

УДК 519.6

ПРЯМОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПРИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ УСКОРЕНИИ

В. А. Жмайло, О. Г. Синькова, В. Н. Софронов, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

С помощью трехмерных газодинамической и гидродинамической методик исследуется развитие в поле тяжести турбулентности на плоской границе раздела двух несжимаемых жидкостей (газов) с разностью плотностей $n = 3$. Рассматривается случай, когда ускорение меняет знак в определенный момент времени. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными данными.

Введение

Рассматривается задача о турбулентном перемешивании под действием знакопеременного ускорения, создающего на начальной стадии неустойчивую, а на последующей стадии — устойчивую ситуацию на плоской границе раздела двух несжимаемых жидкостей (газов). Эта задача исследована экспериментально в работах [1, 2].

В данной работе (см. также [3]) задача исследуется методом прямого трехмерного численного моделирования с помощью газодинамической трехмерной методики ТРЭЖ [4]. При этом вещества рассматриваются как различные, т. е. с разными концентрациями, — такой двухжидкостный подход приводит к удовлетворительному согласию с измерениями. Используется довольно подробная счетная сетка $200 \times 200 \times 400$.

Отметим, что аналогичная задача моделировалась в трехмерном расчете работы [5] в одножидкостном приближении, когда газы описываются как одно вещество. В этой работе не было получено уменьшения зоны перемешивания (сепарации) после смены знака ускорения. Возникло предположение, что отсутствие сепарации связано именно с использованием одножидкостного подхода, который ведет к счетному гомогенному перемешиванию веществ в силу наличия большой схемной вязкости. Двухжидкостный подход свободен от этого недостатка на контактных границах, и перемешивание в этом случае является более гетерогенным.

С целью выяснения данного вопроса в настоящей работе указанная задача исследуется также с помощью одножидкостного подхода как по трехмерной газодинамической [4], так и по гидродинамической [6], обеспечивающей несжимаемость течения, методике комплекса ТРЭЖ. В этих расчетах используется счетная сетка $100 \times 100 \times 200$ — для сравнения на такой же сетке выполнен и расчет с двумя жидкостями.

Численные массивы гидродинамических величин из трехмерных расчетов используются для нахождения моментов этих величин (диагональные компоненты тензора Рейнольдса (турбулентной энергии), турбулентные потоки, профили плотности и ее среднеквадратичной пульсации), а также для построения одноточечной функции плотности распределения вероятности (ФПВ) концентрации.

Данная задача также исследовалась численно с помощью феноменологической (k, ε) -модели турбулентности, однако эффект уменьшения зоны перемешивания на устойчивой стадии с помощью такой модели не описывается [3]. Здесь указанная задача анализируется с помощью модели [7] анизотропной турбулентности.

Постановка расчетов

При расчете по газодинамической методике задача ставится аналогично [3, 8]: в начальный момент два полупространства, разделенные плоскостью $z = z_c = 0$, заполнены покоящимися идеальными газами с плотностями $\rho_1 = 1$ и

$\rho_2 = n$ ($n = 3$, число Атвуда $A \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$).

Ускорение тяжести при $t \leq t^* = 3$, $g_z \equiv -g = -1$, направлено от тяжелого вещества к легкому. При $t > t^*$ $g_z \equiv g_{12} = 22/75$, что соответствует эксперименту.

Счетная область — параллелепипед с вертикальной стороной боковой грани $\Lambda = 2$. Его горизонтальная грань — квадрат со стороной $L_x = L_y = 1$. Начальная геометрия представлена на рис. 1.

В начальный момент на границе раздела (в слое толщиной в одну ячейку) с помощью генератора случайных чисел задаются случайные возмущения плотности: $\delta\rho = \pm\rho_1\delta$, $\delta = 0,1$.

Начальный профиль давления задается исходя из условия гидростатического равновесия: $p(z) = p_0 - \int_{z_1}^z \rho(z)gdz$, где координата верхней грани $z_2 = 0,85$, координата нижней — $z_1 = -1,15$.

Счетная сетка — равномерная, с числом ячеек $N_x = N_y$, $N_z = 2N_x$.

В расчете на сетке с $N_x = 200$ $p_0 = 8,7$; на сетке с $N_x = 100$ $p_0 = 23,7$, т. е. на грубой сетке p_0 увеличено для уменьшения счетных осцилляций на устойчивой стадии.

Уравнения газодинамики решаются для идеальной (с нулевой молекулярной вязкостью и теплопроводностью) двухкомпонентной среды. Уравнение состояния — идеальный газ с постоянной адиабаты $\gamma = 1,4$.

На всех границах счетной области ставится условие типа *жесткая стенка*.

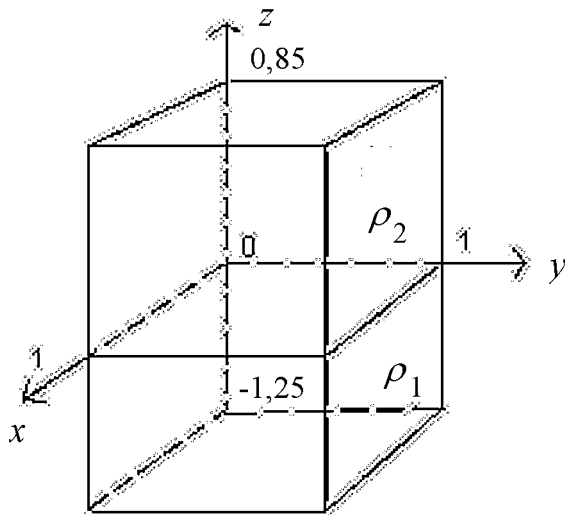


Рис. 1. Геометрия задачи

Указанная задача рассчитывалась в двух вариантах, в одном из которых оба газа разной плотности рассматривались как различные, т. е. с разными концентрациями, в другом — считались одним и тем же веществом.

Кроме того, был выполнен расчет для задачи с постоянным ускорением $g = 1$ на сетке $200 \times 200 \times 400$.

Постановка расчетов по гидродинамической методике в целом аналогична описанной выше. Используется счетная сетка с $N_x = 100$. Отличие заключается в том, что для этой методики не требуется задавать давление в силу использования условия несжимаемости.

Результаты трехмерных расчетов, интегральные характеристики

Координаты зоны перемешивания. Результаты двухжидкостного расчета показаны на рис. 2 в виде растровых картин концентрации легкого вещества в горизонтальном сечении $y = 0,5$ для разных моментов времени.

Эволюция течения на первой (неустойчивой) стадии задачи в целом аналогична полученной в предыдущих расчетах [8]: наблюдается укрупнение со временем вихрей и выход в конце указанной стадии на автомодельный режим.

Автомодельный режим для данной стадии выражается, в частности, в выходе на линейную зависимость от времени функции ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) $L_t(\tau)$:

$$F \equiv \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{L_t}{Ag}}. \quad (1)$$

Здесь время τ измерено в единицах $t_0 \equiv \sqrt{\frac{L_x}{g}}$, ($\tau \equiv t/t_0$), а величина $L_t(\tau)$,

$$L_t \equiv z_2 - z_1, \quad (2)$$

задает ширину ЗТП по направлению z , определяемую по точкам z_1, z_2 , в которых достигается достаточно малое значение ε возмущения гидродинамической величины, например концентрации. Далее полагаем, что $c_2(z_1) = \varepsilon$, $c_2(z_2) = 1 - \varepsilon$, c_2 — массовая доля вещества, имевшего в начальный момент плотности $\rho_2 = n$.

При этом угол наклона $\frac{dF}{d\tau}$ определяет значение коэффициента $\alpha_a = \left(\frac{dF}{d\tau}\right)^2$ в формуле для

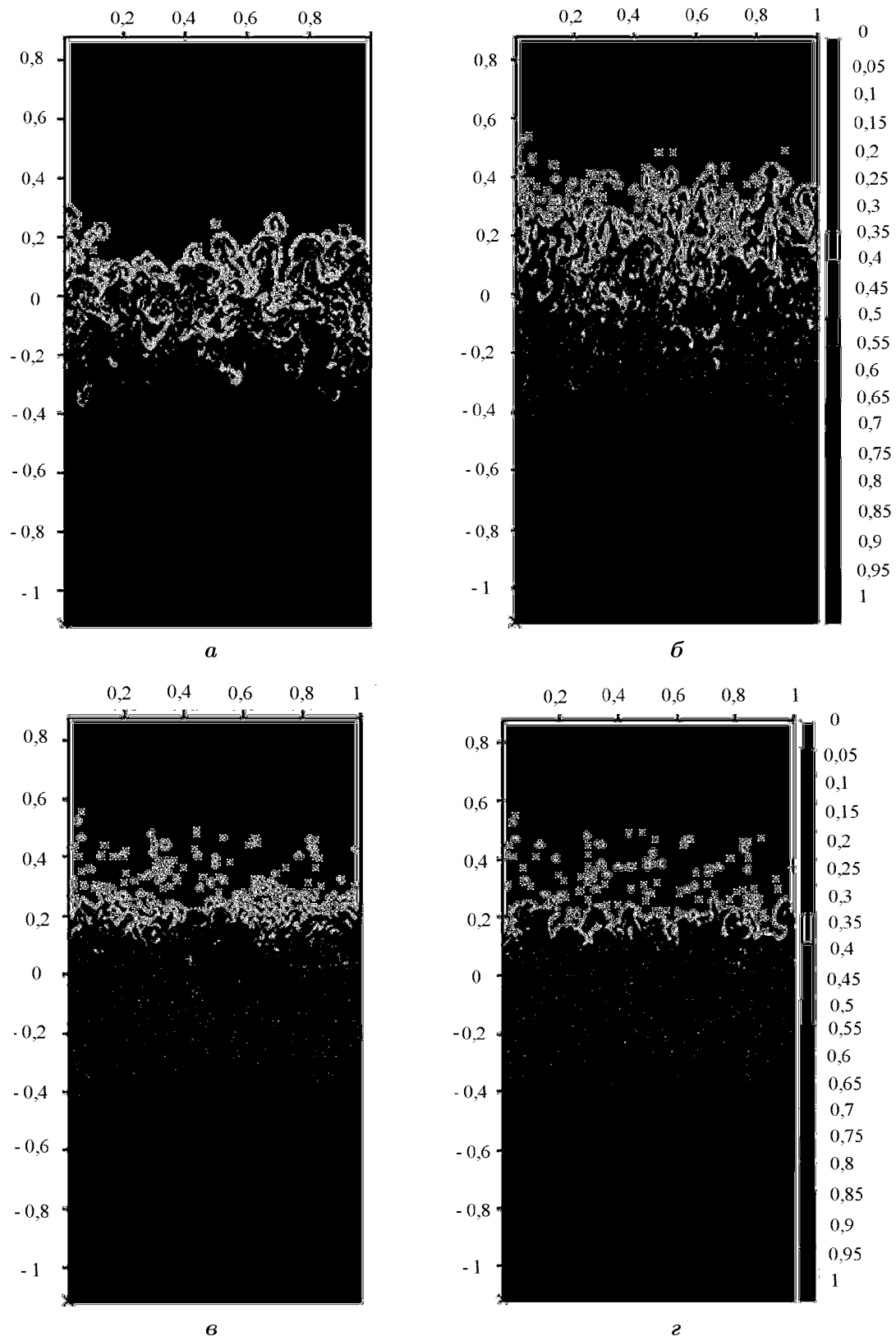


Рис. 2. Растровая картина концентрации легкого вещества в сечении $y = 0,5$: $a - t = 3$; $б - t = 5$; $в - t = 9$; $г - t = 11,5$;

ширины ЗТП на первой (автомодельной) стадии:

$$L_{ta} = \alpha_a Agt^2.$$

На рис. 3 приведена зависимость $F(\tau)$, полученная из расчетов с использованием формул (1), (2). Из рисунка следует, что на первой стадии поведение $F(\tau)$ в разных вариантах расчета мало отличается.

На второй стадии в расчетах с одним веществом отмечается лишь незначительное уменьшение $F(\tau)$, а далее она медленно возрастает. В то же время в расчетах с двумя веществами $F(\tau)$ линейно (с точностью до небольших пульсаций — см. рис. 3) убывает. При этом наклоны кривой $F(\tau)$ близки в обоих вариантах на различных сетках. Угол наклона $\alpha^{(-)} \equiv \frac{dF}{d\tau} \approx -0,084$, соответствующая линейная аппроксимация приведена на рис. 3.

На рис. 4 показана зависимость от времени функции

$$F_2 \equiv \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{z_2 - z_c}{Ag}}$$

координаты z_2 проникновения легкой жидкости в тяжелую. В целом $F_2(\tau)$ ведет себя так же, как $F(\tau)$. При этом, как и следовало ожидать, ЗТП растет быстрее в сторону легкого вещества.

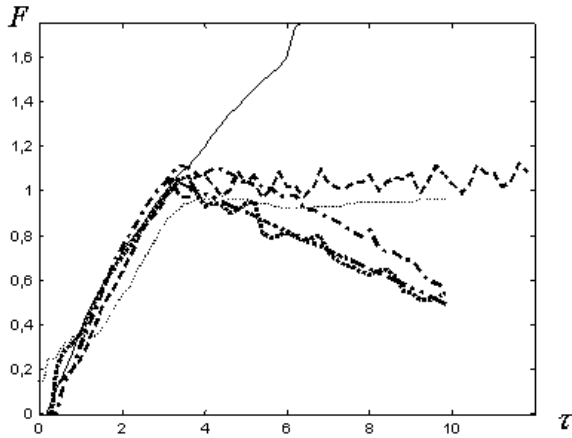


Рис. 3. Расчетные зависимости от времени функции ширины ЗТП: — — с постоянным ускорением по методике [4]; \dots — с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$; $-\cdot-\cdot-$ — с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 100$; $- - -$ — с переменным ускорением, с одним веществом по методике [4], $N_x = 100$; \dots — с переменным ускорением, с одним веществом по методике [6], $N_x = 100$; $-\cdot-\cdot-$ — аппроксимация с $\alpha^{(-)} = -0,084$

На второй стадии нарушается условие гидростатического равновесия и, поскольку условие несжимаемости в расчетах по "сжимаемой" методике выполняется с недостаточной точностью (что диктуется требованием не очень малого счетного шага по времени), в задаче возникают волны, приводящие к пульсациям представляющих интерес величин. Отметим, что пульсации функции $F_2(\tau)$, как видно из рис. 4, заметно меньше в расчетах с большим значением давления p_0 ($N_x = 100$).

Следует также отметить, что в расчетах с одним веществом на второй стадии отмечается лишь незначительное уменьшение $F_2(\tau)$, а далее она медленно возрастает. В то же время в расчетах с двумя веществами $F_2(\tau)$ линейно (с точностью до небольших пульсаций — см. рис. 4) убывает, причем наклоны ее кривой близки в обоих вариантах расчета на различных сетках и близки к наклону, наблюдававшемуся в опытах. Угол наклона $\alpha_2^{(-)} \equiv \frac{dF_2}{d\tau} \approx -0,04$, соответствующая аппроксимация приведена на рис. 4.

В работах [1, 2] измерена величина

$$f \equiv \sqrt{2A\alpha_s} \equiv \frac{d\sqrt{z_2 - z_c}}{d\sqrt{S^*}},$$

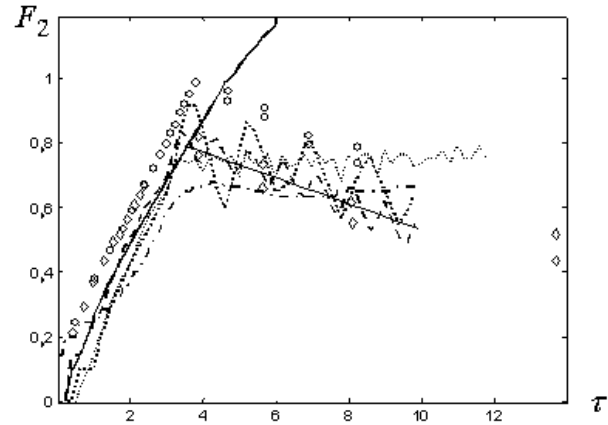


Рис. 4. Зависимости от времени функции координаты z_2 проникновения легкой жидкости в тяжелую: — — расчет с постоянным ускорением по методике [4]; $- - -$ — расчет с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 100$; \dots — с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$; \dots — с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$; \dots — с переменным ускорением, с одним веществом по методике [4], $N_x = 100$; $-\cdot-\cdot-$ — с переменным ускорением, с одним веществом по методике [6], $N_x = 100$; $\circ \circ \circ$ — опыт [2], $S^* = 360$; $\diamond \diamond \diamond$ — опыт [2], $S^* = 140$; $-\cdot-\cdot-$ — аппроксимация с $\alpha_2^{(-)} = -0,04$

где $S' \equiv g_{12} \frac{(t - t_c)^2}{2}$; t_c — время достижения максимума F_2 .

В расчете

$$f = \frac{dF_2}{d\tau} \sqrt{A \frac{2g}{g_{12}}} \approx -0,074,$$

что несколько меньше (по модулю) значения $f \approx -0,1$ ($\alpha_s \approx 0,01$), предлагаемого авторами работ [1, 2] на основании их экспериментов. Заметим, однако, что из приведенных на рис. 5 соответствующих данных опыта [2] ($S^* = 360$, $\tau^* = 3,8$) следует значение $f \approx -(0,062 \div 0,096)$ ($\alpha_s \approx 0,0038 \div 0,0092$), что согласуется с результатами расчета, выполненного авторами настоящей работы. При этом для вычисления $S(t)$ использовались значения, указанные авторами [2]: $g = a_1 = 6\,060 \text{ м/с}^2$; $g_{12} = a_2 = 2\,450 \text{ м/с}^2$.

В то же время для данных опыта [2] ($S^* = 140$, $\tau^* = 2,4$) использование для вычисления $S(t)$ значений, указанных авторами [2], $g = a_1 = 6\,060 \text{ м/с}^2$, $g_{12} = a_2 = 1\,760 \text{ м/с}^2$, приводит к максимально возможному значению $S \approx 620$, заметно меньшему, чем следует из измерений [2], $S \approx 790$. Поэтому для того чтобы получить это значение S , приходится предположить, что

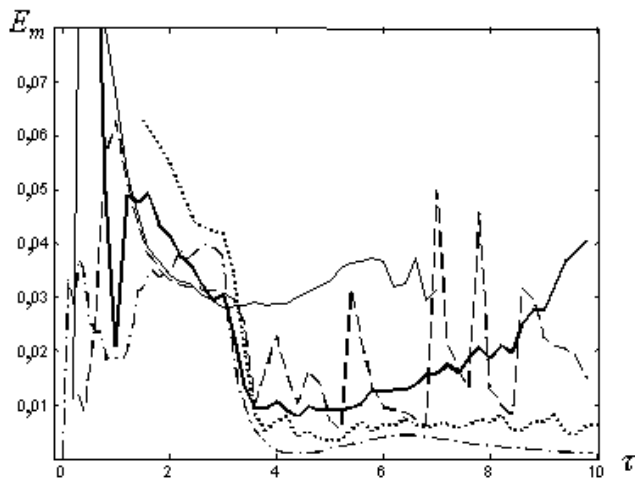


Рис. 5. Расчетные зависимости от времени максимальной в ЗТП приведенной турбулентной энергии: — — с постоянным ускорением по методике [4]; - - - с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$; — с переменным ускорением, с двумя веществами по методике [4], $N_x = 100$; ··· с переменным ускорением, с одним веществом по методике [4], $N_x = 100$; - · - с переменным ускорением, с одним веществом по методике [6], $N_x = 100$

$g_{12} = 1300 \text{ м/с}^2$. Полученные в результате такой обработки экспериментальные точки показаны на рис. 4.

Как видно, для первых шести точек после смены знака ускорения следует значение $f \approx -(0,066 \div 0,071)$ ($\alpha_s \approx 0,0043 \div 0,0051$), что в среднем ниже, чем для $S^* = 360$, и незначительно ниже результата расчета, выполненного авторами настоящей работы. Если же принимать во внимание две последние точки, значение f оказывается еще в несколько раз меньше. Однако для этих точек точность определения величины f , очевидно, мала из-за значительной зависимости найденных для них значений τ от g_{12} .

Следует подчеркнуть, что опыт с $S^* = 140$ в большей степени, нежели с $S^* = 360$, подвержен влиянию эффектов, нарушающих автомодельность турбулентного течения, так как он ближе к начальной стадии, на которой эти эффекты преобладают.

Отметим, что значения f для обоих значений S^* оказываются меньше значения $f \approx -0,1$ ($\alpha_s \approx 0,01$), предлагаемого авторами работ [1, 2].

Пульсационные характеристики. Для первой стадии данной задачи автомодельный режим выражается также в выходе на стационарное значение величины

$$E_m(t) \equiv \max(E)$$

— максимального по ширине ЗТП значения приведенной турбулентной энергии

$$E \equiv \frac{k}{L_t g}, \quad \text{где}$$

$k(z) = E_{ii}$, $E_{ik}(z) = \frac{\langle u_i u_k \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_k \rangle}{2}$, усреднение (обозначаемое $\langle \rangle$) производится по всему горизонтальному сечению $z = \text{const}$.

Как видно из рис. 5, во всех расчетах на начальной стадии $E_m(t)$ довольно велика (задача "помнит" начальные возмущения). В конце первой стадии эта величина выходит на приблизительно постоянное значение $E_m = E_{ma}$, близкое для всех вариантов расчета. С изменением знака ускорения сначала наблюдается заметное падение E_m , после чего величина E_m практически постоянна, но существенно отличается в расчетах по разным методикам: в расчете по методике [4] E_m приблизительно вдвое меньше E_{ma} , в то время как расчет по гидродинамической методике [6] дает на порядок меньшее значение.

Во всех расчетах по методике [4] с изменением знака ускорения сначала наблюдается заметное падение E_m , причем достигаются близкие друг к другу значения. Далее, однако, в расчетах с двумя концентрациями идет медленное увеличение E_m , причем в расчете с малым давлением p_0 ($N_x = 200$) оно происходит с большими пульсациями.

Для более обоснованного суждения об имеющихся автомоделных режимах следует обратиться также к другим турбулентным величинам.

На рис. 6 показана зависимость от времени максимального в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности

$$\sigma \equiv \max (\langle \rho'^2 \rangle).$$

Как следует из рисунка, на первой стадии эта величина в расчетах с двумя веществами по методике [4] выходит на приблизительно постоянное значение. С изменением знака ускорения наблюдаются пульсации σ (ее значения заметно больше в расчете с малым давлением p_0), но в среднем она остается постоянной и с тем же значением, что на первой стадии.

В то же время в расчетах с одним веществом отличие имеется уже на первой стадии: достигаемое в конце этой стадии значение σ гораздо меньше. На второй стадии наблюдается умень-

шение σ до очень малых значений — при этом поведение $\sigma(t)$ весьма близко в обоих расчетах, как по методике [4], так и по методике [6].

На рис. 7 приведены максимальные в ЗТП значения R_m относительного квадрата пульсаций плотности R :

$$R_m \equiv \max (R), \quad R \equiv \frac{\sigma}{\rho^2}.$$

В целом картина аналогична наблюдавшейся для величины σ , можно лишь отметить для обоих расчетов по методике [4] слабое, но все же заметное убывание со временем величины R_m .

Обозначим максимальное в ЗТП абсолютное значение турбулентного потока массы для его направления, соответствующего неустойчивой ситуации, и для направления, соответствующего устойчивой ситуации, соответственно $R_{zm+} \equiv \max (-R_z)$ и $R_{zm-} \equiv \max (R_z)$, где

$$R_z \equiv \frac{r_z}{\sqrt{L_t g}}, \quad r_z \equiv \langle \rho' u'_z \rangle.$$

На рис. 8 показана зависимость от времени величины, характеризующей результирующий эффект наличия в ЗТП турбулентных потоков массы разных знаков: $R_{zm} = R_{zm-} - R_{zm+}$. Как видно, на второй стадии с течением времени результирующий поток в целом (с точностью до пульсаций, связанных с прохождением волн) меняет знак по отношению к нормальной (устойчивой) ситуации и этот эффект более заметен для

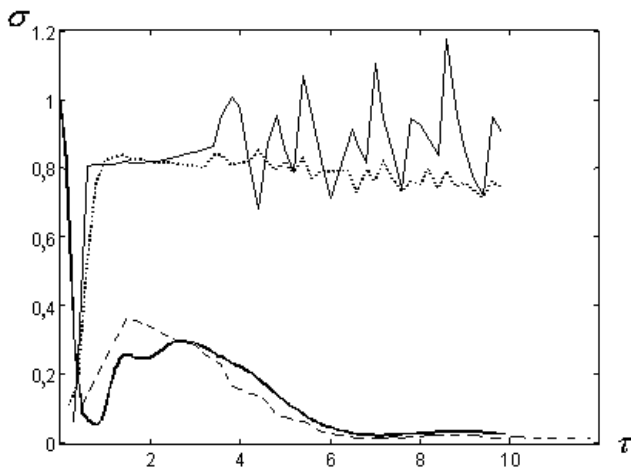


Рис. 6. Расчетные зависимости от времени максимального в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности: - - - с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$; \cdots — с двумя веществами по методике [4], $N_x = 100$; - · - с одним веществом по методике [4], $N_x = 100$; — с одним веществом по методике [6], $N_x = 100$

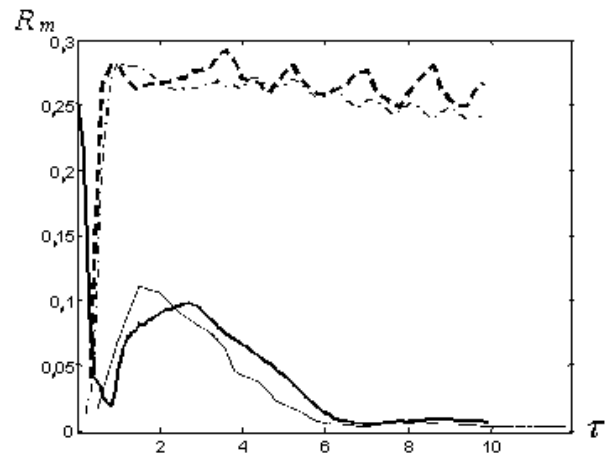


Рис. 7. Расчетные зависимости от времени максимального в ЗТП значения относительного квадрата пульсаций плотности R_m : - - - с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$; \cdots — с двумя веществами по методике [4], $N_x = 100$; - · - с одним веществом по методике [4], $N_x = 100$; — с одним веществом по методике [6], $N_x = 100$

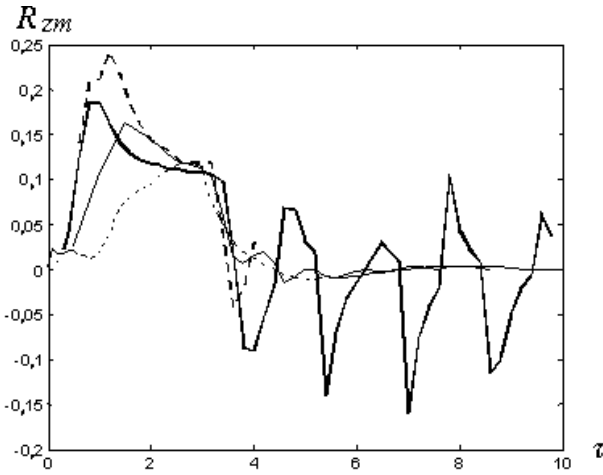
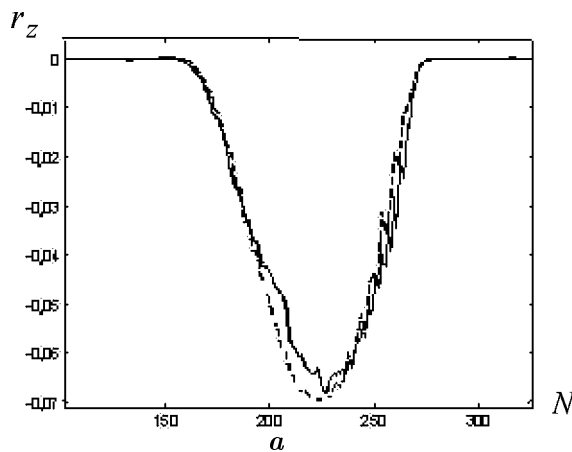


Рис. 8. Расчетные зависимости от времени результирующего турбулентного потока массы R_{zm} :
 — с двумя веществами по методике [4], $N_x = 200$;
 - - с двумя веществами по методике [4], $N_x = 100$;
 — с одним веществом по методике [4], $N_x = 100$;
 ··· с одним веществом по методике [6], $N_x = 100$

расчетов с двумя веществами. В расчетах с одним веществом спадание более плавное, появляющийся отрицательный поток имеет меньшую величину; при этом оба варианта близки, если не считать пульсаций R_{zm} , R_{zm-} в расчете по методике [4].

Профили величин в трехмерных расчетах. На рис. 9 приведено сравнение профилей турбулентного потока массы $r_z \equiv \langle \rho' u'_z \rangle$ как функции номера счетного узла, полученных в расчетах по методике [4] с одним и двумя веществами. В конце первой стадии профили практически совпадают. После изменения знака ускорения знак r_z также периодически меняется по



мере прохождения волн через ЗТП. При этом амплитуда пульсаций в расчете с одним веществом меньше.

Профили квадрата пульсаций плотности σ (рис. 10) в конце первой стадии близки по шири-

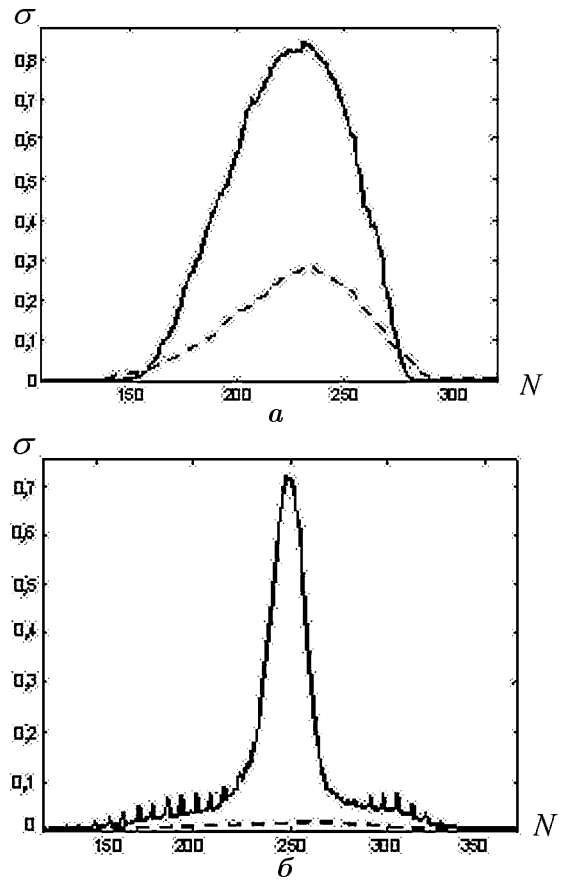


Рис. 10. Профили квадрата пульсаций плотности как функции номера счетного узла в расчетах по методике [4] с одним (- -) и двумя (—) веществами: $a - t = 3$; $b - t = 9,4$

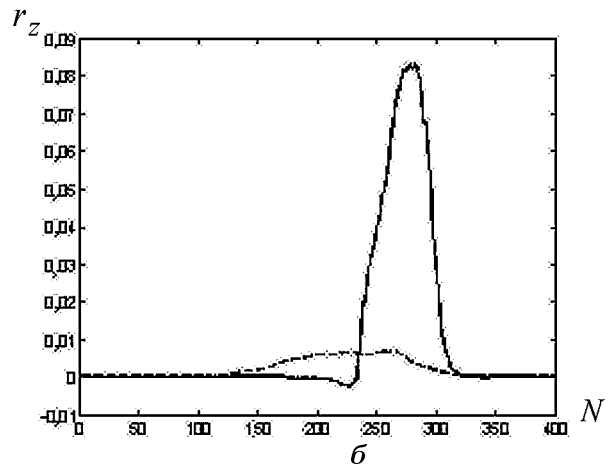


Рис. 9. Профили турбулентного потока массы как функции номера счетного узла в расчетах по методике [4] с одним (- -) и двумя (—) веществами: $a - t = 2,6$; $b - t = 5,6$

не и положению, но максимум σ в расчете с одним веществом намного меньше. После изменения знака ускорения это отличие особенно существенно.

Профили диагональных компонент тензора пульсаций скорости $E_{ii}(z) \equiv \langle u_i u_i \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle$ (суммирование по i нет), как видно из рис. 11, в конце первой стадии в целом близки. Особенно это относится к продольной компоненте E_{zz} , в то время как поперечные компоненты E_{xx} , E_{yy} в легком веществе заметно отличаются.

После изменения знака ускорения характерно увеличение возмущений в легком веществе (вне ЗТП), особенно у поперечных компонент, значения которых колеблются со временем, но в целом возрастают, так что к моменту $t = 8$ превышают значения $E(\eta)$ в ЗТП.

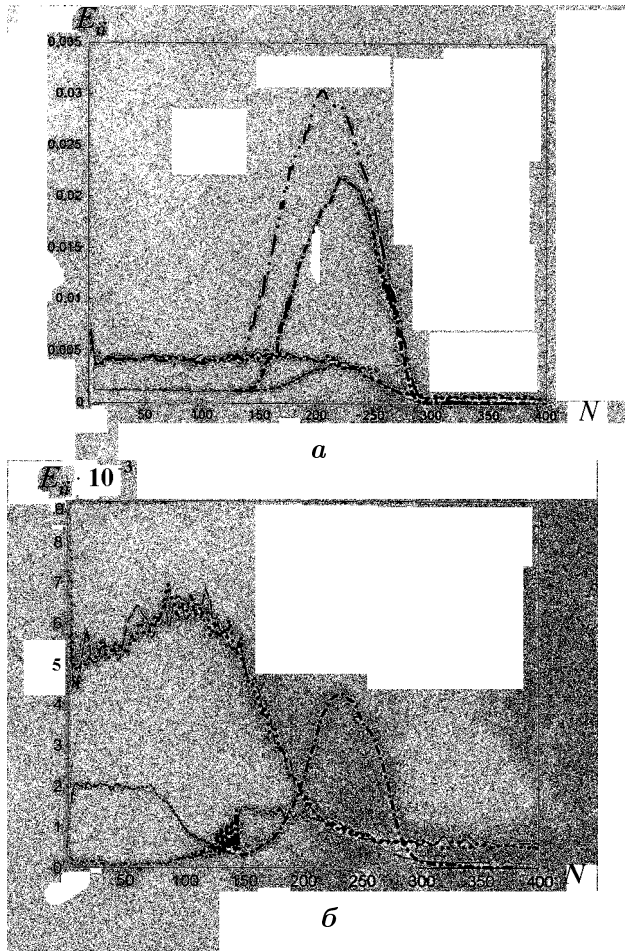


Рис. 11. Профили компонент турбулентной энергии как функций номера счетного узла в расчетах по методике [4]: — — с двумя веществами, E_{xx} ; - - - с двумя веществами, E_{yy} ; - · - с двумя веществами, E_{zz} ; · · · с одним веществом, E_{xx} ; - - - с одним веществом, E_{yy} ; - · - с одним веществом, E_{zz} ; а — $t = 3$; б — $t = 6$

Функция плотности распределения вероятности концентрации. По данным численного расчета определялась одноточечная функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества:

$$F(c_2, z, t) = \frac{N(c_1^{(ik)}(z) \geq c_2) - N(c_2^{(ik)}(z) \geq c_2 + \Delta c)}{N_0 \Delta c}$$

Здесь $N(c_2^{(ik)}(z) \geq c_2)$ — число точек в данной горизонтальной плоскости z , текущая концентрация $c_2^{(ik)}$ в которых превышает c_2 ; $N_0(z)$ — полное число точек в этой плоскости. Величина c_2 пробегает ряд значений из M чисел: $c_2 = (0, 1, 2, \dots, M - 1) \Delta c$, где $M \Delta c = 1$; в проведенных авторами расчетах $M = 100$.

На рис. 12, а, б сравниваются графики функции $F(c_2)$ для двух вариантов расчета, получен-

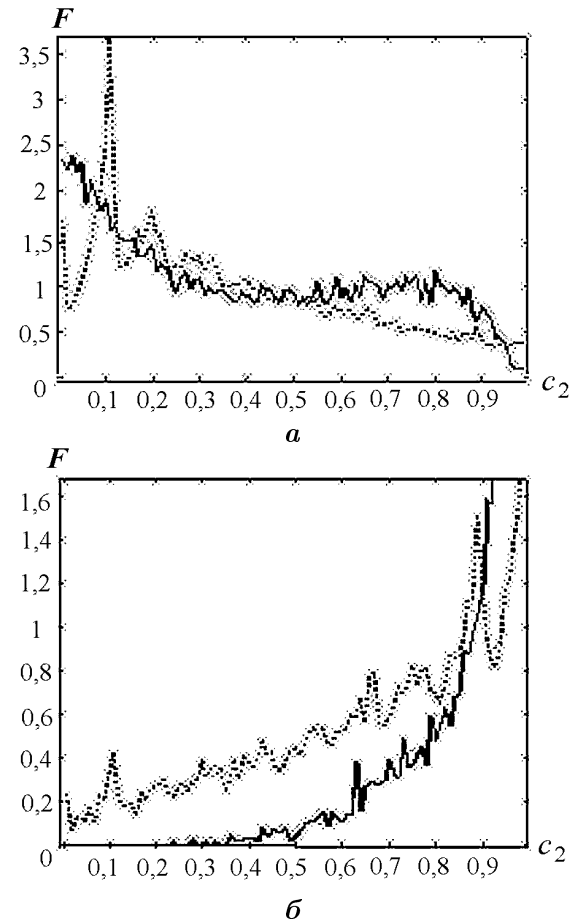


Рис. 12. Расчетная функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества, $t = 3$: · · · — с двумя веществами по методике [4] на сетке с $N_x = 200$; — — с одним веществом по методике [6] на сетке с $N_x = 100$; а — $\eta = -0,237$; б — $\eta = -0,344$

ные на момент времени $t = 3$, когда ускорение соответствует неустойчивой ситуации. Один расчет выполнен с двумя веществами по методике [4] на подробной сетке с $N_x = 200$, другой — с одним веществом по методике [6] на менее подробной сетке с $N_x = 100$. В подписи к рис. 12 приведены значения вертикальной координаты z (отсчитываемой от контактной границы), отнесенной к ширине L_t ЗТП, т. е. $\eta \equiv \frac{z - z_c}{L_t}$.

Вблизи границы ЗТП, прилегающей к легкому веществу ($\eta \leq -0,5$), максимальные значения $F(c_2)$ достигаются в основном вблизи $c_2 \approx 0$, т. е. наиболее вероятны частицы легкого вещества. При этом поведение $F(c_2)$ похоже в обоих вариантах расчета.

Заметное расхождение указанных вариантов начинается вблизи центральной части ЗТП (где, как видно из предыдущего раздела, имеется и наибольшее отличие в квадрате пульсаций плотности): в варианте с двумя веществами $F(c_2)$ распределена по c_2 более равномерно, в то время как с одним веществом $F(c_2)$ оказывается сосредоточенной ближе к $c_2 \sim 1$. Точно так же вблизи

границы ЗТП, прилегающей к тяжелому веществу ($\eta \geq 0,5$), максимальные значения $F(c_2)$ достигает (в варианте с одним веществом) в основном вблизи $c_2 \approx 1$ (имеет вид δ -функции), т. е. наиболее вероятны частицы тяжелого вещества. Но здесь тяжелое вещество в среднем преобладает, что и должно приводить к меньшим пульсациям плотности в варианте с одним веществом.

На рис. 13, а–г графики функции $F(c_2)$ для тех же двух вариантов расчета сравниваются на момент времени $t = 5,5$, когда ускорение соответствует устойчивой ситуации.

Видно, что заметное расхождение двух вариантов наблюдается в легком веществе уже вдали от границы ЗТП, прилегающей к легкому веществу ($\eta \leq -0,8 \div 1$). Хотя максимальные значения $F(c_2)$ достигаются в основном вблизи $c_2 \approx 0$, в варианте с одним веществом заметен вклад в интеграл $\int_{c_2=0}^1 F(c) dc$ тяжелого вещества.

Существенное различие указанных вариантов имеется ближе к центральной части ЗТП: в варианте с двумя веществами $F(c_2)$ оказывается

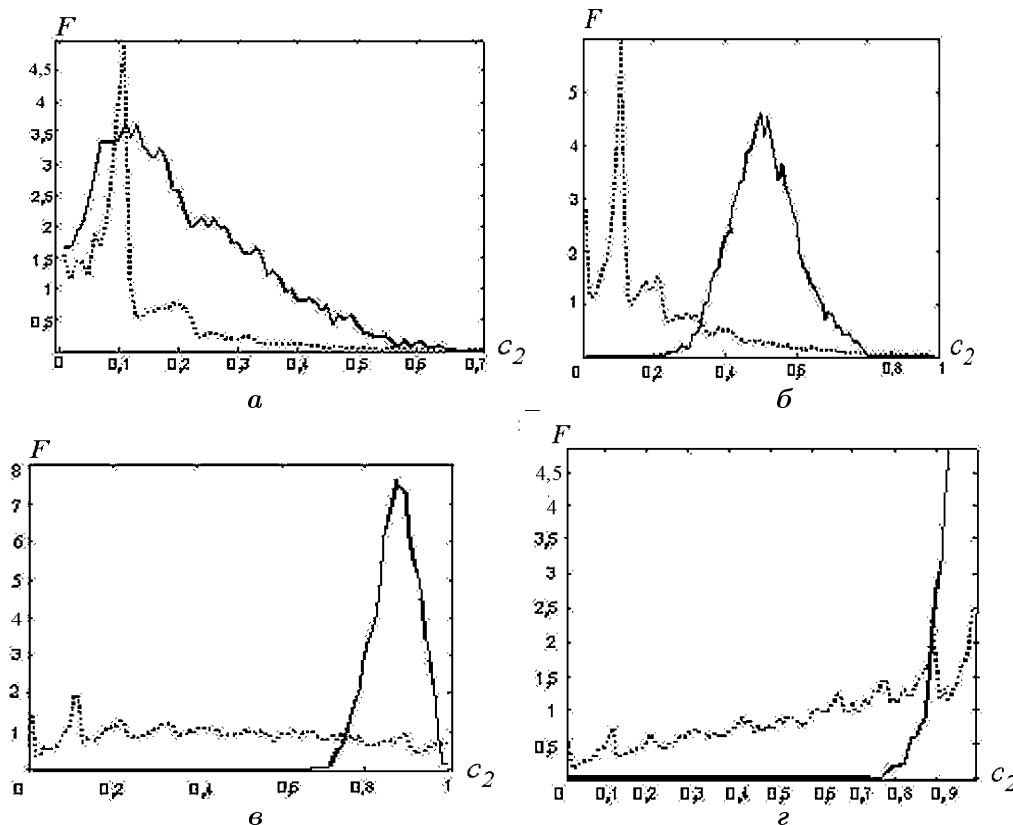


Рис. 13. Расчетная функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества, $t = 5,5$: — с двумя веществами по методике [4] на сетке с $N_x = 200$; \cdots — с одним веществом по методике [6] на сетке с $N_x = 100$; а — $\eta = 0,65$; б — $\eta = -0,225$; в — $\eta = 0,225$; г — $\eta = 0,45$

сосредоточенной ближе к $c_2 \sim 0$, в то время как с одним веществом $F(c_2)$ оказывается распределенной вблизи $c_2 \sim 0,5$, что соответствует однородному (однородному) перемешиванию. Понятно, что последнее соответствует обращению пульсаций плотности в нуль, что и наблюдалось в указанном варианте расчета.

Вблизи границы ЗТП, прилегающей к тяжелому веществу ($\eta \geq 0,5$), ситуация аналогична описанной выше для $t = 3$: максимальные значения $F(c_2)$ достигает (в варианте с одним веществом) в основном вблизи $c_2 \approx 1$ (имеет вид δ -функции), что должно приводить к меньшим пульсациям плотности в таком варианте.

Спектры пульсаций скорости и плотности. На основе расчетных данных был исследован спектр пульсаций скорости в соответствии с формулами

$$E_{iil}^{(n)}(x, y) = \langle u_i^2 \rangle|_{l,x,y,z} - \langle u_i \rangle^2|_{l,x,y,z}, \quad n = 1, 2, \dots, N_z;$$

$$E_{iil}(z) = E_{iil}^{(n)} = \langle E_{iil}^{(n)}(x, y) \rangle, \quad l = rh, \quad r = 2, 3, \dots, N_x. \quad (3)$$

Здесь усреднение $\langle \rangle|_{l,x,y}$ делается в n -м слое (по z), в квадрате со стороной l ($l = rh$, h — размер счетной ячейки), центр которого имеет координаты x , y , и далее выполняется усреднение $\langle \rangle$ по всем возможным значениям x , y квадратов с данным значением l во всем n -м слое. Суммирования по i в (3) нет.

Далее,

$$E_l = \sum_{i=1}^{i=3} E_{iil}.$$

Результаты как двухжидкостного, так и одножидкостного расчета для точек внутри ЗТП на момент времени $\tau = 3$ показаны на рис. 14. Там же для сравнения приведен колмогоровский спектр:

$$\lg E_l = -\frac{2}{3} \lg K + \text{const},$$

где $K = 2\pi/l$. Напомним, что спектральная плотность пульсаций $\tilde{E}_K \sim E_l/K \sim K^{-5/3}$.

В обоих вариантах расчета спектры всех компонент ведут себя похожим образом, а спектры полной энергии E_l на малых пространственных масштабах (большие K) приближаются к трехмерному колмогоровскому спектру. Видно также, что при больших K анизотропия компонент E_{iil} остается существенной.

Аналогичная величина рассчитывается для квадрата пульсаций плотности:

$$\rho_l^n(x, y) = \langle \rho^2 \rangle|_{l,x,y,z} - \langle \rho \rangle^2|_{l,x,y,z}, \quad n = 1, 2, \dots, N_z;$$

$$\rho_l(z) \equiv \langle \rho_l^n(x, y) \rangle, \quad l = rh, \quad r = 2, 3, \dots, N_x;$$

ее график показан на рис. 15 для момента времени $\tau = 3$ также для обоих вариантов расчета: одно- и двухжидкостного.

Как видно, спектр пульсаций плотности на малых масштабах приближается к колмогоровскому лишь в одножидкостном варианте расчета. В двухжидкостном варианте отличие от колмогоровского более существенно. Следует также отметить важное обстоятельство: перепад ρ_l на всем интервале волновых чисел K в двухжидкостном варианте гораздо меньше (приблизительно втрое), чем в одножидкостном.

Фактически метод концентраций поддерживает почти максимально возможный перепад плот-

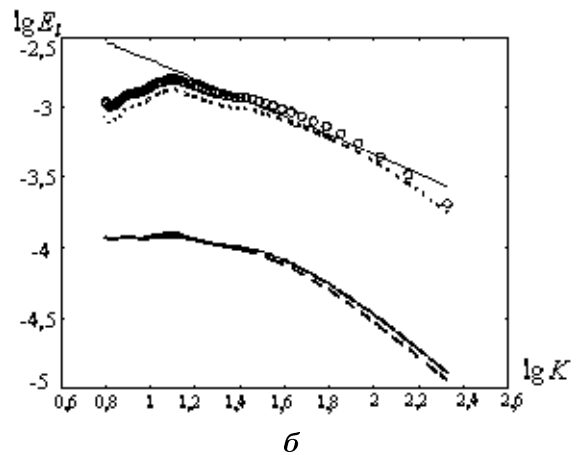
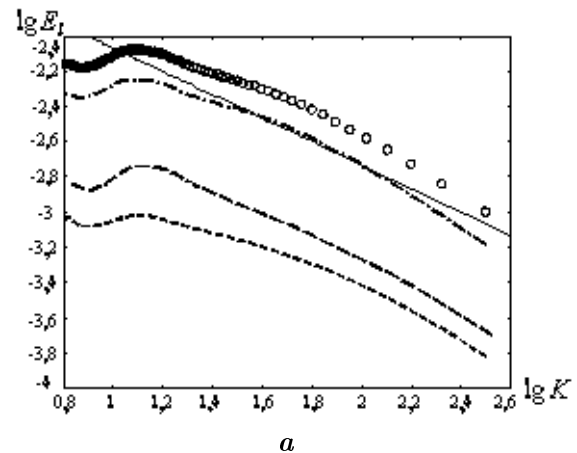


Рис. 14. Спектр пульсаций скорости для двухжидкостного (а) и одножидкостного (б) расчетов, $\tau = 3$, $\eta = 0,27$: $\circ \circ \circ$ — E ; $---$ — E_x ; $- \cdot - \cdot -$ — E_y ; $---$ — E_z ; $---$ — колмогоровский спектр

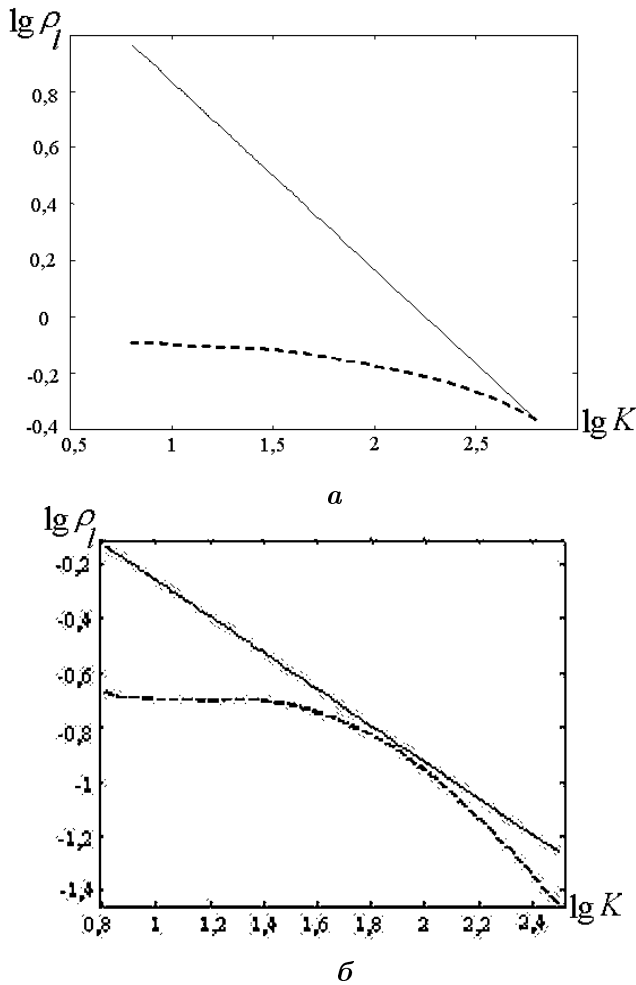


Рис. 15. Спектр пульсаций плотности для двухжидкостного (а) и одножидкостного (б) расчетов, $\tau = 3$, $\eta = 0,11$: - - - численный расчет; — — колмогоровский спектр

ностей уже в пределах счетной ячейки, так что перепад ρ_l на всем интервале волновых чисел K оказывается небольшим: менее чем вдвое.

Анализ задачи с помощью феноменологической модели турбулентности. В работе [7] приведены уравнения для турбулентной энергии k ($k \equiv q^2/2$, $q^2 \equiv R_{kk}$) и среднеквадратичной пульсации плотности $R \equiv \langle \rho'^2 \rangle$:

$$\frac{dq^2}{dt} = -2R_{lk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{2R_k g_k}{\rho} - 3b \frac{q^3}{\Lambda} + \text{Diff}(q^2); \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = -2R_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \kappa \frac{q}{\Lambda} R + \text{Diff}(R), \quad (5)$$

где турбулентный поток массы $R_i \equiv \langle \rho' u'_i \rangle$ и тензор Рейнольдса $R_{ik} \equiv \langle u'_i u'_k \rangle$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{ij} = & -R_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{R_i g_j}{\rho} + \frac{R_j g_i}{\rho} - \\ & - \frac{q}{\Lambda} \left(R_{ij} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3} \right) - b \frac{q^3}{\Lambda} \delta_{ij} + \text{Diff}(R_{ij}); \\ \frac{dR_i}{dt} = & -R_{ik} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - R_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{R g_i}{\rho} - a R_i \frac{q}{\Lambda} + \text{Diff}(R_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $g_j \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}$; Λ — пространственный масштаб турбулентности. Фигурирующие выше диффузионные члены имеют вид

$$\text{Diff}(F) \equiv c_F \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q \Lambda \frac{\partial F}{\partial x_k} \right).$$

Эти уравнения можно получить общепринятым образом, разлагая величины на средние и пульсационные и замыкая цепочку уравнений с помощью соответствующих гипотез. При этом выражение в (4) для диссипации турбулентной энергии $\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2 \approx \frac{3b q^3}{2 \Lambda}$ (ν — кинематический коэффициент молекулярной вязкости) получается в предположении, что спектр пульсаций скорости — колмогоровский. Как было видно выше (см. рис. 14), в расчетах этот спектр действительно близок к колмогоровскому как в одножидкостном, так и в двухжидкостном варианте.

Совершенно иначе обстоит дело с пульсациями плотности: выражение в (5) для "диссипации" среднеквадратичной пульсации плотности $\varepsilon_R = D \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \right)^2 \approx \kappa \frac{q}{\Lambda} R$ (D — коэффициент молекулярной диффузии) также получается в предположении, что спектр пульсаций плотности — колмогоровский. Однако, как отмечалось выше (см. рис. 15), в расчетах этот спектр близок к колмогоровскому только лишь в одножидкостном варианте — с физической точки зрения он соответствует смешивающимся жидкостям. И в этом случае справедливо уравнение (5), которое при изменении знака ускорения приводит к уменьшению R .

Действительно, в рассматриваемой задаче имеется лишь одна ненулевая компонента ускорения g_z , градиента средней плотности $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ и турбулентного потока массы R_z , уравнение для ко-

того (см. (6)) можно записать в виде

$$\frac{dR_z}{dt} = -R_{zz} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{Rgz}{\rho} - aR_z \frac{q}{\Lambda} + \text{Diff}(R_z). \quad (7)$$

На первой (неустойчивой) стадии задачи $R_z < 0$, тогда первый и второй члены в правой части (7) отрицательны, а третий положителен, следовательно, сумма меньше 0, что обеспечивает возрастание $|R_z|$.

После изменения знака ускорения второй член в правой части (7) также положителен, как и вся сумма, что приводит к уменьшению $|R_z|$ (аналогичное рассмотрение уравнения (5) приводит к выводу об уменьшении турбулентной энергии).

Рассмотрим момент, когда R_z меняет знак: после этого все слагаемые в правой части уравнения (5) отрицательны, а значит, величина R должна быстро убывать (на самом деле она начинает убывать еще на первой стадии) — именно это наблюдалось в одножидкостных вариантах расчета. Но убывает и второе слагаемое в правой части (7) — это, в конечном итоге, приводит к слишком большой роли первого слагаемого, а значит, слишком быстрому затуханию $|R_z|$.

Совершенно другая ситуация складывается при анализе двухжидкостного варианта расчета — с физической точки зрения он соответствует несмешивающимся жидкостям. Здесь предположение о колмогоровском спектре пульсаций плотности несправедливо, а значит, несправедливо и уравнение (5). Вместо него рассмотрим предположение о постоянстве по времени максимального в ЗТП значения R . Полагаем, что это значение достигается в точке ЗТП, где $\rho = \langle \rho \rangle = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} = 2$. Тогда $\rho' \sim \rho_2 - \langle \rho \rangle = \langle \rho \rangle - \rho_1 = 1$; $R_m \sim 1$; $\frac{R_m}{\langle \rho \rangle^2} \sim 0,25$, что вполне согласуется с результатами двухжидкостных вариантов расчета.

Но с учетом этого результата следует, что второе слагаемое в правой части (7) с изменением знака ускорения также меняет знак, оставаясь, однако, неизменным по модулю (речь идет о точке ЗТП, где $R = R_m$). Следовательно, до смены знака R_z $|R_z|$ убывает более быстро, а после смены знака достигает больших значений $|R_{zm}^{(+)}|$, чем в одножидкостном варианте. Но именно величина $|R_{zm}^{(+)}|$ определяет величину эффекта сепарации, которая, таким образом, оказывается существенно большей для несмешивающихся жидкостей.

Заключение

Проведенное с помощью газодинамической [4] и гидродинамической [6] методик комплекса ТРЭК прямое трехмерное численное моделирование турбулентного гравитационного перемешивания в задаче с изменением знака ускорения показало следующее:

1. Во всех расчетах первой (неустойчивой) стадии перемешивания получены близкие результаты по изменению ширины ЗТП со временем, так же как по максимальным в ЗТП значения приведенных величин турбулентной энергии E_m и турбулентного потока массы, в то время как максимальные в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности в расчетах с двумя концентрациями заметно больше, чем с одной.
2. Вторая (устойчивая) стадия осуществляется после смены знака ускорения. В расчетах с двумя веществами ей соответствует линейное по времени уменьшение квадратного корня из ширины ЗТП, что согласуется с известными данными опытов [1, 2]. Наблюдается также заметное падение турбулентной энергии E_m . При этом максимальные в ЗТП значения относительного квадрата пульсаций плотности остаются постоянными в двухжидкостном расчете, в то время как в одножидкостном — резко уменьшаются. Результирующий турбулентный поток массы в целом (с точностью до пульсаций, связанных с прохождением волн) меняет знак по отношению к нормальной (устойчивой) ситуации, будучи при этом существенно меньшим по абсолютной величине в одножидкостном расчете, нежели в двухжидкостном. Соответственно в одножидкостных расчетах уменьшение ширины ЗТП после смены знака ускорения незначительно.
3. В середине ЗТП функция плотности распределения вероятности массовой концентрации $F(c_2)$ в двухжидкостном варианте равномерно распределена, в то время как в одножидкостном варианте $F(c_2)$ оказывается распределенной вблизи $c_2 \sim 0,5$, что соответствует гомогенному (однородному) перемешиванию. Понятно, что последнее соответствует обращению пульсаций плотности в нуль, что и наблюдалось в указанном расчете.

4. Спектр пульсаций плотности на малых масштабах приближается к колмогоровскому лишь в одножидкостном варианте расчета, в двухжидкостном отличие от колмогоровского спектра существенно. В то же время спектр пульсаций скорости одинаково близок к колмогоровскому в обоих вариантах.
5. Анализ задачи с помощью феноменологической модели турбулентности [7] показывает, что стандартное описание пульсаций плотности (предполагающее их колмогоровский спектр) соответствует смешивающимся жидкостям и приводит к незначительному эффекту сепарации. Описание пульсаций плотности, исходящее из представления о несмешивающихся жидкостях, приводит к эффекту сепарации нужной величины.

В целом можно отметить, что использование одножидкостного подхода в трехмерных расчетах соответствует смешивающимся жидкостям, а многожидкостного — несмешивающимся.

Список литературы

1. *Kucherenko Yu. A., Neuvazhaev V. E., Pylayev A. P.* Behaviour of gravitational turbulent mixing region under conditions leading to separation // 4th Int. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Cambridge, England, 1993. P. 70—80.
2. *Kucherenko Yu. A., Balabin S. I., Ardashova R. I. et al.* Determination of space and time distributions of the averaged density of substance in the turbulized mixture region at the stage of separation // 6th Int. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Marseille, France, 1997. P. 258—265.
3. *Zhmailo V. A., Sin'kova O. G., Statsenko V. P. et al.* Numerical simulation of gravitational turbulent mixing with the acceleration sign changed // Int. Conf. "Parallel Computational Fluid Dynamics". Moscow, Russia. May 13—15, 2003.
4. *Yanilkin Yu. V., Tarasov V. I., Stadnik A. L. et al.* Program system TREK for numerical simulation of 3D multi-component medium flows // Proc. of Workshop "New Models and Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media". Oxford, 1997. P. 413—422.
5. *Youngs D. L.* Variable acceleration Rayleigh-Taylor mixing // 6th Int. Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Marseille, France, 1997. P. 534—538.
6. *Yanilkin Yu. V., Sofronov V. N., Tarasov V. I. et al.* Numerical simulation of near and far areas of accidental releases and explosions // Proc. of the 5th Joint Russian-American Computational Mathematics Conference. Albuquerque, 1997. P. 235—238.
7. *Стаценко В. П.* Тестирование модели турбулентности с анизотропией тензора Рейнольдса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3. С. 43—51.
8. *Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Rebrov S. V. et al.* Study of gravitational turbulent mixing at large density differences using direct 3D numerical simulation // 8th Int. Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. Pasadena, USA, 2001.

Статья поступила в редакцию 16.03.04.
