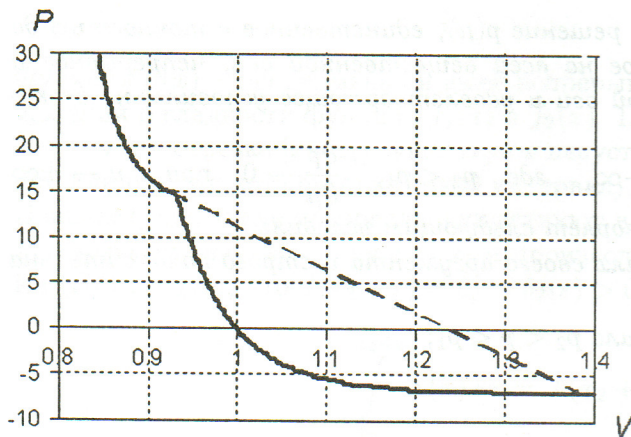


Рис. 11. Положение УВ в расчете с межфазной релаксацией: а — общий вид; б — фрагмент; - - - - УВ; — — адиабата разгрузки

Таким образом, результаты проведенных расчетов полностью подтверждают выводы, полученные с помощью аналитического исследования.

Заключение

Известные в литературе результаты о свойствах УВ разрежения в автомодельных задачах типа распада разрыва основаны на предположении, что любые разрывные решения уравнений газовой динамики должны получаться из гладких решений уравнений газовой динамики с вязкостью предельным переходом к бесконечно малому коэффициенту вязкости, т. е. методом исчезающей вязкости.

В настоящей работе для гладких невыпуклых УРСов в баротропном случае (т. е. когда давление зависит только от плотности) аналитическим исследованием получены свойства УВ разрежения для регуляризации уравнений газовой динамики с помощью искусственной межфазной кинетики.

В методе искусственной межфазной кинетики вещество состоит из смеси двух фаз с выпуклыми УРСами для каждой из чистых фаз.

Доказано, что если УРСы двух фаз не пересекаются, то УВ разрежения, полученные методом искусственной межфазной кинетики и методом исчезающей вязкости, совпадают. Если же УРСы двух фаз пересекаются, то УВ разрежения, полученные методом искусственной межфазной кинетики, существенно отличаются от УВ разрежения, полученных как методом исчезающей вязкости, так и методом исчезающей нормальной дисперсии. Доказанные в настоящей работе свойства метода искусственной межфазной кинетики полностью подтверждены одномерными расчетами.

Из полученных здесь и в работе [1] результатов следует однозначный вывод, что проблема отбора единственной и "правильной" УВ разрежения в газодинамических расчетах должна решаться на уровне выбора физических моделей и зависит от главных физических процессов, которые отбрасываются при написании уравнений идеальной газовой динамики.

Приложение. Технические леммы

Основная лемма 1. Уравнение вида

$$f(p) \frac{dp}{d\mu} = 1$$

имеет монотонно возрастающее при увеличении μ решение $p(\mu)$, единственное с точностью до сдвигов по независимой переменной μ , ограниченное на всей вещественной оси, непрерывное и непрерывно дифференцируемое на всей вещественной оси и удовлетворяющее условиям на бесконечности

$$p(\mu) \rightarrow p_1 \text{ при } \mu \rightarrow +\infty, \quad p(\mu) \rightarrow p_2 \text{ при } \mu \rightarrow -\infty, \quad \text{где } p_2 < p_1; \quad \frac{dp}{d\mu} \rightarrow 0 \text{ при } \mu \rightarrow \pm\infty$$

тогда и только тогда, когда функция $f(p)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция $f(p)$ неотрицательна при всех значениях своего аргумента и строго положительна внутри интервала $p_2 < p < p_1$;
- 2) функция $f(p)$ непрерывна всюду внутри интервала $p_2 < p < p_1$;
- 3) функция $1/f(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_1 - 0$;
- 4) функция $1/f(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_2 + 0$.

Достаточность условий 1—4 основной леммы для существования непрерывно дифференцируемого решения хорошо известна и регулярно используется при изучении УВ, размазанных с помощью искусственных и физических вязкостей. Доказательство необходимости приведено в [1].

Лемма 2 о двух непересекающихся выпуклых функциях и прямой. Пусть ограниченные дважды непрерывно дифференцируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ строго выпуклы:

$$\frac{d^2 f_k(x)}{dx^2} > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad k = 1, 2 \quad (\text{П1})$$

и не пересекаются, точнее, удовлетворяют условию

$$f_2(x) > f_1(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (\text{П2})$$

1. Пусть линейная функция (не вертикальная прямая) $h(x) = h_0 + xh_1$, где $h_0 = \text{const}$ и $h_1 = \text{const}$, пересекает (касание тоже называется здесь пересечением) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ соответственно так, что выполнены условия

$$f_k(x_k) = h(x_k), \quad k = 1, 2; \quad (\text{П3})$$

$$f_1(x) < h(x) < f_2(x), \quad \forall x : a \leq \min\{x_1; x_2\} < x < \max\{x_1; x_2\} \leq b. \quad (\text{П4})$$

Тогда функция $\beta(x) = J'(x)$, где $J(x) = \frac{f_2(x) - h(x)}{f_2(x) - f_1(x)}$, не меняет знак между точками $x = x_1$ и $x = x_2$. Точнее, при $x_2 < x_1$ функция $\beta(x)$ строго положительна всюду внутри интервала $x_2 < x < x_1$, а при $x_1 < x_2$ функция $\beta(x)$ строго отрицательна всюду внутри интервала $x_1 < x < x_2$.

2. Если линейная функция $h(x) = h_0 + xh_1$ не пересекает на отрезке $[a, b]$ функцию $f_2(x)$, но пересекает функцию $f_1(x)$ в двух точках x_{01} и x_{02} :

$$h(x) < f_2(x), \quad \forall x \in [a, b]; \quad (\text{П5})$$

$$f_1(x_{0k}) = h(x_{0k}), \quad k = 1, 2, \quad a < x_{01} < x_{02} < b, \quad (\text{П6})$$

то внутри интервала $x_{01} < x < x_{02}$ всегда существует единственная точка x_{03} , $x_{01} < x_{03} < x_{02}$, в которой функция $\beta(x) = J'(x)$ меняет знак, при этом $\beta(x) < 0$ для $x_{01} < x < x_{03}$ и $\beta(x) > 0$ для $x_{03} < x < x_{02}$.

Доказательство. При доказательстве первой части леммы будем рассматривать только случай, когда $x_2 < x_1$. Противоположный случай может быть получен заменой $x = -x$. Из (П3) следует, что $J(x_2) = 0$, $J(x_1) = 1$. Поэтому

$$\int_{x_2}^{x_1} \beta(x) dx = J(x_1) - J(x_2) = 1 > 0.$$

Функция $\beta(x)$ — непрерывная и даже непрерывно дифференцируемая, что следует из (П2) и предположений о гладкости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Поэтому из положительности этого интеграла следует, что внутри отрезка $[x_2; x_1]$ существуют непустые интервалы (связные открытые множества) конечной длины (или хотя бы один такой интервал), внутри которых функция $\beta(x)$ строго положительна. Докажем, что такие интервалы существуют в любых сколь угодно малых окрестностях точек x_2 и x_1 . Возьмем сначала точку $x = x_2$ и произвольное сколь угодно малое положительное число $\varepsilon > 0$. Из (П4) следует, что $J(x_2 + \varepsilon) = \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$. Поэтому

$$\int_{x_2}^{x_2 + \varepsilon} \beta(x) dx = J(x_2 + \varepsilon) - J(x_2) = J(x_2 + \varepsilon) > 0.$$

Отсюда получается, что для каждого $\varepsilon > 0$ внутри отрезка $[x_2; x_2 + \varepsilon]$ существует хотя бы один непустой связный открытый интервал, внутри которого функция $\beta(x)$ строго положительна. Аналогично, для каждого $\varepsilon > 0$ из (П4) следует, что $J(x_1 - \varepsilon) = 1 - \delta_1(\varepsilon) < 1$ и $\delta_1(\varepsilon) > 0$. Поэтому

$$\int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1} \beta(x) dx = J(x_1) - J(x_1 - \varepsilon) = 1 - J(x_1 - \varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) > 0.$$

Отсюда получается, что для каждого $\varepsilon > 0$ внутри отрезка $[x_1 - \varepsilon; x_1]$ существует хотя бы один непустой связный открытый интервал, внутри которого функция $\beta(x)$ строго положительна.

Таким образом, доказано, что существуют две последовательности точек $\{x_{2,n}\}$ и $\{x_{1,n}\}$ такие, что

$$\begin{aligned} x_2 < x_{2,n} < x_{1,n} < x_1, \quad \forall n = 1, 2, \dots; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2,n} = x_2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{1,n} = x_1; \\ \beta(x_{2,n}) > 0, \quad \beta(x_{1,n}) > 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Так как

$$\beta(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f_2(x) - h(x)}{f_2(x) - f_1(x)} \right) = \frac{f_2'(h - f_1) + f_1'(f_2 - h) - h_1(f_2 - f_1)}{(f_2 - f_1)^2},$$

то функция $\beta(x)$ положительна, отрицательна и равна нулю в тех и только тех точках, в которых соответственно положительна, отрицательна и равна нулю функция

$$\Omega(x) \equiv f_2'(x)(h(x) - f_1(x)) + f_1'(x)(f_2(x) - h(x)) - h_1(f_2(x) - f_1(x)) = \beta(x)(f_2 - f_1)^2. \quad (\text{П8})$$

Поэтому

$$\Omega(x_{2,n}) > 0, \quad \Omega(x_{1,n}) > 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Докажем, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ функция $\Omega(x)$ положительна внутри соответствующего интервала $x_{2,n} < x < x_{1,n}$. Предположим противное, т. е. что функция $\Omega(x)$ внутри этого интервала имеет отрицательные значения, хотя на краях интервала строго положительна. Тогда функция $\Omega(x)$ имеет внутри отрицательный минимум. А поэтому внутри интервала $x_{2,n} < x < x_{1,n}$ существует хотя бы один связный открытый интервал меньшего размера, на котором функция $\Omega(x)$ имеет отрицательную первую производную. Вычислим эту первую производную, которая существует, так как функция $\Omega(x)$ непрерывно дифференцируема:

$$\begin{aligned} \Omega'(x) &= \frac{d}{dx} [f_2'(h - f_1) + f_1'(f_2 - h) - h_1(f_2 - f_1)] = \\ &= f_2''(h - f_1) + f_2'(h' - f_1') + f_1''(f_2 - h) + f_1'(f_2' - h') - h_1(f_2' - f_1') = f_2''(h - f_1) + f_1''(f_2 - h). \end{aligned} \quad (\text{П9})$$

Из (П1)–(П4) следует, что эта производная строго положительна. Получаем противоречие, которое доказывает положительность функции $\Omega(x)$ внутри каждого интервала $x_{2,n} < x < x_{1,n}$. Из (П7) теперь следует, что функция $\Omega(x)$ положительна внутри интервала $x_2 < x < x_1$. А поэтому внутри интервала $x_2 < x < x_1$ строго положительна и функция $\beta(x)$, что завершает доказательство первой части леммы 2.

Докажем вторую часть леммы 2. Из предположений (П5), (П6) и формулы (П9) следует, что на отрезке $x_{01} \leq x \leq x_{02}$ функция $\Omega'(x)$ строго положительна. Поэтому функция $\Omega(x)$ и, с учетом формулы (П8), функция $\beta(x)$ могут иметь не более одного нуля внутри отрезка $x_{01} \leq x \leq x_{02}$. Из (П6) следует, что в некотором интервале $x_{01} < x < x_{01} + \varepsilon$ всегда существует подынтервал, в котором функция $\beta(x)$ отрицательна, и в некотором интервале $x_{02} - \varepsilon < x < x_{02}$ всегда существует подынтервал, в котором функция $\beta(x)$ положительна. Поэтому функция $\beta(x)$ всегда имеет нуль внутри интервала $x_{01} < x < x_{02}$, который, как уже доказано, единственный, что завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3 о двух выпуклых функциях и прямой, проходящих через одну точку. Пусть ограниченные, дважды непрерывно дифференцируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — строго выпуклые:

$$\frac{d^2 f_k(x)}{dx^2} > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad k = 1, 2 \quad (\text{П10})$$

и пересекаются без касания в точке $x = x_0$ так, что выполнены условия

$$\begin{aligned} f_2(x) &> f_1(x), \quad \forall x : x_0 < x \leq b; \\ f_1(x) &> f_2(x), \quad \forall x : a \leq x < x_0; \\ f_1(x_0) &= f_2(x_0) \equiv f_0; \\ \left. \frac{df_1}{dx} \right|_{x=x_0} &< \left. \frac{df_2}{dx} \right|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Пусть линейная функция (не вертикальная прямая) $h(x) = h_0 + xh_1$, где $h_0 = \text{const}$ и $h_1 = \text{const}$, проходит через точку (x_0, f_0) (точку пересечения выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$) и дополнительно пересекает (без касания) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ соответственно так, что выполнены условия

$$\begin{aligned} f_k(x_0) &= h(x_0) = f_0, \quad f_k(x_k) = h(x_k), \quad k = 1, 2; \\ f_2(x) &< h(x) < f_1(x), \quad \forall x : a < x_2 < x < x_0; \\ f_1(x) &< h(x) < f_2(x), \quad \forall x : x_0 < x < x_1 \leq b. \end{aligned}$$

Тогда функция $\beta(x) = \frac{dJ(x)}{dx}$, где $J(x) = \frac{f_2(x) - h(x)}{f_2(x) - f_1(x)}$, строго положительна всюду внутри интервалов $x_2 < x < x_0$ и $x_0 < x < x_1$. Функция $J(x)$ может быть доопределена по непрерывности в точке $x = x_0$ так, что она становится непрерывно дифференцируемой всюду, а функция $\beta(x)$ при этом становится всюду непрерывной и строго положительной для всех x внутри интервала $x_2 < x < x_1$, в том числе в точке $x = x_0$.

Доказательство этой леммы проводится с помощью первой части леммы 2 о двух выпуклых функциях и прямой и с использованием предельных переходов "по непрерывности". Прежде всего заметим, что из условий леммы следует неравенство

$$f'_{10} \equiv \left. \frac{df_1}{dx} \right|_{x=x_0} < \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=x_0} = h_1 < \left. \frac{df_2}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv f'_{20}. \quad (\text{П11})$$

Из разложений функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $x = x_0$ получаем

$$J(x) = \frac{(x-x_0)(f'_{20} - h_1) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''_{20} + o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)(f'_{20} - f'_{10}) + \frac{(x-x_0)^2}{2} (f''_{20} - f''_{10}) + o((x-x_0)^2)} = \frac{f'_{20} - h_1}{f'_{20} - f'_{10}} + O(x-x_0),$$

где использованы обозначения для вторых производных в точке $x = x_0$

$$\left. \frac{d^2 f_k}{dx^2} \right|_{x=x_0} \equiv f''_{k0}, \quad k = 1, 2.$$

Поэтому функцию $J(x)$ можно доопределить в точке $x = x_0$ конечным значением

$$J(x_0) = \frac{f'_{20} - h_1}{f'_{20} - f'_{10}},$$

и тогда функция $J(x)$ будет непрерывной для всех $x \in [a; b]$. При этом в силу (П11)

$$0 < J(x_0) < 1.$$

Аналогично, подставим в выражение для производной

$$\beta(x) = \frac{dJ(x)}{dx} = \frac{(f'_2 - h')(f_2 - f_1) - (f'_2 - f'_1)(f_2 - h)}{(f_2 - f_1)^2}$$

разложения в ряды Тейлора функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ и получим

$$\beta(x) = \frac{(h_1 - f'_{10}) f''_{20} + (f'_{20} - h_1) f''_{10}}{2(f'_{20} - f'_{10})^2} + o(1), \quad |x - x_0| \ll 1. \quad (\text{П12})$$

Отсюда видно, что функцию $\beta(x)$ можно доопределить в точке $x = x_0$ значением

$$\beta(x_0) = \frac{(h_1 - f'_{10}) f''_{20} + (f'_{20} - h_1) f''_{10}}{2(f'_{20} - f'_{10})^2} > 0, \quad (\text{П13})$$

после чего она становится непрерывной. Положительность значения (П13) следует из (П11) и (П10).

Так как функция $\beta(x)$ непрерывна, то в силу (П12) и (П13) она будет положительной и в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Докажем с помощью леммы 2, что она будет положительной и внутри интервалов $x_2 < x < x_0$ и $x_0 < x < x_1$.

Рассмотрим сначала интервал $x_0 < x < x_1$. Для любого $\varepsilon > 0$ возмущим функцию $f_1(x)$ в маленьком интервале $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ так, чтобы при сохранении всех остальных свойств она на этом

интервале стала строго меньше, чем $f_2(x)$. Тогда для функции $f_2(x)$ и возмущенной функции $f_1(x)$ на интервале $[a; b] = [x_0 - \varepsilon; b]$ применима первая часть леммы 2, из которой следует, что функция $\beta(x)$ будет строго положительна для всех x таких, что $x_0 - \varepsilon < x < x_1$. Поэтому функция $\beta(x)$, в частности, будет строго положительна на интервале $x_0 + \varepsilon < x < x_1$, на котором функция $f_1(x)$ не возмущалась и осталась неизменной. Устремляя $\varepsilon > 0$ к нулю, получаем, что функция $\beta(x)$ будет строго положительна всюду внутри интервала $x_0 < x < x_1$.

Интервал $x_2 < x < x_0$ рассматривается аналогично, только перед обращением к лемме 2 следует поменять местами функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, возмущать функцию $f_2(x)$ вместо $f_1(x)$ и использовать самое последнее утверждение леммы 2 с последующей заменой знака. В результате лемма о двух выпуклых функциях и прямой, проходящих через одну точку, доказана полностью.

Список литературы

1. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталеv В. В. Неединственность ударных волн разрежения: влияние вязкости и дисперсии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 3–12.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1963.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
4. Галин Г. Я. К теории ударных волн // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 55–58.
5. Ахмадеев Н. Х., Нигматуллин Р. И. Ударные волны и фазовые превращения в железе // Журнал прикладной механики и технической физики. 1976. № 5. С. 128–135.
6. Ахмадеев Н. Х., Ахметова Н. А., Нигматуллин Р. И. Структура ударно-волновых течений с фазовыми превращениями в железе вблизи свободной поверхности // Там же. 1984. № 6. С. 113–119.
7. Баталов В. А., Свидинский В. А., Селин В. И., Софронов В. Н. Программа УП для решения одномерных газодинамических и упругопластических задач механики сплошной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 1 (1). С. 21–28.