

УДК 519.6

## АЛГОРИТМЫ СГЛАЖИВАНИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТАМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ТОЧЕК НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ЭВМ

С. М. Бахрах, В. В. Борляев, Н. А. Володина, М. О. Зайцева,  
А. Д. Ковалева, О. Н. Кулыгина, Л. А. Рябчун  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Работа посвящена исследованию нескольких видов операторов сглаживания высокочастотных возмущений поля скоростей в рамках комплекса ЛЭГАК-2D применительно к расчетам на большом числе точек.

Приводятся результаты тестовых расчетов с использованием предложенных операторов сглаживания. Даются рекомендации по их применению.

### Введение

Во многих численных методиках, предназначенных для расчета нестационарных течений сплошной среды на регулярных счетных сетках, в том числе в методике ЛЭГАК-2D [1], используются операторы сглаживания высокочастотных возмущений поля скоростей. Без использования подобных операторов сглаживания из-за развития возмущений становится невозможным счет на лагранжевых и лагранжево-эйлеровых счетных сетках.

В связи с развитием вычислительной техники, внедрением вычислительных систем с распределенной памятью, обеспечивающих счет в параллельном режиме, наблюдается естественная тенденция перехода ко все более подробным счетным сеткам, к увеличению числа точек. Тем самым увеличивается спектр возмущений, которые присутствуют в расчетах, появляются возмущения, которых при меньшем числе точек в решении не было.

Возмущения могут иметь различную природу (происхождение):

1. Физические возмущения, которые определяются характером процесса. Для описания таких возмущений на длину волны возмущения должно приходиться определенное число счетных точек в зависимости от типа счетной методики (в методике ЛЭГАК-2D на длину волны физических возмущений должно приходиться не менее 10–12 точек).

2. Возмущения поля скоростей чисто счетного характера, обусловленные прежде всего погрешностями вычислений и аппроксимации. Это коротковолновые возмущения.

Операторы сглаживания должны действовать избирательно: устранять коротковолновые и практически не искажать физические возмущения.

В данной работе анализируются и модернизируются различные алгоритмы сглаживания высокочастотных возмущений поля скоростей применительно к расчетам с большим числом точек по методике ЛЭГАК-2D.

### 1. Операторы сглаживания

В комплекс программ ЛЭГАК-2D [1, 2] введены различные виды операторов сглаживания:

- разностями четвертого порядка с весовыми коэффициентами вдоль линий счетной сетки [3];
- типа физической вязкости;
- Чена [4].

Остановимся на каждом из них подробнее.

**Оператор сглаживания разностями четвертого порядка.** В комплексе программ ЛЭГАК-2D функцию стандартного сглаживания высокочастотных возмущений поля скоростей

выполняет оператор, введенный ранее в методике Сигма [5]. Этот оператор сглаживания действует на составляющие скорости вдоль некоторого направления относительно линий сетки и является оператором четвертых разностей. Сглаживание осуществляется в два этапа и соответственно применяется к:

- 1) нормальным к строкам сетки компонентам скорости (сглаживание вдоль строк);
- 2) нормальным к столбцам сетки компонентам скорости (сглаживание вдоль столбцов).

На каждом этапе оператор сглаживания  $B$  расщепляется на произведение операторов второго порядка:

$$BU = (E + \beta A)(E - \beta A)U, \quad (1)$$

где  $A$  — оператор вторых разностей;  $U$  — нормальные составляющие вектора скорости к линии счетной сетки.

Рассмотрим более подробно структуру оператора сглаживания, действующего вдоль строк (рис. 1).

Оператор сглаживания действует на составляющие скорости, ортогональные к строке. Нормаль к строке в точке  $(i, k)$  определяется как вектор, ортогональный вектору  $\vec{r}_{i,k} - \vec{r}_{i,k+1}$ . Обозначим новые составляющие векторов, ортогональные к строке  $\tilde{U}$ . Согласно (1) сначала действует оператор вторых разностей

$$\tilde{U}_{i,k} = U_{i,k} - \beta \left[ \lambda_{k,1}(U_{i,k+1} - U_{i,k}) - \lambda_{k,0}(U_{i,k} - U_{i,k-1}) \right], \quad (2)$$

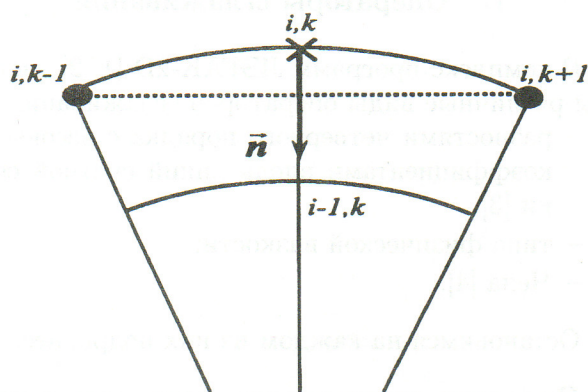


Рис. 1. Фрагмент сетки

где  $\lambda$  — весовые множители:

$$\lambda_{k,0} = \frac{y_{i,k-1} + y_{i,k}}{2y_{i,k}}; \quad \lambda_{k,1} = \frac{y_{i,k+1} + y_{i,k}}{2y_{i,k}}. \quad (3)$$

Далее на полученный вектор действует оператор  $B_2$ , который отличается от  $B_1$  лишь знаком при коэффициенте  $\beta$ .

Результирующий оператор является оператором четвертых разностей и обладает высокой избирательностью. Анализ устойчивости этого оператора методом гармоник приводит к ограничению на коэффициент сглаживания  $\beta \leq 5/16$ .

Видно, что данный оператор сглаживания действует только на сдвиговые возмущения, направленные вдоль выбранного направления (рис. 2, а, б) и не действует на возмущения типа сжатия (рис. 2, в).

Выбор направления, на которое проецируются вектор скорости в данной точке, имеет важное значение. Стандартно это направление определяется вектором, ортогональным разности радиус-векторов в соседних ячейках (см. рис. 1).

Данный способ определения направления является эффективным в задачах, в которых не происходит сильной деформации сетки. Однако когда сетка искажена (рис. 3), действие оператора сглаживания с таким определением направления проецирования оказывается неэффективным и приводит в ряде случаев к еще большему искажению счетной сетки.

То же самое касается неравномерных (например по углу) сеток. Если течение при этом сферически-симметричное, то после использования оператора сглаживания (с указанным определением направления проецирования) на границе между разными шагами сетки по углу будет нарушаться симметрия решения.

Чтобы избежать отмеченных выше недостатков стандартного выбора направления, было предложено использовать следующий алгоритм:

- 1) если сглаживание производится вдоль строки для точки  $(i, k)$ , то в качестве направления, на которое проецируются скорости, используется направление линии, соединяющей первую  $(1, k)$  и последнюю  $(ni, k)$  точки данного столбца;
- 2) если сглаживание производится вдоль столбца для точки  $(i, k)$ , то соответствующее направление определяется перпендикуляром к прямой, соединяющей первую и последнюю точки данного столбца.

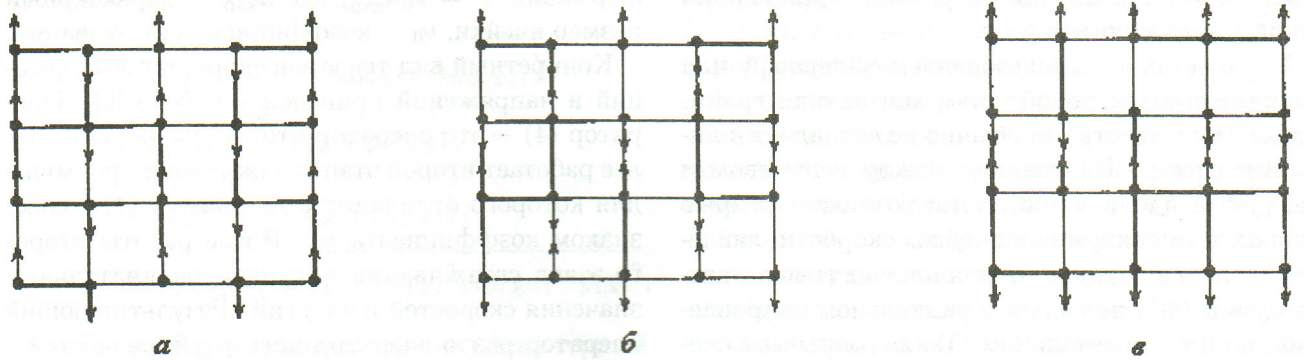


Рис. 2. Виды возмущений поля скоростей: а — сдвиговые возмущения; б — шахматобразные возмущения; в — возмущения типа сжатия-растяжения

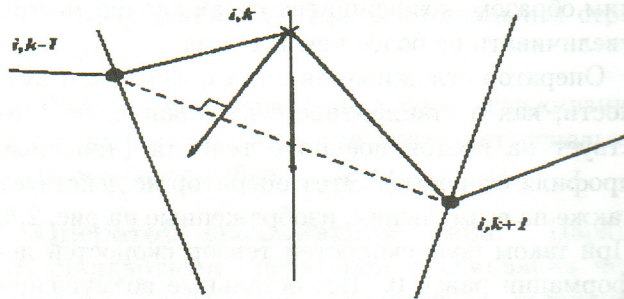


Рис. 3. Определение нормали на неравномерной сетке

Назовем такой выбор направления сглаживания *новым*. Новый способ сглаживания обеспечивает возможность проводить расчеты с большим числом точек в лагранжево-эйлеровой постановке.

Для коэффициента сглаживания существует ограничение  $\beta \leq 5/16$ . Однако при расчетах с большим числом точек (несколько тысяч столбцов) возникает необходимость в увеличении коэффициента сглаживания. В связи с этим предложено усиливать действие сглаживания не только за счет увеличения коэффициента, но и за счет многократного применения оператора сглаживания.

В результате двукратного действия оператора сглаживания получаем

$$\tilde{U} = U - 2\beta^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \beta^4 \frac{\partial^8 U}{\partial x^8},$$

в результате трехкратного действия —

$$\tilde{U} = U - 3\beta^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 3\beta^4 \frac{\partial^8 U}{\partial x^8} - \beta^6 \frac{\partial^{12} U}{\partial x^{12}}.$$

Таким образом, трехкратное сглаживание представляет собой суперпозицию операторов четвертых, восьмых и двенадцатых разностей. При увеличении кратности действия оператора сглаживания ведущими остаются четвертые разности. При этом коэффициент при четвертой производной увеличивается в  $\sqrt{n}$  раз, где  $n$  — кратность сглаживания. Если оператор сглаживания применяется  $n$  раз, то максимальными будут разности порядка  $4n$ .

Оператор сглаживания высокочастотных возмущений поля скоростей традиционно действует в конце счетного шага расчета газодинамических уравнений после того, как определены величины в ячейках (плотность, внутренняя энергия и т. д.). Исследовалась возможность повысить эффективность сглаживания за счет сглаживания скоростей перед счетом величин в ячейках и дополнительного сглаживания ускорений. Расчеты, результаты которых приводятся в разд. 2, показали, что существенного улучшения ситуации таким путем достигнуть не удастся.

Рассматривалась модификация оператора сглаживания с учетом сохранения полной энергии. Как показали расчеты, при этом, естественно, уменьшается дисбаланс, но возникает тенденция к понижению степени сжатия.

Раньше считалось, что в расчетах на эйлеровой сетке алгоритм сглаживания применять не нужно, так как сетка не портится, да и донорный метод пересчета величин обладает дополнительным сглаживающим механизмом. Однако в расчетах на большом числе точек ( $> 1000$  столбцов) с использованием эйлеровой сетки начинают возникать счетные возмущения в скоростях и других величинах. Поэтому возникает необходи-

мость в использовании оператора сглаживания на эйлеровых сетках.

В расчетах с использованием эйлеровой или лагранжево-эйлеровой сетки контактная граница между веществами обычно не совпадает с линиями сетки. На границе между веществом и вакуумом вдоль линий сетки возникает разрыв скорости (в вакуумных ячейках скорости, давление и энергия зануляются, а плотность полагается  $\rho_0 = 0,001$ ) не только в радиальном направлении, но и в азимутальном. Такие разрывы в скорости начинают интенсивно сглаживаться. Это приводит к уменьшению модуля скорости контактной границы и ее искажению. Для устранения этого недостатка было предложено два способа.

Первый способ — это обход ячеек, содержащих малоплотные вещества (вакуум), т. е. скорости в узлах сетки, окрестность которых содержит вакуум, исключаются из процедуры сглаживания; остальные ячейки обсчитываются стандартным образом. Лагранжевы линии в этом случае сглаживаются всегда.

Второй способ — это введение массовых весовых коэффициентов  $\lambda_0, \lambda_1$ . Стандартно при сглаживании в качестве весовых коэффициентов используются отношения ординат точек (см. формулу (3)). В этой формуле учитывается только расположение соседних точек относительно друг друга. По аналогии с этой записью массовые весовые коэффициенты будут иметь следующий вид:

$$\lambda_{0k} = \frac{m_{\text{реб}}(k-1, k)}{m_{\text{узл } k}}; \quad \lambda_{1k} = \frac{m_{\text{реб}}(k, k+1)}{m_{\text{узл } k}}.$$

Использование таких весовых коэффициентов позволяет автоматически исключать сглаживание в окрестности малоплотных веществ.

Обе эти возможности (массовые весовые коэффициенты и обход вакуумных ячеек при сглаживании высокочастотных возмущений поля скорости) были введены в комплекс программ ЛЭГАК-2D.

**Оператор сглаживания типа физической вязкости.** В качестве операторов сглаживания предлагается использовать следующие функции тензора скоростей деформации:

$$\hat{U} = \bar{U} + \frac{1}{\rho} \text{div} S, \quad \frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{sp}(S \cdot D). \quad (4)$$

Здесь  $S = 2\nu \hat{D}$  — девиатор тензора вязких напряжений;  $\hat{D} = D - \frac{1}{3} \text{sp} DJ$ ,  $D$  — тензор де-

формаций;  $\nu = \nu_0 h_{\text{хар}}^2$ , где  $h_{\text{хар}}$  — характерный размер ячейки,  $\nu_0$  — коэффициент сглаживания.

Конкретный вид тензоров скоростей деформаций и напряжений приведен в работе [6]. Оператор (4) — это оператор вторых разностей. Далее работает второй этап сглаживания, формулы для которого отличаются от формул (4) только знаком коэффициента  $\nu_0$ . После работы второго этапа сглаживания получаем окончательные значения скоростей и энергий. Результирующий оператор — это оператор четвертых разностей.

По умолчанию  $\nu_0 = 1/16$ , такое значение коэффициента сглаживания выбрано из условия совпадения со стандартным оператором на плоских пилообразных возмущениях. Из условия устойчивости этого оператора получаем  $\nu_0 \leq 1/8$ . Таким образом, коэффициент сглаживания можно увеличивать не более чем в 2 раза.

Оператор сглаживания типа физической вязкости, как и стандартное сглаживание, не действует на постоянное поле течения (линейные профили скорости). Этот оператор не действует также на возмущения, изображенные на рис. 2, б. При таком поле скоростей тензор скоростей деформации равен 0. Все остальные возмущения под действием оператора сглаживаются пропорционально четвертой степени номера гармоники.

Еще одной особенностью оператора сглаживания типа физической вязкости по сравнению со стандартным оператором сглаживания является то, что для данного оператора отсутствуют избранные направления сглаживания. Таким образом, он действует на возмущения скорости типа сжатия и типа сдвига одновременно. Однако часто необходимо усилить действие оператора сглаживания только на один тип возмущений поля скорости. Поэтому данный оператор был разложен на два независимых:

- 1) оператор сглаживания вдоль столбцов возмущений, направленных вдоль столбцов сетки (возмущения типа сжатия). Этот оператор был приведен к виду (2) со следующими весовыми множителями  $\lambda$ :

$$\lambda_{i,0} = -\frac{1}{4} \frac{h_{\text{хар}, i, k+1/2}^2 \rho_{i, k+1/2}}{M_{\text{окр}, i, k} S_{i, k+1/2}} \times \\ \times (\Delta r x_{i-1, k-1} + \Delta r x_{i-1, k+1} + \Delta r x_{i, k-1} + \Delta r x_{i, k+1}); \\ \lambda_{i,1} = -\frac{1}{4} \frac{h_{\text{хар}, i+1, k+1/2}^2 \rho_{i+1, k+1/2}}{M_{\text{окр}, i, k} S_{i+1, k+1/2}} \times \\ \times (\Delta r x_{i+1, k-1} + \Delta r x_{i+1, k+1} + \Delta r x_{i, k-1} + \Delta r x_{i, k+1}),$$

где

$$h_{\text{хар},i,k+1/2} = \frac{1}{2} (h_{\text{хар},i,k} + h_{\text{хар},i,k+1});$$

$$\rho_{i,k+1/2} = \frac{1}{2} (\rho_{i,k} + \rho_{i,k+1});$$

$$S_{i,k+1/2} = \frac{1}{2} (S_{i,k} + S_{i,k+1});$$

$$\Delta r x_{i,k-1} = \sqrt{(x_{i,k-1} - x_{i,k})^2 + (y_{i,k-1} - y_{i,k})^2};$$

$h_{\text{хар},i,k}$ ,  $S_{i,k}$  — соответственно характерный размер и площадь ячейки  $(i, k)$ ;

- 2) оператор сглаживания вдоль строк возмущений, ортогональных строкам сетки (возмущения типа сдвига). Этот оператор аналогичен предыдущему, записанному для возмущений скорости, ортогональных строкам.

Такая модификация оператора сглаживания типа физической вязкости позволяет использовать его более гибко.

**Оператор сглаживания Чена.** Наряду со стандартным оператором сглаживания четвертыми разностями и оператором сглаживания типа физической вязкости в комплекс программ ЛЭГАК-2D введена процедура сглаживания, основанная на формуле, предложенной Ченом, с массовыми коэффициентами Дали [4]. Ранее этот оператор был введен в методику Д [7] и хорошо себя зарекомендовал.

Оператор сглаживания Чена обладает следующими свойствами:

- сохранением сферического течения;
- инвариантностью относительно преобразования Галилея;
- сохранением импульса вдоль оси симметрии.

Сглаживание осуществляется по формулам

$$\tilde{\tilde{u}}_{i,k} = \tilde{u}_{i,k} + A(\tilde{u}_{i,k});$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{i,k} = \tilde{u}_{i,k} - A(\tilde{\tilde{u}}_{i,k}),$$

$$A(\tilde{u}_{i,k}) = \beta \left\{ \frac{m_{i,k} + m_{i,k-1}}{m_{i,k}} [\delta^2(\tilde{u}_{i,k-1}) - \delta^2(\tilde{u}_{i,k})] + \frac{m_{i,k} + m_{i,k+1}}{m_{i,k}} [\delta^2(\tilde{u}_{i,k+1}) - \delta^2(\tilde{u}_{i,k})] \right\},$$

где  $\delta^2(\tilde{u}_{i,k})$  — оператор вторых разностей вдоль линии сетки:

$$\delta^2(\tilde{u}_{i,k}) = \tilde{u}_{i+1,k} - 2\tilde{u}_{i,k} + \tilde{u}_{i-1,k};$$

$m_{i-1,k}$ ,  $m_{i,k}$ ,  $m_{i+1,k}$  — массы узлов  $(i-1, k)$ ,  $(i, k)$ ,  $(i+1, k)$ , т. е. среднее арифметическое масс ячеек, окружающих данный узел.

В отличие от оператора стандартного сглаживания для определения новой скорости здесь используются скорости не двух соседних точек, а всех восьми, окружающих данную (рис. 4).

Таким образом строится оператор сглаживания для внутренних точек.

Оператор сглаживания Чена не действует на сдвиговые возмущения (см. рис. 2,а) и на возмущения чистого сжатия-разрежения (см. рис. 2,в) — такие возмущения гасятся газодинамической схемой, однако действует на шахматобразные возмущения поля скоростей, образующиеся при сжатии-разрежении (см. рис. 2,б).

Воздействие операторов сглаживания, реализованных в комплексе программ ЛЭГАК-2D, на различные виды возмущений поля скоростей отражено в таблице.

#### Воздействие операторов сглаживания на различные виды возмущений поля скоростей

Вид сглаживания	Тип возмущения		
	Сдвиг	Шахматобразное	Сжатие-растяжение
Стандартное	+	+	-
Физ. вязкостью	+	-	+
Чена	-	+	-

## 2. Результаты тестовых расчетов

Приведенные в разд. 1 операторы сглаживания опробовались на различных тестовых задачах [8]. Целью расчетов являлось исследование возможности их проведения на счетных сетках с большим числом ( $\sim 10^6$ ) счетных точек. Особо рассматривались сетки в областях, содержащих центральную точку и большое число столбцов ( $\sim 10^3$ ). Расчеты проводились как в лагранжевой, так и лагранжево-эйлеровой постановке. В последнем случае рассматривались сетки с фиксированным положением столбцов.

Рассматривалась задача об обжатию газа оболочкой.

В области I ( $8 \leq r \leq 10$ ) находится идеальный газ ( $\gamma = 5/3$ ) с начальной плотностью  $\rho_0^I = 25$  и нулевыми значениями скорости и давления.

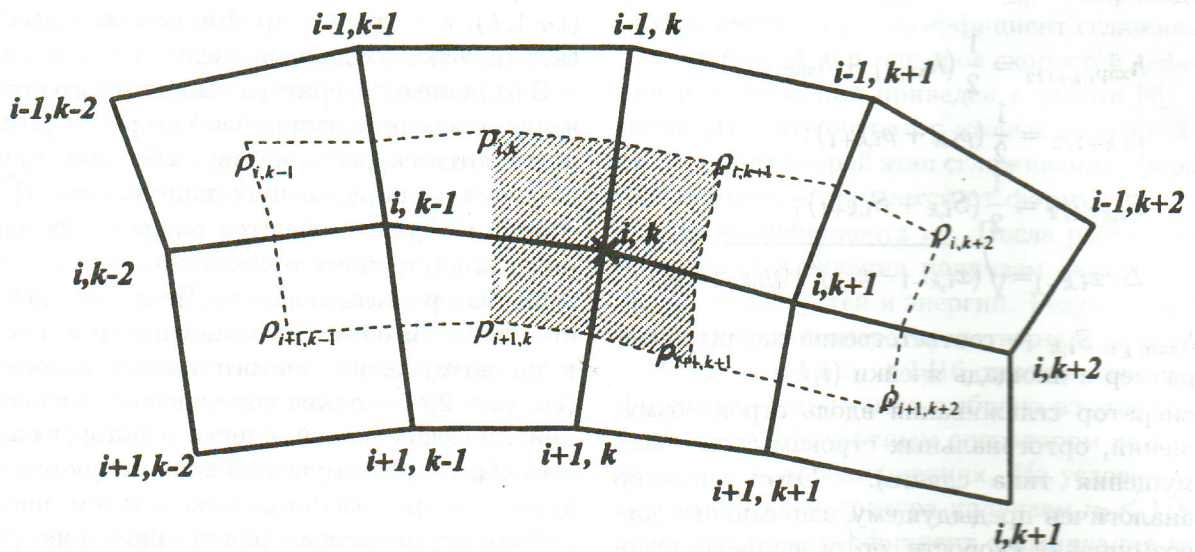


Рис. 4. Счетный шаблон для оператора сглаживания Чена

В области II ( $0 \leq r \leq 8$ ) также заключен идеальный газ ( $\gamma = 5/3$ ) с нулевыми скоростью и давлением, начальная плотность которого  $\rho_0^{\text{II}} = 1$ . Из расчетов рассматриваемой задачи на сходимость, проведенных по многим одномерным методикам, известно значение радиуса внутренней границы области I, отвечающее максимальному сжатию области II:  $R_{\text{min}} = 1,7$  [8]. Исходным являлся расчет на сетке, содержащей 21 строку и 37 столбцов (сетка  $N$ ). Были проведены расчеты на сходимость; число строк и столбцов последовательно удваивалось (расчеты  $2N$ ,  $4N$  и т. д.).

Особенностью этого теста является наличие сходящейся к центру и отраженной от центра ударных волн. Если не применять специальных мер, о которых будет сказано ниже, то возникает нарушение симметрии решения. Существенными для обеспечения стабильности решения явились модификации оператора сглаживания, описанные в разд. 1, и использование векторно-квадратичной вязкости [9, 10].

Из проведенных расчетов следует, что для обеспечения стабильности решения на большом числе точек необходимо использование:

- 1) сетки с фиксированными столбцами;
- 2) векторной квадратичной вязкости [9];
- 3) сглаживания по двум направлениям (вдоль строк и вдоль столбцов);
- 4) оператора сглаживания, в котором направление проектирования скорости связано с

фиксированными столбцами;

- 5) многократного действия оператора сглаживания для увеличения коэффициента сглаживания без нарушения устойчивости оператора.

Используя эти рекомендации, удается проводить расчеты по методике ЛЭГАК-2D с числом столбцов в центральной области порядка нескольких тысяч. Число столбцов в счетных областях, не содержащих центр, практически не ограничено.

Как показали проведенные расчеты, использование модифицированного оператора сглаживания, векторной квадратичной вязкости и разностной схемы счета газодинамических уравнений, в которой ускорения определяются на сторонах счетной ячейки [11, 12], обеспечивает сохранение симметрии решения на неравномерной по углу счетной сетке.

Оператор сглаживания Чена оказался эффективным при расчете задачи об обжатии эллипсоида постоянным давлением (задача Шульца) [13].

На эллипсоид, длины полуосей которого равны соответственно 1 и 1,516 (рис. 5), действует давление, которое с течением времени меняется по закону

$$P = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 5; \\ 5, & t \geq 5. \end{cases}$$

В начальный момент времени счетная область разбивалась равномерно по углу на 10 столбцов, по радиусу — на 9 строк.

В данной задаче возникает достаточно сложное течение, происходит изменение соотношения длин полуосей, что сопровождается сильной деформацией счетной сетки (рис. 6). При использовании стандартного сглаживания и его модификаций задачу удастся досчитать до времени  $\sim 11$  (см. рис. 6). Использование оператора типа физической вязкости обеспечивает счет до времени  $\sim 20$ . Сглаживание оператором Чена позволяет, несмотря на сильные искажения счетной сетки (рис. 7), провести расчет до времени  $\geq 100$ .

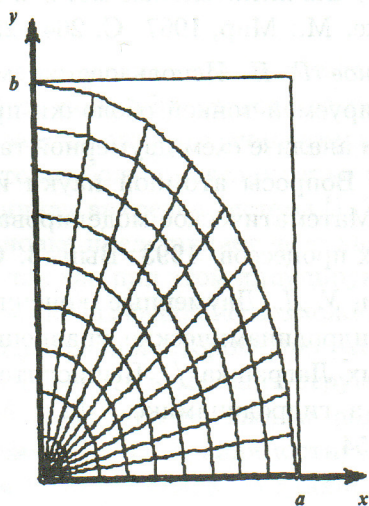


Рис. 5. Начальная геометрия задачи Шульца

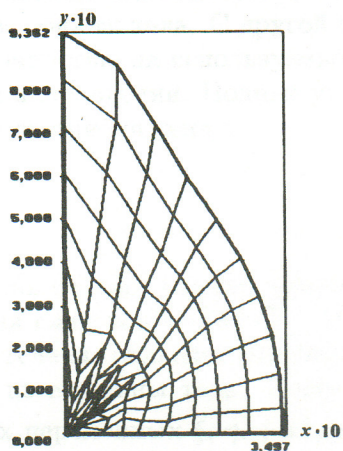


Рис. 6. Сетка в расчете со стандартным сглаживанием на момент времени  $t = 10,89$

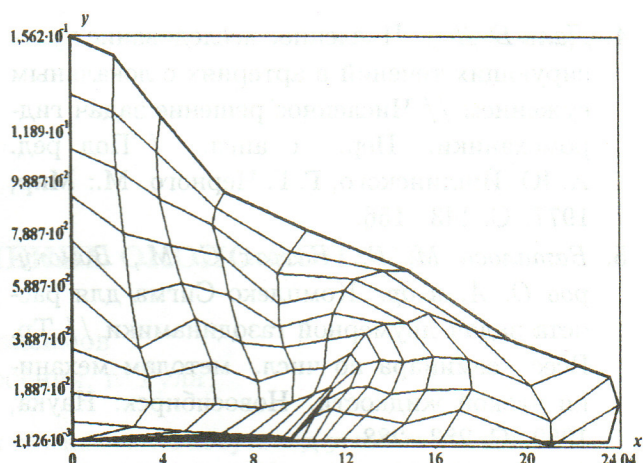


Рис. 7. Сетка в расчете со сглаживанием Чена на момент времени  $t = 100$

### Заключение

Основным результатом данной работы является возможность проведения расчетов с большим числом столбцов (в центральных областях порядка  $10^3$ , в областях, не содержащих центр, — практически без ограничения). Это важно для обеспечения эффективности многопроцессорного счета.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00796 и 03-01-06539).

### Список литературы

1. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 4. С. 829—833.
2. Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бахрах С. М. и др. Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принцип реализации комплекса на многопроцессорной ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 14—18.
3. Загускин В. Л. Методы расчета задач механики сплошной среды. Ростов, 1979.

4. Дали Б. Дж. Численное исследование пульсирующих течений в артериях с локальным сужением // Численное решение задач гидромеханики: Пер. с англ. / Под ред. А. Ю. Ишлинского, Г. Г. Черного. М.: Мир, 1977. С. 143—156.
5. Баталова М. В., Бахрах С. М., Винокуров О. А. и др. Комплекс Сигма для расчета задач двумерной газодинамики // Тр. Всес. семинара по числ. методам механики вязкой жидкости. Новосибирск: Наука, 1969. С. 283—288.
6. Бахрах С. М., Ковалева А. Д., Гавлуша И. Н. Метод расчета упругопластических течений // Тр. III Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 1974. С. 22—36.
7. Дмитриев Н. А., Дмитриева Л. В., Малиновская Е. В., Софронов И. Д. Методика расчета двумерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа: Препринт № 59. М.: ИПМ АН СССР, 1976.
8. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3—14.
9. Артемьев А. Ю., Делов В. И., Дмитриева Л. В. Методика расчета трехмерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа // Там же. 1989. Вып. 1. С. 30—39.
10. Бахрах С. М., Володина Н. А., Наумов А. О., Рябчун Л. А. Исследование различных форм квадратичной вязкости в методике ЛЭГАК // Сб. докл. II Науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 2003. С. 160—163.
11. Майчен Дж., Сак С. Метод расчета "Тензор" // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 264—291.
12. Симонов Г. П. Использование модели деформируемой тонкой оболочки при построении и анализе схем двумерной газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 3. С. 41—46.
13. Шульц У. Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 9—54.

