

УДК 519.6

## ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. С. Еськов, Я. В. Пронин  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Построена полностью консервативная разностная схема газовой динамики в лагранжевых координатах в плоском случае. Разностные операторы GRAD и DIV имеют простой, удобный вид. В схему вводится искусственная вязкость по двум направлениям, поэтому даже при использовании сильно вытянутых ячеек ударная волна "размазывается" на одинаковое количество ячеек независимо от направления ее движения. В одномерном случае вязкость получена в виде некоторой нелинейной комбинации линейной и квадратичной вязкостей.

Приведены результаты численных расчетов. Во всех двумерных задачах, связанных с разлетом газа в вакуум, результаты расчетов по полностью консервативной схеме точнее результатов, полученных по дивергентной и недивергентной схемам.

### Введение

В программе MAX [1] на лагранжевом этапе наряду с дивергентной схемой относительно полной энергии реализована также недивергентная схема. В плоском случае в лагранжевых переменных консервативная схема MAX полностью совпадает со схемой Амдена и Херта [2], за исключением искусственной вязкости. В том случае, когда кинетическая энергия во много раз превышает внутреннюю, небольшая относительная ошибка в вычислении скорости может приводить к большим погрешностям в определении внутренней энергии, что проявляется в немонотонности численного решения, появлении отрицательной внутренней энергии в отдельных ячейках. Применение недивергентной схемы для решения таких задач дает лучшие результаты, но при этом нарушается баланс полной энергии.

Недостатки этих двух схем можно попытаться устранить использованием полностью консервативной разностной схемы. Под термином *полная консервативность* здесь понимается то, что для построенной схемы выполнены разностные аналоги основных законов сохранения (массы, импульса, полной энергии), как для консервативной схемы, а также разностный аналог уравнения энергии, которое записано в недивергентном виде. В настоящей работе приводится такая схема. В ней аппроксимируется дифференциальное уравнение для внутренней энергии, а разностные аналоги операторов div и grad построены на основе выполнения закона сохранения полной энергии.

### Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в лагранжевых координатах в плоском случае

Запишем интегральные законы сохранения для некоторого объема  $\omega$ , движущегося вместе с частицами вещества:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho d\omega = 0; \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho \vec{W} d\omega = - \oint_{\gamma(t)} p \vec{n} d\gamma; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\omega(t)} \rho \left( \frac{1}{2} |\vec{W}|^2 + \varepsilon \right) d\omega = - \oint_{\gamma(t)} p \left( \vec{n}, \vec{W} \right) d\gamma, \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность;  $\vec{W}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия. Требуется получить решение системы (1)–(3) в некоторой области  $\Omega$  при заданных начальных и граничных условиях. В плоском случае под  $\omega(t)$  будем подразумевать площадь, под  $\gamma(t)$  — контур, ограничивающий  $\omega(t)$ .

В области  $\Omega$  введем четырехугольную сетку, которую можно невырожденным преобразованием отобразить в прямоугольную сетку в квадрате. Четырехугольники будем называть ячейками, их вершины — узлами. Рассмотрим четыре смежные ячейки (рис. 1). Будем обозначать узлы цифрами, ячейки — буквами  $A, B, C, D$ .

Площадь ячейки вычисляется по формуле

$$S_A = \frac{1}{2} \left[ (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (y_1 - y_3)(x_4 - x_2) \right], \quad (4)$$

где  $(x_\alpha, y_\alpha)$  — декартовы координаты узла  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ).

Плотность  $\rho$ , энергию  $\varepsilon$ , давление  $p$  будем относить к ячейкам, скорость  $\vec{W} = (u, v)$  — к узлам.

Определим массу ячейки:

$$M_A = \rho_A S_A.$$

Масса общего узла смежных ячеек

$$M_4 = \frac{1}{4} \left( M_A + M_B + M_C + M_D \right).$$

Уравнение (1) равносильно тому, что масса ячеек остается неизменной со временем. В численном методе, реализованном в комплексе MAX [1], уравнение (2) аппроксимируется в следующем виде:

$$\frac{\vec{W}_4^{n+1} - \vec{W}_4^n}{\tau} + \text{GRAD}_4 p^{(\sigma)} = 0, \quad (5)$$

$$\text{GRAD}_4 p^{(\sigma)} = \frac{1}{2M_4} \left( p_A^{(\sigma)} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} + p_B^{(\sigma)} \begin{bmatrix} y_6 - y_3 \\ x_3 - x_6 \end{bmatrix} + p_C^{(\sigma)} \begin{bmatrix} y_8 - y_6 \\ x_6 - x_8 \end{bmatrix} + p_D^{(\sigma)} \begin{bmatrix} y_1 - y_8 \\ x_8 - x_1 \end{bmatrix} \right), \quad (6)$$

$$p_A^{(\sigma)} = \sigma p_A^{n+1} + (1 - \sigma) p_A^n \quad (\text{в схеме MAX } \sigma = 1).$$

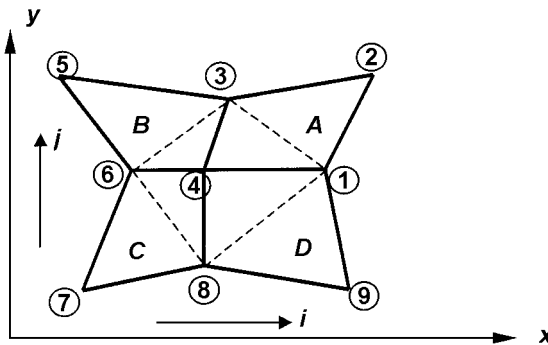


Рис. 1. Фрагмент разностной сетки

Разностный оператор GRAD (6) используется в численных методах для аппроксимации уравнения движения достаточно часто, например в схеме Д [3], методе Уилкинса [4] и т. д.

Рассмотрим уравнение энергии в недивергентном виде:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \operatorname{div} \vec{W} = 0.$$

Аппроксимируем его:

$$\frac{\varepsilon_A^{n+1} - \varepsilon_A^n}{\tau} + p_A^{(\sigma)} \operatorname{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)} = 0, \quad \vec{W}^{(0,5)} = \frac{\vec{W}^{n+1} + \vec{W}^n}{2}. \quad (7)$$

Определим  $\operatorname{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)}$  из закона сохранения полной энергии для всей области  $\Omega$  (разностный аналог интегрального уравнения (3)), введя обозначения:  $K_\Omega$  — множество узлов сетки;  $N_\Omega$  — множество ячеек;  $L_\Gamma$  — множество граничных отрезков сетки.

Умножим уравнение (5) скалярно на вектор  $\vec{W}_4^{(0,5)} M_A$ , просуммируем по всем узлам сетки, прибавим к полученному выражению уравнение (7), умноженное на массу ячейки и просуммированное по всем ячейкам. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\left( \sum_{\alpha \in K_\Omega} M_\alpha \frac{|\vec{W}_\alpha^{n+1}|^2}{2} + \sum_{A \in N_\Omega} M_A \varepsilon_A^{n+1} \right) - \left( \sum_{\alpha \in K_\Omega} M_\alpha \frac{|\vec{W}_\alpha^n|^2}{2} + \sum_{A \in N_\Omega} M_A \varepsilon_A^n \right)}{\tau} = \\ & = - \left[ \sum_{\alpha \in K_\Omega} M_\alpha \left( \vec{W}_\alpha^{(0,5)}, \operatorname{GRAD}_\alpha p^{(\sigma)} \right) + \sum_{A \in N_\Omega} M_A p_A^{(\sigma)} \operatorname{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)} \right]. \end{aligned}$$

Требую, чтобы выполнялся разностный аналог (3), выпишем условие

$$\sum_{\alpha \in K_\Omega} M_\alpha \left( \vec{W}_\alpha^{(0,5)}, \operatorname{GRAD}_\alpha p^{(\sigma)} \right) + \sum_{A \in N_\Omega} M_A p_A^{(\sigma)} \operatorname{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)} = \sum_{\beta \in L_\Gamma} p_\beta \left( \vec{n}, \vec{W}^{(0,5)} \right)_\beta \Delta l_\beta, \quad (8)$$

где  $\Delta l_\beta$  — длина граничного отрезка  $\beta$ .

Операторы GRAD и DIV, удовлетворяющие (8), называются *согласованными* [5].

Условие (8) позволяет однозначно определить дивергенцию скорости:

$$\operatorname{DIV}_A \vec{W} = \frac{DUV_A}{M_A},$$

$$\text{где } DUV_A = DH_A - DF_A + DR_A - DL_A; \quad (9)$$

$$DH_A = \frac{1}{2} \left[ (u_2 + u_3)(y_3 - y_2) + (v_2 + v_3)(x_2 - x_3) \right]; \quad (10)$$

$$DR_A = \frac{1}{2} \left[ (u_1 + u_2)(y_2 - y_1) + (v_1 + v_2)(x_1 - x_2) \right]; \quad (11)$$

$$DF_A = \frac{1}{2} \left[ (u_1 + u_4)(y_4 - y_1) + (v_1 + v_4)(x_1 - x_4) \right]; \quad (12)$$

$$DL_A = \frac{1}{2} \left[ (u_3 + u_4)(y_3 - y_4) + (v_3 + v_4)(x_4 - x_3) \right]. \quad (13)$$

Итак, полностью определена система уравнений (6), (7).

Выражения для  $\operatorname{DIV}_A \vec{W}$  (10)–(13) являются естественной и широко используемой аппроксимацией потока вектора скорости на границе ячейки  $A$ . Полученная разностная схема совпадает с одним

из вариантов схемы, построенной в [6], имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным на равномерной сетке и первый порядок по времени, хотя при  $\sigma = 0,5$  уравнения движения и энергии аппроксимируются со вторым порядком по времени.

Для того, чтобы рассчитывать течения, в которых присутствуют ударные волны (УВ), необходимо ввести в разностную схему искусственную вязкость. В одномерном случае это делается посредством введения некоторой добавки к давлению. В двумерном случае в [1] вводятся две вязкости: вязкость в направлении  $j$  обозначим  $QJ$ , в направлении  $i$  —  $QI$  (см. рис. 1). Формулы будут приводиться только для вязкости в направлении  $j$ , для направления  $i$  — аналогично. Для учета искусственной вязкости в уравнении движения в [1] определяется

$$\text{GRAD } J_4 QJ = -\frac{1}{2M_4} \begin{bmatrix} QJ_A (y_{12} - y_{34}) + QJ_B (y_{34} - y_{56}) + QJ_C (y_{67} - y_{48}) + QJ_D (y_{48} - y_{19}) \\ QJ_A (x_{34} - x_{12}) + QJ_B (x_{56} - x_{34}) + QJ_C (x_{48} - x_{67}) + QJ_D (x_{19} - x_{48}) \end{bmatrix}.$$

Здесь введено обозначение

$$x_{\alpha\beta} = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}, \quad y_{\alpha\beta} = \frac{y_\alpha + y_\beta}{2}.$$

Тогда уравнение движения запишется в виде

$$\frac{\vec{W}_4^{n+1} - \vec{W}_4^n}{\tau} + \text{GRAD}_4 p^{(\sigma)} + \text{GRAD } J_4 QJ + \text{GRAD } I_4 QI = 0. \quad (14)$$

Уравнение энергии:

$$\frac{\varepsilon_A^{n+1} - \varepsilon_A^n}{\tau} + p^{(\sigma)} \text{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)} + QJ \text{DIV } J_A \vec{W}^{(0,5)} + QI \text{DIV } I_A \vec{W}^{(0,5)} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \text{DIV } J_A \vec{W}^{(0,5)} = & \frac{1}{2M_A} \left[ (y_{12} - y_{34}) \left( u_4^{(0,5)} + u_1^{(0,5)} - u_2^{(0,5)} - u_3^{(0,5)} \right) + \right. \\ & \left. + (x_{34} - x_{12}) \left( v_4^{(0,5)} + v_1^{(0,5)} - v_2^{(0,5)} - v_3^{(0,5)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Координаты узлов сетки во всех построенных разностных операторах берутся с  $n$ -го слоя по времени.

Последний оператор был получен из условия

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha} \vec{W}_{\alpha}^{(0,5)} \text{GRAD } J_{\alpha} QJ = - \sum_A M_A QJ_A \text{DIV } J_A \vec{W}^{(0,5)},$$

которое является следствием закона сохранения полной энергии и получается аналогично (8).

Осталось определить способ нахождения  $QJ$  и  $QI$ . Ниже будут определены вид вязкости и ее коэффициент в одномерном случае, а также сделано обобщение на двумерный случай.

### Искусственная вязкость

Запишем разностную схему, аппроксимирующую уравнения газовой динамики в одномерном плоском случае с учетом искусственной вязкости. Для краткости будем использовать обозначения А. А. Самарского:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \hat{u}; \quad u_i^n = u; \quad p_{i+1/2}^{n+1} = \hat{p}; \quad p_{i+1/2}^n = p; \quad q_{i+1/2} = q; \\ \hat{u} &= u + \frac{\tau}{m} \left( p_{i-1}^{(\sigma)} - p^{(\sigma)} \right) + \frac{\tau}{m} (q_{i-1} - q); \end{aligned} \quad (15)$$

$$q = \begin{cases} \frac{\lambda}{m} (u - u_{i+1}), & \text{если } u - u_{i+1} > 0; \\ 0, & \text{если } u - u_{i+1} \leq 0; \end{cases} \quad (16)$$

$$\hat{\rho} = \frac{m}{\hat{V}}; \quad (17)$$

$$\hat{V} = V + \tau (\hat{u}_{i+1} - \hat{u}), \quad V = x_{i+1} - x; \quad (18)$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \tau \frac{p^{(\sigma)} + q}{m} (u^{(0,5)} - u_{i+1}^{(0,5)}). \quad (19)$$

Все рассуждения проведем в частном случае для согласованного двучленного уравнения состояния

$$p = (\gamma - 1) \varepsilon \rho + c_0^2 (\rho - \rho_0), \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{c_0^2 \rho_0}{\rho}, \quad (20)$$

где  $c$  — адиабатическая скорость звука.

Шаг по массе предполагаем постоянным. Так же, как в [1], будем искать  $\lambda$  из условия монотонности разностного решения для стационарной УВ. Вместо схемы (15)–(19) рассмотрим схему, отличающуюся на  $O(\tau^2)$ :

$$\hat{u} = u + \frac{\tau}{m} (p_{i-1}^{(\sigma)} - p^{(\sigma)}) + \lambda_{i-1} \frac{\tau}{m^2} (u_{i-1} - u) - \lambda \frac{\tau}{m^2} (u - u_{i+1}); \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{p} = p + \frac{\tau}{2m} \rho^2 \left[ (c^2 + a^2) (\hat{u} - \hat{u}_{i+1}) + (c^2 - a^2) (u - u_{i+1}) \right] + \\ + \left[ 1 + \sigma (\gamma - 1) \right] \frac{\tau^2 \rho^3 c^2}{m^2} (u - u_{i+1})^2 + (\gamma - 1) \frac{\tau}{m^2} \rho \lambda (u - u_{i+1})^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Если подставить (22) в (21), то получим трехточечное уравнение для  $\hat{u}$ , из которого можно определить выражение для  $\lambda$ .

Пусть на момент времени  $t = t^n$  задана стационарная УВ,  $c_1^0, u_1^0, \rho_1^0, p_1^0$  и  $c_2^0, u_2^0, \rho_2^0, p_2^0$  — величины за и перед ее фронтом соответственно. Газодинамические величины на разрыве удовлетворяют условиям Гюгонио. Используя выражение, являющееся следствием соотношений Гюгонио в частном случае уравнения состояния (20),

$$p_1^0 - p_2^0 = \rho_2^0 (u_1^0 - u_2^0) \left[ \sqrt{c_2^2 + \left( \frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 (u_1^0 - u_2^0)^2} + \frac{\gamma + 1}{4} (u_1^0 - u_2^0) \right],$$

и требуя сохранения монотонности численного профиля скорости, окончательно получим следующее выражение для вязкости в одномерном случае:

$$q = \begin{cases} \rho \Delta u \left[ \sqrt{c^2 + \left( \frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 \Delta u^2} + \frac{\gamma + 1}{4} \Delta u \right] \frac{\sqrt{4\chi^2 + 1} + 1 - 2\chi}{2}, & \text{если } \Delta u > 0; \\ 0, & \text{если } \Delta u \leq 0, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\chi^2 = \sigma \left( \frac{\tau}{m} \rho c \right)^2$ .

В разностных методах для расчета УВ наиболее часто используется линейная или квадратичная вязкость либо их комбинация. Полученная вязкость также имеет вид некоторой нелинейной комбинации тех же вязкостей: линейной и квадратичной. Данная вязкость отличается от вязкости В. Ф. Куропатенко [7] множителем. При  $\sigma = 1$  вязкость (23) полностью совпадает с вязкостью, используемой в дивергентной и недивергентной схемах МАХ.

Требования монотонности разностного решения для скорости накладывают ограничение на временной шаг

$$\tau \leq \frac{2\sqrt{2}h_2c_2}{(\gamma + 1)\Delta u^0\sqrt{\sigma}\sqrt{a_2^2 + c_2^2}},$$

и для монотонности плотности требуется

$$\tau \leq \frac{h_2}{2 \left[ \sqrt{c_2^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}\Delta u^0\right)^2} + \frac{\gamma + 1}{4}\Delta u^0 \right] - \sqrt{\frac{c_2^2 + a_2^2}{2}}\sqrt{\sigma}};$$

$$\tau \leq \frac{\sqrt{2}h_2}{\sqrt{a_2^2 + c_2^2}\sqrt{\sigma}}.$$

Во многих двумерных методиках искусственная вязкость вводится как добавка к давлению. Определяется она аналогично одномерной, только роль  $\Delta u$  в двумерном случае играет  $-h \operatorname{div} \vec{W}$ , где  $h$  — некий характерный размер ячейки. При использовании сильно вытянутых ячеек сетки, чтобы УВ "размазывалась" на одинаковое число ячеек независимо от направления ее движения, приходится определять параметр  $h$  как размер ячейки в направлении максимального сжатия, для чего привлекается разностный тензор скорости деформации.

В методике MAX [1] для решения этой проблемы пошли другим путем. В ячейке вводятся вязкости по направлениям, каждая из которых противодействует сжатию ячейки в своем направлении. Определяются вязкости  $QI$  и  $QJ$ , исходя из (23), следующим образом.

Обозначим

$$HI_A = \sqrt{(x_R - x_L)^2 + (y_R - y_L)^2}; \quad HJ_A = \sqrt{(x_H - x_F)^2 + (y_H - y_F)^2};$$

$$H_{\max A} = \max(HI_A, HJ_A); \quad \chi_A = \left(\frac{H_{\max}}{S}\right)_A \tau c_A \sqrt{\sigma};$$

$$K_A = \frac{\sqrt{1 + 4\chi_A^2} + 1 - 2\chi_A}{2};$$

$$DJ_A = \max\left\{(DH_A - DF_A), DUV_A\right\};$$

$$\Delta u J_A = \begin{cases} -\frac{DJ_A}{HI_A}, & \text{если } DJ_A < 0; \\ 0, & \text{если } DJ_A \geq 0; \end{cases}$$

$DUV, DH, DF, DR, DL$  определяются по формулам (9)–(13).

Тогда

$$QJ = \Delta u J_A \rho_A \left[ \frac{\gamma + 1}{4} \Delta u J_A + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 \Delta u J_A^2 + c_A^2} \right] K_A.$$

### Реализация неявной разностной схемы

Вычисление газодинамических величин на следующем временном шаге будет состоять из двух этапов: явной и итерационной фаз [1]. На явной фазе, используя формулу (14) при  $\sigma = 0$ , определяем предварительные значения скорости

$$\widetilde{W}_\alpha = \vec{W}_\alpha^n - \tau (\text{GRAD}_\alpha p + \text{GRAD } J_\alpha QJ + \text{GRAD } I_\alpha QI)$$

для всех узлов сетки.

В качестве нулевого приближения для итерационного процесса выберем

$$\vec{W}^0 = \widetilde{W}; \quad p^0 = p^n.$$

Пусть известны  $\vec{W}^\nu$ ,  $p^\nu$ . Расчет величин на следующей итерации  $\nu + 1$  будет происходить следующим образом:

- 1)  $\vec{r}_\alpha^\nu = \vec{r}_\alpha^n + \tau \vec{W}_\alpha^\nu$ ;
- 2) по полученным  $\vec{r}_\alpha^\nu$  определяется  $S_A^\nu$  (4);
- 3)  $\rho_A^\nu = \frac{M_A}{S_A^\nu}$ ;
- 4)  $\varepsilon_A^\nu = \varepsilon_A^n - \tau \left( p_A^{(\sigma)} \text{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)} + QJ \text{DIV } J_A \vec{W}^{(0,5)} + QI \text{DIV } I_A \vec{W}^{(0,5)} \right)$ ,

$$\text{где } p_A^{(\sigma)} = \sigma p_A^\nu + (1 - \sigma) p_A^n, \quad \vec{W}^{(0,5)} = \frac{\vec{W}^\nu + \vec{W}^n}{2};$$

- 5)  $\delta p_A^{\nu+1} = \frac{f(\rho_A^\nu, \varepsilon_A^\nu) - p_A^\nu}{1 + 2(\kappa_A^\nu)^2}, \quad \kappa_A^\nu = \frac{\tau c_A^\nu H_{\max A}}{S_A} \sqrt{\sigma}$ ;

$p = f(\rho, \varepsilon)$  — уравнение состояния;  $c$  — адиабатическая скорость звука;

- 6)  $p_A^{\nu+1} = p_A^\nu + \delta p_A^{\nu+1}$ ;
- 7)  $\vec{W}_\alpha^{\nu+1} = \vec{W}_\alpha^\nu - \tau \sigma \text{GRAD}_\alpha \delta p^{\nu+1}$ .

$\alpha$  пробегает все узлы сетки,  $A$  — все ячейки.

Итерационный процесс заканчивается, если при некотором  $\nu = \nu_k$  выполняется условие

$$\frac{|\delta p^{\nu_k+1}|}{p_{\max}} < \varepsilon_0,$$

где  $p_{\max}$  — максимальное давление на  $n$ -м шаге.

Окончательно значения величин на  $(n + 1)$ -м шаге определяются по формулам

$$\begin{aligned} p_A^{n+1} &= p_A^{\nu_k+1}; \quad \vec{W}_\alpha^{n+1} = \vec{W}_\alpha^{\nu_k+1}; \quad \vec{r}_\alpha^{n+1} = \vec{r}_\alpha^n + \tau \vec{W}_\alpha^{n+1}; \\ S_A^{n+1} &\text{ вычисляется по } \vec{r}_\alpha^{n+1}; \quad \rho_A^{n+1} = \frac{M_A}{S_A^{n+1}}; \\ \varepsilon_A^{n+1} &= \varepsilon_A^n - \tau \left( p_A^{(\sigma)} \text{DIV}_A \vec{W}^{(0,5)} + QJ \text{DIV } J_A \vec{W}^{(0,5)} + QI \text{DIV } I_A \vec{W}^{(0,5)} \right). \end{aligned}$$

### Результаты расчетов

Ниже описываются результаты расчетов ряда модельных задач, проводится их сравнение с аналитическими решениями и результатами, полученными по программе MAX.

**Стационарная УВ.** По идеальному газу с  $\gamma = 5/3$  распространяется бесконечно сильная УВ.

Были проведены расчеты с числами Куранта  $\kappa = 0,1$ ;  $\kappa = 0,9$  и  $\kappa = 0,75$ .

На рис. 2 изображены профили плотности с различными числами Куранта в сравнении с точным решением.

Решение с  $\sigma = 0,5$  и числом Куранта  $\kappa = 0,9$  является немонотонным, хотя при  $\sigma = 1$  монотонность не нарушена. Оказывается, что в случае  $\sigma = 0,5$  не выполнено ограничение на временной шаг,

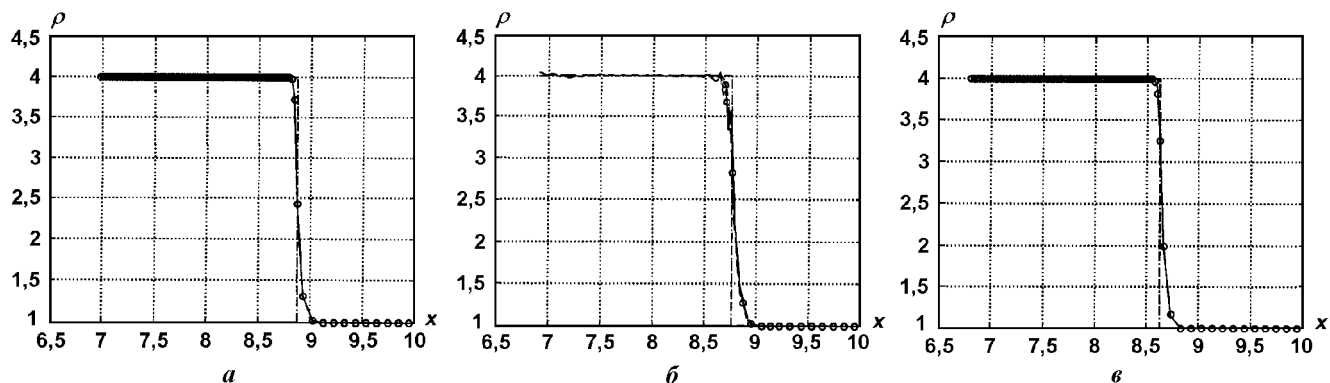


Рис. 2. Сравнение расчетных зависимостей  $\rho(x)$  с точным решением:  $a - \kappa = 0,1$ ;  $b - \kappa = 0,9$ ;  $v - \kappa = 0,75$ ; — —  $\sigma = 0,5$ ; —o—  $\sigma = 1$ ; -·-·- точное решение

вызванное требованием монотонности, которое получено при выводе вязкости. Нарушение этого условия проверялось на монотонном численном профиле, посчитанном с  $\sigma = 1$ .

Решения с числами Куранта  $\kappa = 0,1$ ;  $\kappa = 0,75$  монотонны, волна размывается на 4–5 счетных интервала.

**Задача о точечном взрыве в газе.** В начальный момент в безграничном газе вдоль прямой выделяется конечная энергия  $E_0$  (рассчитанная на единицу длины). Задача является автомодельной, решение ее получено Л. И. Седовым [8]. Разностная постановка отличается от теоретической тем, что энергия  $E_0$  выделяется не в нулевом, а в некотором малом объеме.

Начальная геометрия представляет собой две области, заполненные покоящимся идеальным газом с  $\gamma = 1,4$  и плотностью  $\rho_0 = 1$ . Область 1 — цилиндр радиусом  $r_{01} = 0,1$ ; область 2 — цилиндрический слой  $r_{01} \leq r \leq r_{02}$ ,  $r_{02} = 20$ .

Начальная энергия  $\varepsilon_0 = 10^7$  в области 1,  $\varepsilon_0 = 0$  в области 2.

По газу в области 2 распространяется сильная УВ. Будем рассматривать ту стадию процесса, когда УВ уходит на расстояние, много большее, чем начальный размер области энерговыделения  $r_{01} = 0,1$ . На этой стадии газодинамическое течение выходит на автомодельный режим, что дает возможность сравнивать численные результаты с точным решением [9].

На рис. 3 приведены безразмерные профили плотности, скорости и давления, полученные в расчете с  $\sigma = 1$  и  $\sigma = 0,5$  (на рисунке они неразличимы), на момент времени  $t = 0,3$  (радиус фронта волны  $r_{фр} = 12,577$ ) в сравнении с точным решением. Численное решение практически совпадает с точным. Поставленная задача является одномерной, но расчет проводился на двумерной сетке, в процессе счета сохранялась цилиндрическая симметрия.

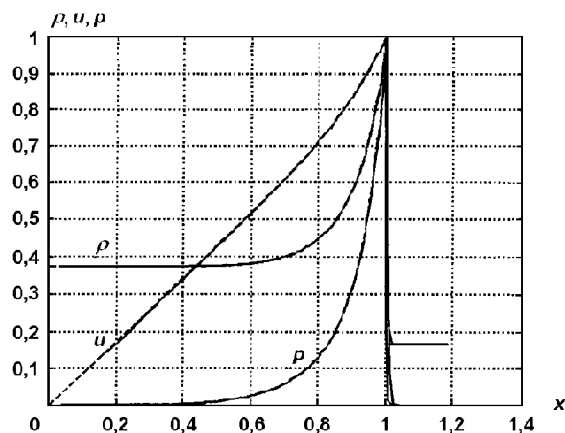


Рис. 3. Сравнение безразмерных расчетных профилей плотности, скорости и давления с точным решением: — —  $\sigma = 0,5$ ; -·-·-  $\sigma = 1$ ; ---- точное решение



**Разлет газа в вакуум.** В начальный момент времени покоящийся идеальный газ с  $\gamma = 5/3$ , занимающий полупространство  $x > 0$ , начинает разлетаться в вакуум.

На рис. 4 сравниваются результаты расчета с  $\sigma = 1$  с решением, полученным по дивергентной схеме MAX. Распределения  $u(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $p(x)$ , полученные в этих расчетах, с одинаковой точностью описывают аналитическое решение.

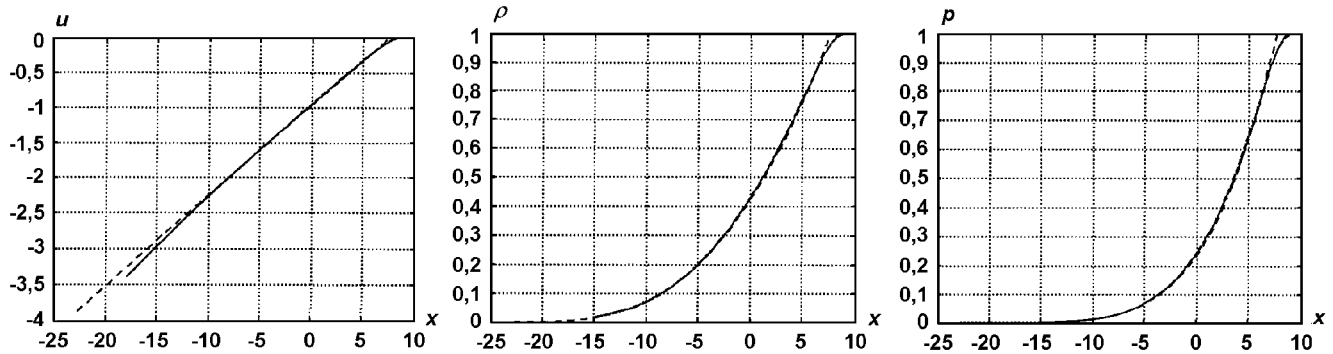


Рис. 4. Сравнение расчетных зависимостей  $u(x)$ ,  $\rho(x)$ ,  $p(x)$  при  $\sigma = 1$  (—) с решением, полученным по схеме MAX (---)

**Изотермический разлет прямого двугранного угла в пустоту.** В [9] дано автомодельное решение задачи о разлете в вакуум прямого трехгранного угла, заполненного покоящимся изотермическим газом с уравнением состояния  $p = c_0^2 \rho$ . Решение обладает той особенностью, что любая плоскость, параллельная одной из граней угла, в процессе движения остается плоскостью, параллельной исходной. Частным случаем этой задачи является изотермический разлет прямого двугранного угла в пустоту.

В начальный момент времени область, заполненная газом с плотностью  $\rho_0 = 1$  и скоростью звука  $c_0 = 1$ , в плоскости  $Oxy$  представляет собой квадрат со стороной  $a = 0,3$ , две стороны которого совпадают с осями координат. Оси  $Ox$  и  $Oy$  являются жесткими стенками, две другие стороны квадрата — свободные границы. Движение подчиняется автомодельному закону до момента прихода волны разрежения от свободной границы в начало координат, т. е. при  $t \leq a/c$ .

На рис. 5 приведены расчетные зависимости плотности  $\tilde{\rho} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \rho$  и модуля скорости  $|u|$  от автомодельной переменной  $\tilde{x} = \frac{r - (r_0 - \sqrt{2}c_0 t)}{t}$  ( $r_0 = 0,3\sqrt{2}$ ) вдоль луча под углом  $45^\circ$ , полученные в расчетах с  $\sigma = 0,5$  и  $\sigma = 1$ , в сравнении с точным решением.

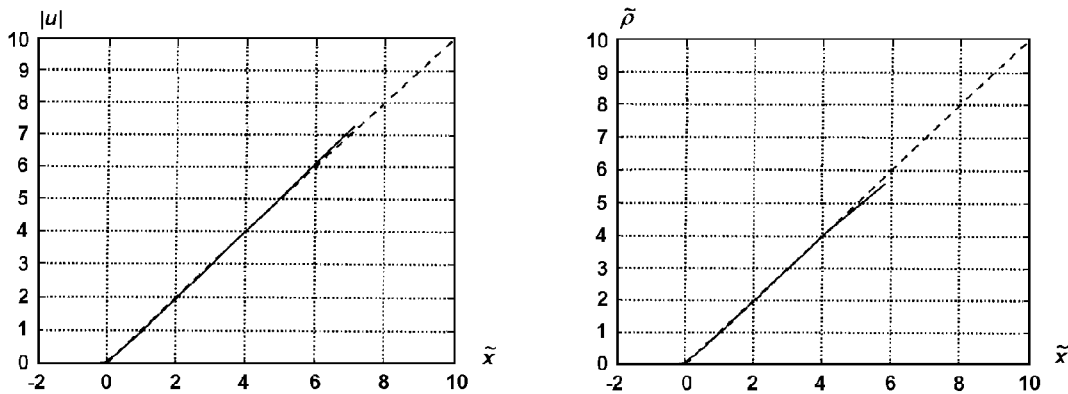


Рис. 5. Расчетные зависимости плотности  $\tilde{\rho}$  и модуля скорости  $|u|$  от автомодельной переменной  $\tilde{x}$  вдоль луча под углом  $45^\circ$ : — —  $\sigma = 0,5$ ; - - - —  $\sigma = 1$ ; ---- — точное решение

**Разлет треугольного цилиндра.** На основе работы В. А. Сучкова [10] можно сконструировать точное решение задачи о плоском двумерном разлете цилиндра, сечением которого в плоскости  $Oxy$ , ортогональной к образующей, является правильный треугольник со стороной  $b = 1$ , заполненного идеальным газом с  $\gamma = 2$ ,  $\rho = 1$ ,  $\varepsilon = 0,5$ . Это решение справедливо до тех пор, пока волны разрежения от всех трех плоскостей не сойдутся в центре цилиндра. Граница газа в этот момент в плоскости  $Oxy$  представляет собой правильный шестиугольник.

На рис. 6 изображены поля плотности, полученные в расчетах по недивергентной, дивергентной схемам МАХ и полностью консервативной схеме, в сравнении с точным решением на момент времени  $t = 0,289$ . На этот момент времени все решения практически совпадают.

Расчеты были продолжены до времени  $t = 1$ , и в качестве эталона для сравнения результатов расчетов по разным схемам было взято приближенное решение, полученное следующим образом. На последний момент времени  $t = 0,289$ , когда существует аналитическое решение, была задана точная его геометрия, построена очень подробная равномерная сетка и в качестве начального распределения взята проекция точного решения на эту сетку. Далее был проведен расчет до момента  $t = 1$ .

На рис. 7 сравниваются результаты расчетов по недивергентной, дивергентной схемам МАХ и полностью консервативной схеме с приближенным решением. Расчет по полностью консервативной схеме близок к расчету по недивергентной схеме. Это объясняется тем, что сетка в центре очень мелкая и вычисления проводились с малым шагом по времени. Решение, полученное по дивергентной схеме, является немонотонным. Ближе всех к точному и приближенному решениям оказалось численное решение, полученное по полностью консервативной схеме.

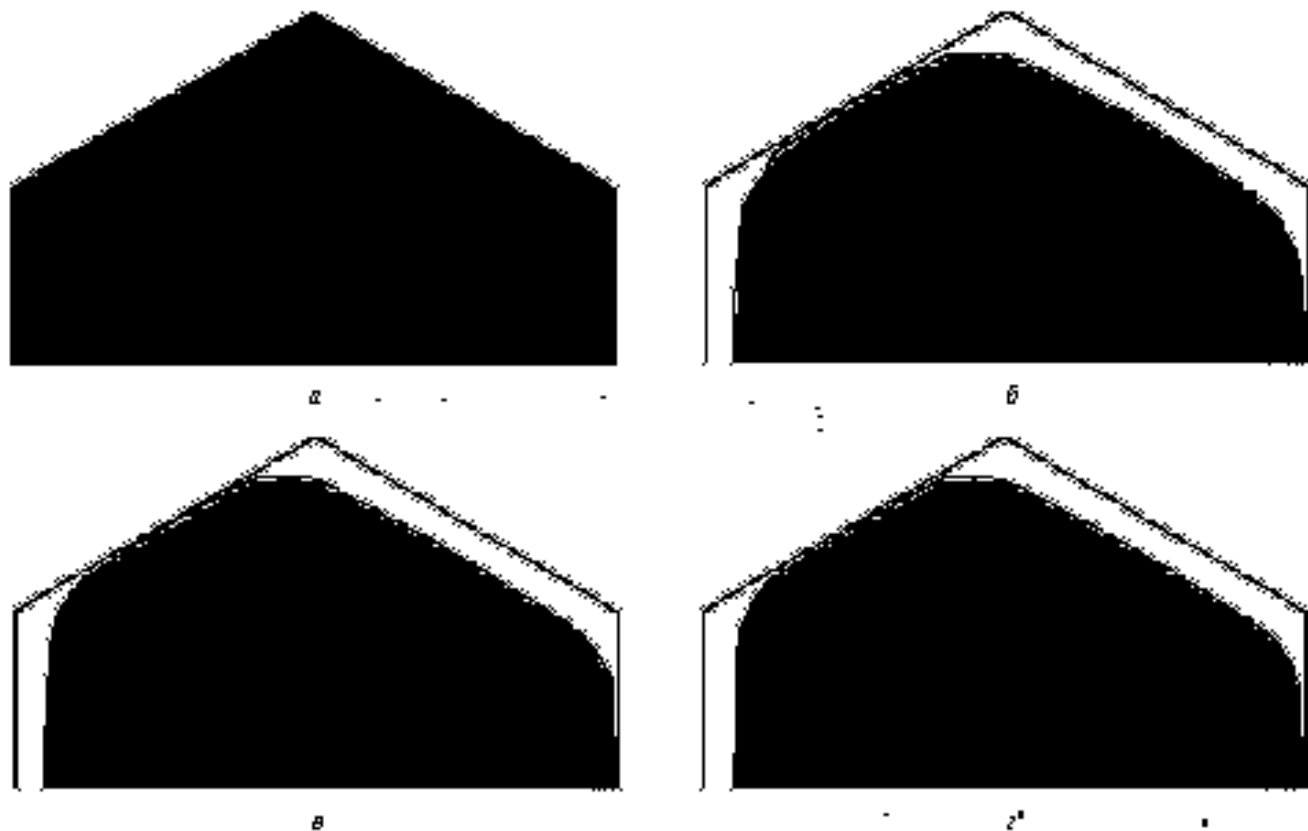


Рис. 6. Поля плотности на момент времени  $t = 0,289$ :  $a$  — точное решение;  $b$  — недивергентная схема МАХ;  $в$  — полностью консервативная схема;  $г$  — дивергентная схема МАХ

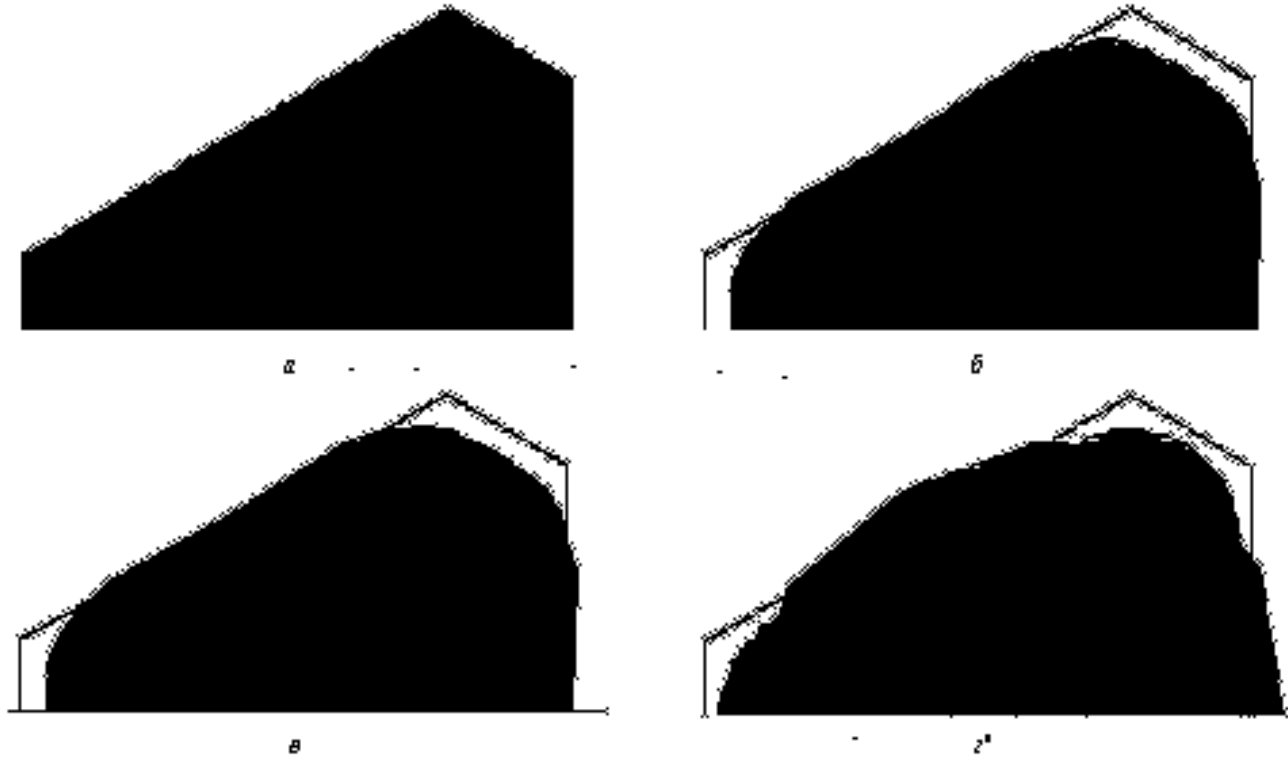


Рис. 7. Поля плотности на момент времени  $t = 1$ :  $a$  — приближенное решение;  $б$  — недивергентная схема MAX;  $в$  — полностью консервативная схема;  $г$  — дивергентная схема MAX

**Разлет эллиптического цилиндра.** Рассматривается течение, возникающее в результате разлета в вакуум газового облака, имеющего форму эллиптического цилиндра, заполненного в начальный момент покоящимся идеальным газом с заданными специальным образом распределениями плотности и давления. Начальная геометрия в плоскости  $Oxy$ , ортогональной оси цилиндра, представляет собой эллипс с полуосями  $a_x, a_y$ .

Задача имеет точное решение. В [11] на основе метода разделения переменных выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая разлет трехосного газового эллипсоида:

$$\begin{aligned} \varphi_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)^{(\gamma-1)} &= \alpha_i p^0(0) \mathbf{v}^0(0); \\ \mathbf{v}^0(t) &= \mathbf{v}^0(0) \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $x_i = \varphi_i(t) \xi_i$  — эйлеровы координаты частиц с лагранжевыми координатами  $\xi_i = x_i(0)$ ;  $u_i = \xi_i \frac{d\varphi_i}{dt}$  — компоненты скорости ( $i = 1, 2, 3$ );  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0(t) V(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — удельный объем;  $p = p^0(t) \times P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — давление.

Для адиабатического движения в случае равномерного распределения энтропии будем иметь

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= 1, \quad p^0(t) (\mathbf{v}^0(t))^\gamma = p^0(0) (\mathbf{v}^0(0))^\gamma; \\ P &= \left[ 1 - \left( \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^*)^2} + \frac{\xi_2^2}{(\xi_2^*)^2} + \frac{\xi_3^2}{(\xi_3^*)^2} \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)}; \\ \alpha_i &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{(\xi_i^*)^2}, \end{aligned}$$

$\xi_i^*$  — размеры газового облака по его осям.

В рассматриваемом случае давление и удельный объем определяются по формулам

$$P(\xi_1, \xi_2) = \left[ 1 - \left( \frac{\xi_1^2}{a_x^2} + \frac{\xi_2^2}{a_y^2} \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)}; \quad V(\xi_1, \xi_2) = \left( P(\xi_1, \xi_2) \right)^{-1/\gamma}.$$

Положив  $p^0(0) = 1$ ,  $\mathbf{v}^0(0) = 1$ , упростим систему (24) для двух пространственных переменных:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} (\varphi_1 \varphi_2)^{(\gamma-1)} &= \alpha_1; \\ \varphi_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} (\varphi_1 \varphi_2)^{(\gamma-1)} &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Данная система интегрировалась численно с начальными условиями

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= 1, & \varphi_1'(0) &= 0; \\ \varphi_2(0) &= 1, & \varphi_2'(0) &= 0, \end{aligned}$$

после чего определялись все остальные неизвестные:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^0(t) &= \varphi_1 \varphi_2; & p^0(t) &= (\mathbf{v}^0(t))^{-\gamma}; & p &= p^0(t) P(\xi_1, \xi_2); & \mathbf{v} &= \mathbf{v}^0(t) V(\xi_1, \xi_2); \\ x &= \varphi_1(t) \xi_1; & y &= \varphi_2(t) \xi_2. \end{aligned}$$

Картина течения в общих чертах следующая. Из состояния покоя начинается разлет облака. В процессе разлета изменяется соотношение полуосей; меньшая полуось становится большей и наоборот. С ростом времени течение выходит на стационарный режим разлета, при котором облако имеет форму эллиптического цилиндра с линейно зависящими от времени полуосями  $a_{x\infty}$ ,  $a_{y\infty}$  и постоянными скоростями края облака  $u_{x\infty}$ ,  $u_{y\infty}$ . Значения  $u_{x\infty}$ ,  $u_{y\infty}$ ,  $S_\infty = \frac{a_{x\infty}}{a_{y\infty}}$  зависят от начального соотношения полуосей и показателя адиабаты  $\gamma$ .

В расчетах полагалось  $\gamma = 1,4$ ;  $a_x = 1$ ;  $a_y = 2$ . Сетка строилась естественным образом:

$$\left\{ (x_{ij}, y_{ij}) : x_{ij} = \frac{i}{I} a_x \cos\left(\frac{\pi j}{2J}\right), \quad y_{ij} = \frac{i}{I} a_y \sin\left(\frac{\pi j}{2J}\right), \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad j = 0, 1, \dots, J \right\}.$$

Расчеты были выполнены с разными значениями параметра  $\sigma$  на грубой сетке ( $I = 10$ ,  $J = 15$ ) и на более подробной сетке ( $I = 30$ ,  $J = 35$ ).

На рис. 8 изображено поле плотности на моменты времени  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 30,57$  в расчете с  $\sigma = 0,5$ . С течением времени отношение  $a_x/a_y$  полуосей изменяется. К моменту времени  $t_1$  эллипс превратился в окружность. В момент времени  $t_2$  разлет газового облака вышел на стационарный режим.

На рис. 9 показаны аналитическая и расчетные зависимости  $S(t) = a_x(t)/a_y(t)$ . Расчет с числом интервалов по радиусу  $I = 30$  и по углу  $J = 35$  на графике практически совпадает с точным решением.

Расчет по дивергентной схеме МАХ в лагранжевых координатах не удалось провести до времени  $t_2$  из-за перехлеста сетки вблизи свободной границы.

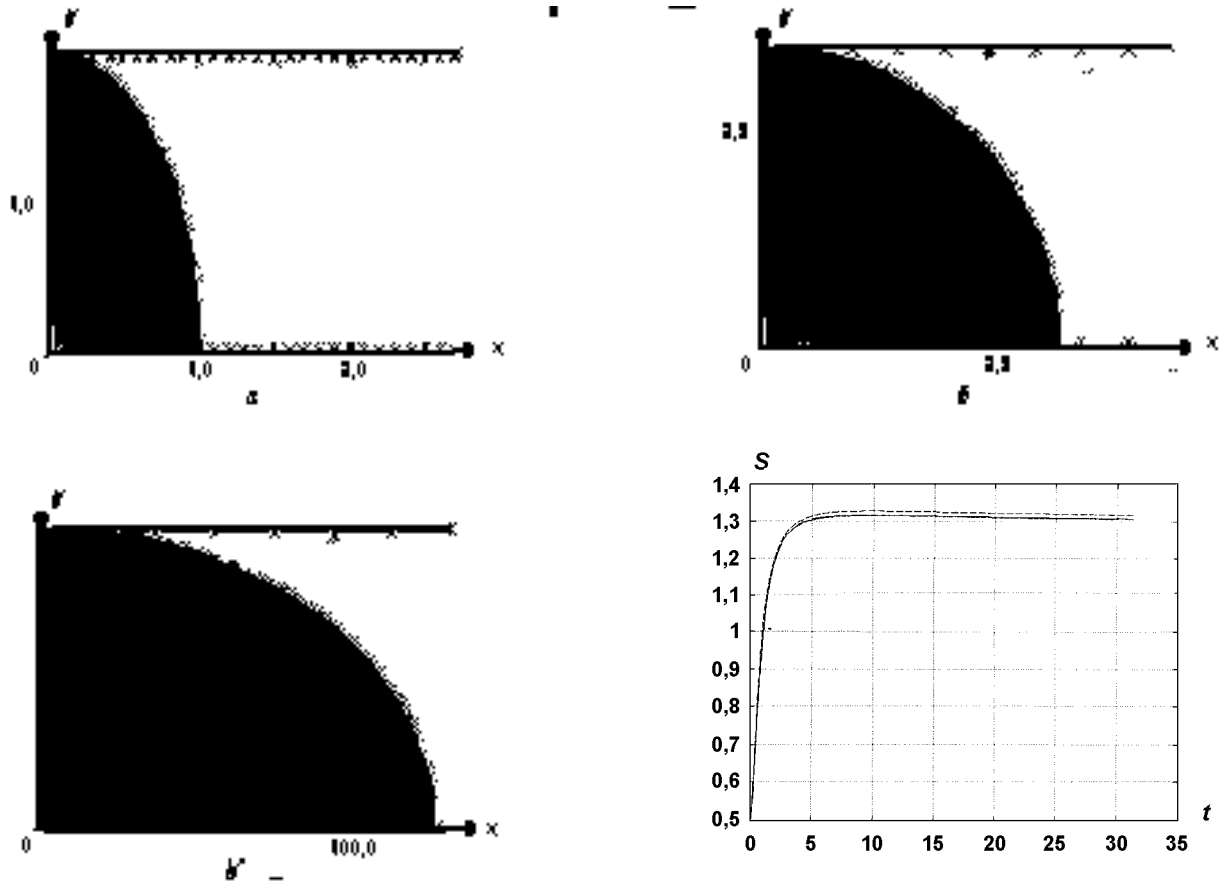


Рис. 8. Поле плотности на моменты времени:  $a - t_0 = 0$ ;  $b - t_1 = 1,0$ ;  $c - t_2 = 30,57$

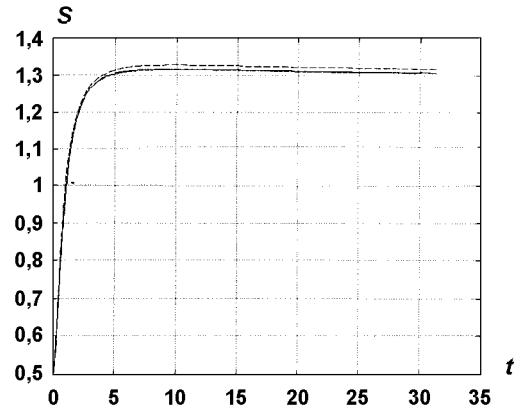


Рис. 9. Зависимость  $S(t) = a_x(t)/a_y(t)$ : — — расчет,  $I = 30, J = 35$ ; - - - расчет,  $I = 10, J = 15$ ; - · - · точное решение

### Заключение

Построена двумерная полностью консервативная разностная схема уравнений газовой динамики в лагранжевых переменных для плоского случая, выведена искусственная вязкость для этой схемы. На основе анализа численных расчетов ряда тестовых задач, имеющих точное решение, по дивергентной, недивергентной схемам МАХ и полностью консервативной разностной схеме было установлено следующее:

- 1) использование искусственной вязкости, такой же, как в схеме МАХ, при расчете УВ позволяет получать монотонные профили величин, при этом фронт бесконечно сильной УВ размывается на 4—5 счетных интервалов;
- 2) во всех двумерных задачах, связанных с разлетом газа в вакуум, результаты расчетов по полностью консервативной схеме точнее результатов, полученных по дивергентной и недивергентной схемам МАХ.

### Список литературы

1. Анучина Н. Н., Волков В. И., Еськов Н. С. Численный метод расчета контактных границ с большими деформациями // V Забабакинские науч. чтения. Снежинск, 21—25 сентября 1998 г.
2. Amsden A. A., Hirt C. W., Cook J. L. An arbitrary Lagrangian — Eulerian computing method for all flow speeds // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14. P. 227—253.

3. Софронов И. Д., Дмитриев Н. А., Дмитриева Л. В., Малиновская Е. В. Методика расчета нестационарных двумерных задач газовой динамики в лагранжевых координатах // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К. И. Бабенко. М.: Наука, 1979.
4. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
5. Самарский А. А. и др. Операторные разностные схемы: Препринт № 9: М.: ИПМ АН СССР, 1981.
6. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный метод получения разностных схем для уравнений магнитной гидродинамики: Препринт № 65: М.: ИПМ АН СССР, 1976.
7. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. Матем. института АН СССР. Разностные методы решения задач математической физики. Ч. 1. 1966. Т. 74. С. 107–137.
8. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука, 1985.
9. Грязных А. И., Грязных Д. А. Результаты расчетов некоторых тестовых задач, проведенных по программе VN-1: Препринт № 121. Снежинск: РФЯЦ–ВНИИТФ, 1997.
10. Сучков В. А. Истечение в вакуум на кривой стенке // Прикладная математика и механика. 1963. Вып. 4. С. 739–740.
11. Немчинов И. В. Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме // Там же. 1965. Вып. 1. С. 134–142.

Статья поступила в редакцию 22.05.03.

---