УДК 519.95

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ВВЕДЕНИЯ МЕТРИКИ НА МНОЖЕСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СММ-АВТОМАТОВ

И. Л. Мазуренко
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

Известное понятие непрерывной скрытой марковской модели изложено на языке вероятностных автоматов. Введена метрика на множестве непрерывных СММ-автоматов. Приведен способ эффективного вычисления метрики для широкого класса непрерывных СММ-автоматов, обобщающий результаты, полученные автором для дискретных СММ-автоматов.

Введение

Важным классом задач в теории распознавания образов являются задачи распознавания квазистационарных многомерных сигналов. Примерами задач такого рода являются задачи распознавания речи, рукописных текстов, предсказания погоды и иные задачи, в которых измеряется, а затем предсказывается или распознается некоторый меняющийся во времени процесс, про который можно сказать, что в близкие моменты времени его свойства "почти стационарны".

Сигналы являются моделью последовательного процесса, и это позволяет эффективно использовать для их описания автоматные методы [1]. Вместе с тем в большинстве случаев сигналы носят недетерминированный характер, что приводит к необходимости использования для их моделирования таких математических объектов, как вероятностные автоматы [2—4].

Вероятностные методы, использующиеся в системах распознавания сигналов в настоящее время, были впервые предложены рядом американских исследователей [5—7] для решения задачи моделирования и предсказания погоды. Предложенный ими метод получил впоследствии название метода *скрытых марковких моделей* (СММ). Скрытые марковские модели представляют собой дважды стохастические процессы — марковские цепи [8] по переходам между состояниями и стационарные процессы в каждом состоянии цепи. Для обучения моделей и вычисления вероятности наблюдения слова на выходе СММ традиционно применяется метод динамического программирования.

В настоящее время активно создаются и внедряются прикладные компьютерные системы на основе метода СММ. Так, десятки крупных коммерческих компаний (IBM, Dragon, Philips, Microsoft, Intel) создали и активно развивают коммерческие системы распознавания речи.

Распознавание сигналов с помощью вероятностных автоматов сводится к следующему. Каждому моделируемому объекту сопоставляется эталон в виде вероятностного автомата. Вычисляется вероятность наблюдения распознаваемого сигнала на выходе каждого из таких эталонных автоматов и выбирается автомат, максимизирующий эту вероятность. Соответствующий найденному автомату объект считается результатом распознавания.

Важной задачей является введение метрики на множестве вероятностных автоматов. Поскольку каждый из автоматов является моделью реального физического процесса (например погодного явления, произнесения звука или речевой фразы, написания рукописной буквы), в практических приложениях часто возникает необходимость вычисления расстояния между данными объектами. Если дополнительно мера близости между автоматами обладает всеми свойствами метрики, исследователь получает возможность применять широкий класс методов, использующих метрические свойства меры близости между моделируемыми объектами. Так, например, становится возможным применение методов кластеризации, факторного анализа, многомерного шкалирования и др. В задачах распознавания при нахождении эталона, ближайшего к анализируемому сигналу, оказывается возможным сокращение дорогостоящего перебора за счет использования неравенства треугольника.

Известные автору методы введения меры близости на множестве автономных вероятностных автоматов отличаются либо их малой вычислительной эффективностью (для точного вычисления расстояния между автоматами необходимо применение бесконечного числа вычислительных циклов), либо нарушением одного из свойств метрики (несимметричность, невыполнение неравенства треугольника). Автор настоящей работы предложил способ эффективного введения метрики на классе вероятностных автоматов, использующихся в методе СММ. На основе данной модели и алгоритмов распознавания построен ряд распознающих компьютерных систем, в том числе компьютерная система, использующая для распознавания речи в производственных шумах датчики движения губ, микрофоны и датчик дыхания.

1. Дискретные СММ-автоматы

Определение 1.1. *Дискретным СММ-автоматом назовем четверку* $\mathcal{A} = \langle A, Q, \pi, \Pi \rangle$, *в которой* A ($|A| = N$) *– конечный алфавит выходных букв;* Q ($|Q| = M$) *– конечный алфавит состояний;* π *–* $M \times M$*-матрица вероятностей переходов, такая что* $\pi_{ij} = 0$ *при* $i < j$ *и* $i = M$, $\pi_{ij} < 1$ *для всех* i *и* j *и* $\sum\limits_{j=1}^{M} \pi_{ij} \leqslant 1$ *для всех* i*;* Π *–* $M \times N$*-матрица вероятностей выходных букв, такая что* $0 \leqslant \Pi_{ij} < 1$ *для всех* i *и* j *и* $\sum\limits_{j=1}^{N} \Pi_{ij} \leqslant 1$ *для всех* i*.*

Все обозначения взяты из работы [1].

Функционирование автомата происходит следующим образом. Автомат начинает работу в состоянии q_1 и работает по тактам. Находясь в i-й момент времени в состоянии q_{s_i}, автомат сначала с вероятностью $\Pi_{s_i j_i}$ подает на выход букву a_{j_i} (или "зависает" с вероятностью $1 - \sum\limits_{l=1}^{N} \Pi_{s_i l}$), а затем переходит в следующее состояние $q_{s_{i+1}}$ с вероятностью $\pi_{s_i s_{i+1}}$ (или зависает с вероятностью $1 - \sum\limits_{l=1}^{M} \pi_{s_i l}$). Когда автомат переходит в финальное состояние q_M, он останавливает свою работу, не подавая при этом на выход никакой буквы. Таким образом, автомат, начав работу в состоянии q_1, либо на одном из шагов зависает, либо, пройдя за $n+1$ шаг последовательно через $n+1$ состояние, последнее из которых q_M, выдает слово $\alpha = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \in A^*$.

Приведенное выше определение СММ-автомата является по сути изложением на языке теории вероятностных автоматов [2—4] широко используемого в технической литературе по распознаванию речи понятия СММ [5—9]. СММ-автомат – это вероятностный автомат без входа, в котором переход в следующее состояние и выдача букв происходят независимо, матрица вероятностей переходов является верхнетреугольной, а каждая вероятностная операция, будь то переход в следующее состояние или подача в некотором состоянии буквы на выход автомата, выполняется ненадежно (автомат может с некоторой определенной заранее вероятностью зависнуть и перестать работать). Автоматы, обладающие перечисленными свойствами, образуют класс монотонных автономных вероятностных автоматов Мура [10].

В [10, 11] приведен способ эффективного введения метрики на множестве дискретных СММ-автоматов. Ниже без доказательства приведены полученные в этих работах результаты. В настоящей работе предложено обобщение введенной метрики на случай непрерывных СММ-автоматов.

Через $ur(A)$ будем обозначать правый верхний угловой элемент матрицы A.

Через $\hat{\pi}$ будем обозначать *приведенную матрицу переходов* автомата, задающую вероятности того, что автомат, не зависнув при выдаче букв, переходит в следующее состояние: $\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij} \sum\limits_{l=1}^{N} \Pi_{il}$.

Замечание 1.1. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв (т. е. для которых во всех состояниях q_i, кроме финального, выполнено свойство $\sum\limits_{j=1}^{N} \Pi_{ij} = 1$), приведенная матрица переходов $\hat{\pi}$ совпадает с матрицей переходов π.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1. *Для разных слов $\alpha \in A^*$ события, связанные с тем, что СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi\rangle$ дойдет до финального состояния и выдаст слово α, несовместны. Вероятность этого события для заданного слова $\alpha = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n} \in A^*$ равна*

$$P(\alpha) = ur(\pi'(a_{j_1})\pi'(a_{j_2}) \dots \pi'(a_{j_n})),$$

где $\pi'(a_k)_{ij} = \pi_{ij}\Pi_{ik}$.

Лемма 1.2. *Для разных $n \in \mathbb{N}$ события, связанные с тем, что СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi\rangle$ проработает, не зависнув, ровно n тактов и перейдет в финальное состояние, несовместны. Для заданного n вероятность такого события равна*

$$\sum_{\alpha \in A^*, |\alpha| = n} P(\alpha) = ur(\hat{\pi}^n).$$

Лемма 1.3. *Вероятность того, что СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi\rangle$ дойдет, не зависнув, до финального состояния, равна*

$$\sum_{\alpha \in A^*} P(\alpha) = ur((E - \hat{\pi})^{-1}) \leqslant 1,$$

где E — единичная $M \times M$-матрица.

Замечание 1.2. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв и при переходе в следующее состояние, вероятность дойти за конечное число шагов до финального состояния равна 1.

Определение 1.2. *Функцию $P_{\mathcal{A}}(\alpha)\colon A^* \to [0, 1]$, вычисляющую вероятность того, что дискретный СММ-автомат $\mathcal{A}$, не зависнув, выдал слово α, назовем стохастической словарной функцией автомата $\mathcal{A}$.*

Определение 1.3. *Декартовым произведением дискретных СММ-автоматов $\langle A, Q', \pi', \Pi'\rangle$ ($|Q'| = M'$, $|A| = N$) и $\langle A, Q'', \pi'', \Pi''\rangle$ ($|Q''| = M''$) назовем СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi\rangle$, такой что $Q = Q' \times Q''$, π — $M'M'' \times M'M''$-матрица: $\pi_{(i',i'')(j',j'')} = {\pi'}_{i'j'}{\pi''}_{i''j''}$, Π — $M'M'' \times N$-матрица: $\Pi_{(i',i'')j} = \Pi'_{i'j}\Pi''_{i''j}$.*

Замечание 1.3. Приведенное определение декартового произведения автоматов корректно, т. е. для любых двух СММ-автоматов их декартово произведение также является СММ-автоматом.

Лемма 1.4. *Пусть СММ-автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть декартово произведение СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда вероятность того, что автомат $\mathcal{A}$, не зависнув, перейдет в финальное состояние, равна скалярному произведению стохастических словарных функций $P_{\mathcal{A}_1}$ и $P_{\mathcal{A}_2}$ в евклидовом пространстве l_2.*

Здесь и далее будем говорить, что некоторая величина может быть вычислена *эффективно*, если она может быть задана формулой, состоящей из конечного числа операций умножения, сложения чисел и матриц, взятия модуля, возведения в степень, вычисления тригонометрических функций, экспоненты, логарифма и т. п.

Справедлива

Теорема 1.1. *Пусть СММ-автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть декартово произведение СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда скалярное произведение стохастических словарных функций $P_{\mathcal{A}_1}$ и $P_{\mathcal{A}_2}$ в евклидовом пространстве l_2 эффективно вычисляется по формуле*

$$(P_{\mathcal{A}_1}, P_{\mathcal{A}_2})_{l_2} = ur((E - \hat{\pi})^{-1}),$$

где E — единичная матрица, $\hat{\pi}$ — приведенная матрица переходов автомата $\mathcal{A}$.

Следствие 1.1. *Порождаемая скалярным произведением метрика*

$$\rho(A, B) = \sqrt{((A, A) + (B, B) - 2(A, B))}$$

также эффективно вычислима, что дает способ эффективного введения метрики на множестве дискретных СММ-автоматов.

2. Непрерывные СММ-автоматы

Определение 2.1. *Непрерывным СММ-автоматом назовем четверку $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$, в которой $\mathbb{R}^N$ — N-мерное континуальное пространство выходов автоматов; Q ($|Q| = M$) — конечный алфавит состояний; π — $M \times M$-матрица вероятностей переходов, такая что $\pi_{ij} = 0$ при $i < j$ и $i = M$, $\pi_{ij} < 1$ для всех i и j и $\sum\limits_{j=1}^{M} \pi_{ij} \leqslant 1$ для всех i; $\Pi = \left\{ \Pi_i : \mathbb{R}^N \to [0, 1],\ i = 1, \ldots, M \right\}$ — множество многомерных плотностей вероятности, задающих распределение независимых друг от друга выходов автомата в каждом из состояний, такое что $\Pi_i(x) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, M$ и $x \in \mathbb{R}^N$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_i(x)dx \leqslant 1$ для всех i.*

Функционирование непрерывного СММ-автомата определяется аналогично функционированию дискретного СММ-автомата. Автомат начинает работу в состоянии q_1 и работает по тактам. Находясь в i-й момент времени в состоянии q_{s_i}, автомат подает на выход действительный вектор $x_{j_i} \in \mathbb{R}^N$ согласно непрерывному распределению вероятностей, плотность которого равна $\Pi_{s_i}(x)$ (или зависает с вероятностью $1 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_{s_i}(x)dx$), а затем переходит в следующее состояние $q_{s_{i+1}}$ с вероятностью $\pi_{s_i s_{i+1}}$ (или зависает с вероятностью $1 - \sum\limits_{l=1}^{M} \pi_{s_i l}$). Когда автомат переходит в финальное состояние q_M, он останавливает свою работу, не подавая при этом ничего на выход. Таким образом, автомат, начав работу в состоянии q_1, либо на одном из шагов зависает, либо, пройдя за $n+1$ шаг последовательно через $n+1$ состояние, последнее из которых q_M, выдает "слово" $\chi = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_n} \in (\mathbb{R}^N)^*$.

Посмотрим, каким будет вероятностное распределение слов на выходе непрерывного СММ-автомата. Сначала зафиксируем путь $\overline{q} = q_{s_1} q_{s_2} \ldots q_{s_{n+1}}$ (где $q_{s_1} = q_1$, $q_{s_{n+1}} = q_M$) из начального состояния автомата в финальное. Тогда по формуле условной плотности вероятности совместное вероятностное распределение выходов автомата на этом пути будет равно $p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{q}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n | \overline{q}) P(\overline{q}) = \prod\limits_{j=1}^{n} \Pi_{s_j}(x_j) \prod\limits_{j=1}^{n} \pi_{s_j s_{j+1}} = \prod\limits_{j=1}^{n} \Pi_{s_j}(x_j) \pi_{s_j s_{j+1}}$.

Просуммировав эти функции распределения по всем таким путям, получаем распределение слов на выходе автомата $\mathcal{A}$:

$$p_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\overline{q} = q_{s_1} q_{s_2} \ldots q_{s_{n+1}} \\ q_{s_1} = q_1,\ q_{s_{n+1}} = q_M}} \prod_{j=1}^{n} \Pi_{s_j}(x_j) \pi_{s_j s_{j+1}}. \tag{1}$$

Формулу (1) можно записать в матричном виде.

Лемма 2.1. $p_{\mathcal{A}}(x_1 x_2 \dots x_n) = ur(\pi'(x_1)\pi'(x_2)\dots\pi'(x_n))$, *где* $\|\pi'(x)_{ij}\| = \|\pi_{ij}\Pi_i(x)\|$.

Через $\hat{\pi}$ будем обозначать *приведенную матрицу переходов* автомата, задающую вероятности того, что автомат, не зависнув при выдаче букв, переходит в следующее состояние: $\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_i(x)dx$.

Замечание 2.1. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв (т. е. для которых во всех состояниях q_i, кроме финального, выполнено свойство $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_i(x)dx = 1$), приведенная матрица переходов $\hat{\pi}$ совпадает с матрицей переходов π.

Замечание 2.2. В общем случае для непрерывных СММ-автоматов приведенная матрица переходов вычисляется неэффективно.

Лемма 2.2. *Для разных $n \in \mathbb{N}$ события, связанные с тем, что СММ-автомат $\langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$ проработает, не зависнув, ровно n тактов и перейдет в финальное состояние, несовместны. Для заданного n вероятность такого события равна*

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n = ur(\hat{\pi}^n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несовместность событий следует из того, что для разного числа тактов работы автомата никакой из путей в автомате из начального состояния в финальное не является частью другого.

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} ur\left(\pi'(x_1)\pi'(x_2)\dots\pi'(x_n)\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= ur\left(\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \pi'(x_1)\pi'(x_2)\dots\pi'(x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) =$$

$$= ur\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \pi'(x_1)dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}^N} \pi'(x_2)dx_2 \dots \int\limits_{\mathbb{R}^N} \pi'(x_n)dx_n \right) = ur\left(\underbrace{\hat{\pi}\hat{\pi}\dots\hat{\pi}}_{n} \right) = ur\left(\hat{\pi}^n\right),$$

поскольку $\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \pi'(x_k)dx_k \right)_{ij} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \pi'(x_k)_{ij}\, dx_k = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \pi_{ij}\Pi_i(x_k)\, dx_k = \hat{\pi}_{ij}$ (по определению).

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть π — верхнетреугольная квадратная матрица, такая что все элементы на ее диагонали неотрицательные и меньше 1. Тогда матричный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi^n$ сходится к матрице $E + (E - \hat{\pi})^{-1}$, где E – единичная матрица.*

Доказательство леммы приведено в [11].

Лемма 2.4. *Вероятность того, что непрерывный СММ-автомат $\langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$ дойдет, не зависнув, до финального состояния, равна*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n = ur\left((E - \hat{\pi})^{-1}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \sum_{n=1}^{\infty} ur(\hat{\pi}^n) = ur\left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\pi}^n\right) = ur\left((E - \hat{\pi})^{-1} + E\right) = ur\left((E - \hat{\pi})^{-1}\right).$$

По лемме 2.3 этот матричный ряд сходится.
Лемма доказана.

Замечание 2.3. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв и при переходе в следующее состояние, вероятность дойти за конечное число шагов до финального состояния равна 1.

Определение 2.2. *Функцию плотности вероятности* $p_{\mathcal{A}}(x) : (\mathbb{R}^N)^* \to [0, 1]$ *назовем стохастической словарной функцией непрерывного автомата* $\mathcal{A}$.

Для систем автоматов, используемых на практике, без ограничения общности можно считать, что все функции плотности распределения $\Pi_i(x), i = 1, \ldots, M-1$, где Π_i — плотность распределения выходов в i-м состоянии автомата $\mathcal{A}$, ограничены сверху константой 1. Действительно, обозначим $\varkappa_{\mathcal{A}} = \max\limits_{i=1,\ldots,M-1} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} \Pi_i(x)$. Если Ω — некоторый класс автоматов, для которого $\varkappa_{\mathcal{A}}$ ограничена сверху некоторой общей для всех автоматов из этого класса константой (это справедливо, например, если $|\Omega| < \infty$), существует и конечна величина $\varkappa_{\Omega} = \sup\limits_{\mathcal{A} \in \Omega} \varkappa_{\mathcal{A}} < \infty$. Если теперь перейти к другим единицам измерения выходных значений автоматов из Ω, выполнив замену $x \to x \times \sqrt[N]{\varkappa_{\Omega}}$, будет с очевидностью выполнено условие $\Pi_i(x) \leqslant 1 \;\; \forall i = 1, \ldots, M, \; x \in \mathbb{R}^N$.

Определение 2.3. *Декартовым произведением непрерывных СММ-автоматов* $\langle \mathbb{R}^N, Q_1, \pi', \Pi' \rangle$ ($|Q'| = M'$) и $\langle \mathbb{R}^N, Q'', \pi'', \Pi'' \rangle$ ($|Q''| = M''$) *назовем непрерывный СММ-автомат* $\langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$, такой что $Q = Q' \times Q''$, $\pi_{(i',i'')(j',j'')} = {\pi'}_{i'j'} {\pi''}_{i''j''}$, $\Pi_{(i',i'')}(x) = \Pi'_{i'}(x)\Pi''_{i''}(x)$.

Замечание 2.4. Определение 2.3 корректно, поскольку $\forall \, (i', i'')$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_{(i',i'')}(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi'_{i'}(x)\Pi''_{i''}(x) dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi''_{i''}(x) dx \leqslant 1.$$

Обозначим через $\left(L_2{}^N\right)^*$ следующее пространство счетных наборов функций:

$$\left\{ \left\{ f_n : \left(\mathbb{R}^N\right)^n \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} : \forall n \in \mathbb{N} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \left(f_n(x)\right)^2 dx < \infty \;\; \text{и} \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \left(f_n(x)\right)^2 dx < \infty \right\}.$$

Несложно показать, что это пространство является евклидовым [12] со скалярным произведением

$$(\{f_n\}, \{g_n\})_{\left(L_2{}^N\right)^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} f_n(x) g_n(x) dx.$$

Каждый счетный набор функций $\{f_n\} \in \left(L_2{}^N\right)^*$ можно представить себе как единственную функцию $f : \left(\mathbb{R}^N\right)^* \to \mathbb{R}$.

Лемма 2.5.
а) Стохастическая словарная функция $p_{\mathcal{A}}$ *любого непрерывного СММ-автомата* $\mathcal{A}$ *лежит в пространстве* $\left(L_2{}^N\right)^*$.

б) Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — два произвольных непрерывных СММ-автомата, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ — их декартово произведение. Тогда скалярное произведение стохастических словарных функций $p_{\mathcal{A}_1}$ и $p_{\mathcal{A}_2}$ в евклидовом пространстве $\left(L_2{}^N\right)^*$ равно вероятности того, что автомат $\mathcal{A}$, не зависнув, перейдет в финальное состояние.

Доказательство. Докажем сначала утверждение *б)*, под равенством рядов подразумевая, что они либо одновременно расходятся, либо сходятся к одному и тому же числу.

$$\begin{aligned}
(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{\left(L_2{}^N\right)^*} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}_1}(x) p_{\mathcal{A}_2}(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \sum_{\overline{q}_1} p_{\mathcal{A}_1}(x|\overline{q}_1) \sum_{\overline{q}_2} p_{\mathcal{A}_2}(x|\overline{q}_2) dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \sum_{\overline{q}_1 \times \overline{q}_2} p_{\mathcal{A}_1}(x|\overline{q}_1) p_{\mathcal{A}_2}(x|\overline{q}_2) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \sum_{\overline{q}_1 \times \overline{q}_2} p_{\mathcal{A}}(x|\overline{q}_1 \times \overline{q}_2) dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.
\end{aligned}$$

По лемме 2.4 последний ряд сходится для любых стохастических словарных функций непрерывных СММ-автоматов. Если взять два одинаковых автомата $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, получим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x)^2 dx$$

для произвольного автомата $\mathcal{A}$, что доказывает утверждение *а)* леммы.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть непрерывный СММ-автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть декартово произведение СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда скалярное произведение стохастических словарных функций $p_{\mathcal{A}_1}$ и $p_{\mathcal{A}_2}$ в евклидовом пространстве $\left(L_2{}^N\right)^*$ вычисляется по формуле*

$$(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{\left(L_2{}^N\right)^*} = ur\left((E - \hat{\pi})^{-1}\right),$$

где E — единичная $M \times M$-матрица, $\hat{\pi}$ — приведенная матрица переходов автомата $\mathcal{A}$.

Доказательство теоремы получается последовательным применением лемм 2.4 и 2.5.

Замечание 2.5. В общем случае для непрерывных СММ-автоматов формула скалярного произведения стохастических словарных функций не является эффективной, поскольку в ней используется приведенная матрица переходов $\hat{\pi}$ автомата $\mathcal{A}$, для которой в непрерывном случае нет эффективной вычислимости.

3. Полунепрерывные СММ-автоматы

Определение 3.1. *Непрерывный СММ-автомат $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$ будем называть полунепрерывным, если в каждом его состоянии плотность распределения выходов задана в виде линейной комбинации K многомерных гауссовых плотностей вероятностей (гауссовой смеси):*

$\forall i = 1, \ldots, M \quad \Pi_i(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} \omega_{(i,k)} \Gamma_{\mu_{(i,k)}, \Sigma_{(i,k)}}(x)$, *где $K \in \mathbb{N}$;*

$\forall\, k = 1, \ldots, K \quad \omega_{(i,k)} \geqslant 0$ *— весовые коэффициенты линейной комбинации,* $\sum\limits_{k=1}^{K} \omega_{(i,k)} \leqslant 1$;

$\Gamma_{\mu_{(i,k)}, \Sigma_{(i,k)}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_{(i,k)}|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_{(i,k)})^T {\Sigma_{(i,k)}}^{-1} (x-\mu_{(i,k)})}$ *— плотность многомерного нормального распределения с вектором средних $\mu_{(i,k)}$ и матрицей ковариации $\Sigma_{(i,k)}$.*

Замечание 3.1. Для каждого полунепрерывного СММ-автомата распределение выходных букв Π полностью задается конечным множеством векторов и матриц $\Pi = \{\omega_{(i,k)}, \mu_{(i,k)}, \Sigma_{(i,k)}, i = 1,\ldots,M,\ k = 1,\ldots,K\}$, где $\omega_{(i,k)}$ — k-й весовой коэффициент гауссовой смеси для i-го состояния автомата; $\mu_{(i,k)}$ — N-мерные векторы средних значений для k-й компоненты гауссовой смеси в i-м состоянии; $\Sigma_{(i,k)}$ — $N\times N$-матрица ковариации для k-й компоненты гауссовой смеси в состоянии q_i.

Лемма 3.1. *Для полунепрерывного СММ-автомата приведенная матрица переходов эффективно вычисляется по формуле* $\hat\pi_{ij} = \pi_{ij}\sum\limits_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}$.

Доказательство.

$$\hat\pi_{ij} = \pi_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Pi_i(x)dx = \pi_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x)dx = \pi_{ij}\sum_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x)dx = \pi_{ij}\sum_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $\Gamma_{(\mu_1,\Sigma_1)}(x)$ *и* $\Gamma_{(\mu_2,\Sigma_2)}(x)$ *— две N-мерные плотности нормального распределения, такие что матрицы* Σ_1, Σ_2, $\Sigma_1+\Sigma_2$, $\Sigma_1^{-1}+\Sigma_2^{-1}$ *— невырожденные. Тогда произведение этих плотностей вероятности есть с точностью до множителя многомерная нормальная плотность вероятности:* $\Gamma_{(\mu_1,\Sigma_1)}(x)\Gamma_{(\mu_2,\Sigma_2)}(x) = \Gamma_{(\mu_1-\mu_2,\Sigma_1+\Sigma_2)}(0)\Gamma_{(\mu,\Sigma)}(x)$, *где* $\Sigma = \left({\Sigma_1}^{-1}+{\Sigma_2}^{-1}\right)^{-1}$, $\mu = \Sigma\left({\Sigma_1}^{-1}\mu_1 + {\Sigma_2}^{-1}\mu_2\right)$.

Доказательство.

$$\Gamma_{(\mu_1,\Sigma_1)}(x)\Gamma_{(\mu_2,\Sigma_2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_1|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T{\Sigma_1}^{-1}(x-\mu_1)}\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_2|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T{\Sigma_2}^{-1}(x-\mu_2)} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^N\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}}e^{-\frac{1}{2}\left[(x-\mu_1)^T{\Sigma_1}^{-1}(x-\mu_1)+(x-\mu_2)^T{\Sigma_2}^{-1}(x-\mu_2)\right]} =$$

(приводим к полному квадрату квадратичную форму в показателе экспоненты)

$$= \frac{1}{(2\pi)^N\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}}e^{-\frac{1}{2}\left[(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)+(\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right]} =$$
$$= \frac{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma|}}{(2\pi)^N\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}}e^{-\frac{1}{2}\left[(\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right]}\frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}\left[(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_1+\Sigma_2|}}e^{-\frac{1}{2}\left[(\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right]}\Gamma_{(\mu,\Sigma)}(x) = \Gamma_{(\mu_1-\mu_2,\Sigma_1+\Sigma_2)}(0)\Gamma_{(\mu,\Sigma)}(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathcal{A}_1 = \langle\mathbb{R}^N, Q_1, \pi_1, \Pi_1\rangle$, $|Q_1| = M_1$, $\Pi_1 = \left\{\omega^1_{(i,k)}, \mu^1_{(i,k)}, \Sigma^1_{(i,k)}, i = 1,\ldots,M_1, k = 1,\ldots,K_1\right\}$ *и* $\mathcal{A}_2 = \langle\mathbb{R}^N, Q_2, \pi_2, \Pi_2\rangle$, $|Q_2| = M_2$, $\Pi_2 = \left\{\omega^2_{(i,k)}, \mu^2_{(i,k)}, \Sigma^2_{(i,k)}, i = 1,\ldots,M_2, k = 1,\ldots,K_2\right\}$ *— полунепрерывные СММ-автоматы,* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ *— непрерывный СММ-автомат, являющийся их декартовым произведением. Тогда автомат* $\mathcal{A}$ *является полунепрерывным СММ-автоматом с функциями плотности выходов, заданными в виде гауссовой смеси с весовыми коэффициентами* $\omega_{(i,i')(k,k')} = \omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{(\mu^1_{(i,k)}-\mu^2_{(i',k')},\Sigma^1_{(i,k)}+\Sigma^2_{(i',k')})}(0)$ *и гауссовыми функциями плотности* $\Pi_{(i,i')(k,k')} = \Gamma_{(\mu_{(i,k,i',k')},\Sigma_{(i,k,i',k')})}$, *где* $\Sigma_{(i,k,i',k')} = \left({\Sigma^1_{(i,k)}}^{-1} + {\Sigma^2_{(i',k')}}^{-1}\right)^{-1}$, $\mu_{(i,k,i',k')} = \Sigma_{(i,k,i',k')}\left({\Sigma^1_{(i,k)}}^{-1}\mu^1_{(i,k)} + {\Sigma^2_{(i',k')}}^{-1}\mu^2_{(i',k')}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\Pi_{(i,i')}(x) = \Pi^1_i(x)\Pi^2_{i'}(x) = \sum_{k=1}^{K_1}\sum_{k'=1}^{K_2}\omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x)\Gamma_{\mu_{(i',k')},\Sigma_{(i',k')}}(x) = \text{(по лемме 3.2)}$$
$$= \sum_{k=1}^{K_1}\sum_{k'=1}^{K_2}\omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{(\mu^1_{(i,k)}-\mu^2_{(i',k')},\Sigma^1_{(i,k)}+\Sigma^2_{(i',k')})}(0)\Gamma_{(\mu_{(i,k,i',k')},\Sigma_{(i,k,i',k')})}(x).$$

Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Скалярное произведение $(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{(L_2{}^N)^*}$ стохастических словарных функций полунепрерывных СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ эффективно вычисляется по формуле*

$$(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{(L_2{}^N)^*} = ur\left((E-\hat{\pi})^{-1}\right),$$

где E — единичная $M\times M$-матрица, $\hat{\pi}$ — приведенная матрица переходов автомата $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$, такая что

$$\hat{\pi}_{(i,i')(j,j')} = (\pi_1)_{ij}(\pi_2)_{i'j'}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{k'=1}^{K_2}\omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{(\mu^1_{(i,k)}-\mu^2_{(i',k')},\Sigma^1_{(i,k)}+\Sigma^2_{(i',k')})}(0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3.3 декартово произведение полунепрерывных СММ-автоматов является полунепрерывным СММ-автоматом, поэтому для вычисления приведенной матрицы переходов можно применить леммы 3.1 и 3.3. Далее по теореме 2.1 получаем требуемый результат.

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Существует способ введения эффективно вычислимой метрики на множестве полунепрерывных СММ-автоматов.*

Заключение

Предложенный способ введения метрики на множестве непрерывных СММ-автоматов отличается тем, что для широкого класса таких автоматов (названных в работе полунепрерывными) есть формула вычисления расстояния между автоматами, в которую входит конечное число элементарных операций над векторами и матрицами.

На практике метод СММ используется для моделирования таких объектов, как монофоны и трифоны в задачах распознавания речи, рукописные буквы в задачах распознавания изображений, голос диктора в задачах идентификации диктора и т. п. Плотности многомерных распределений вероятностей в большинстве практических приложений задаются в виде гауссовых смесей, с помощью которых можно приблизить с требуемой точностью любую непрерывную многомерную функцию плотности вероятности. Поэтому по сути речь идет о полунепрерывных СММ-автоматах. Это позволяет надеяться на то, что результаты, полученные в настоящей работе, будут иметь большое практическое значение.

Автор выражает благодарность за постановку задачи своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук Д. Н. Бабину.

Список литературы

1. *Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
2. *Carlyle J. W.* Reduced forms for stochastic sequencial machines // J. Math. Analysis and Applic. 1963. No 7. P. 167—175.

3. *Бухараев Р. Г.* Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985.
4. *Starke P. H.* Theorie stochastischen automaten. I, II // Elektron Informationsverarb. und Kybern. 1965. B. 1, No 2.
5. *Baum L. E., Petrie T.* Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains // Ann. Math. Stat. 1966. Vol. 37. P. 1554—1563.
6. *Baum L. E., Egon J. A.* An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process and to a model for ecology // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1967. Vol. 73. P. 360—363.
7. *Bakis R.* Continuous speech word recognition via senti-second acoustic states // Proc. ASA Meeting. Washington, DC. April 1976.
8. *Марков А. А.* Пример статистического исследования над текстом "Евгения Онегина", иллюстрирующий связь испытаний в цепь // Изв. Академии наук. 1913. VI, т. 7, № 3. С. 153—162.
9. *Рабинер Л. Р.* Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи: обзор // Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1989. Т. 7, № 2. С. 86—120.
10. *Мазуренко И. Л.* Автоматные методы распознавания речи. Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2001.
11. *Мазуренко И. Л.* Модель распознавания речи на основе монотонных вероятностных автоматов // Интеллектуальные системы в производстве. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2003. № 1. С. 48—65.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

Статья поступила в редакцию 30.01.04.