

УДК 621.386.12/17

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Е. Н. Симонов
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Представлен разработанный алгоритм реконструкции томографического изображения, применяемый в отечественном рентгеновском компьютерном томографе РКТ-01, имеющем веерный пучок излучения и большое количество детекторов (единичных отсчетов в проекции).

Разработка алгоритма реконструкции изображения в рентгеновской компьютерной томографии представляет один из основных этапов в создании томографических комплексов. В зарубежной литературе вопросам, связанным с этой темой, уделяется большое внимание, но освещаются они достаточно односторонне, сложно и абстрактно [1]. Применить данные в этой литературе рекомендации на практике весьма затруднительно. Это, видимо, определяется тем, что практические методики разработки алгоритмов реконструкции томографического изображения для конкретной геометрии рентгеновского пучка, разработки фильтрующих ядер до сих пор не публикуются и представляются зарубежными фирмами как "ноу-хау".

В данной статье рассматривается алгоритм реконструкции с использованием интегральных преобразований — алгоритм *обратного проецирования с фильтрацией сверткой* (ОПФС) для веерной геометрии рентгеновского пучка как наиболее производительного варианта томографирования объекта исследования. Отличительной особенностью этого алгоритма является возможность управления его устойчивостью к погрешностям проекций через изменение значений коэффициента регуляризации фильтрующего ядра свертки. Также рассматривается практическая методика разработки алгоритма.

Классификация алгоритмов реконструкции изображения

Алгоритмы восстановления структуры исследуемого объекта по его проекциям можно разделить на две основные группы:

- с использованием интегральных преобразований (их иногда называют аналитическими);
- с использованием разложения в ряд [2].

Все алгоритмы с использованием интегральных преобразований для реконструкции изображения основаны на точных математических решениях интегральных уравнений и определении формул обращения. В основе их — преобразование Радона и преобразование Фурье как трансформация преобразования Радона.

Алгоритмы с использованием интегральных преобразований теоретически эквивалентны (их можно выводить один из другого), однако отличаются процедурой реализации (последовательностью вычислений). В связи с этим их можно разделить на две основные группы: алгоритмы, использующие обратное проецирование, и алгоритмы, использующие двумерное преобразование Фурье.

Оба метода предполагают, что известно точное значение проекций $p(l, \theta)$ для всех l и θ (l — переменная координаты отсчета в проекции, θ — переменная угловой координаты получения проекции) и что требуемые интегральные преобразования можно выполнить точно. Однако в действительности ни то, ни другое условие выполнить невозможно. Измерения реальных проекционных данных

проводятся с определенной погрешностью. Набор проекций и значений в этих проекциях имеется не для всех l и θ , а для конечного числа их дискретных значений. Расчет интегральных преобразований в реконструкторе томографа проводится в дискретной форме по дискретным операторам. Все эти погрешности приводят к неустойчивости решения задачи реконструкции изображения, что выражается в виде артефактов на томограмме.

Для уменьшения последствий неточного задания проекций и выполнения интегральных преобразований в методе обратного проецирования проводится фильтрация. При этом метод обратного проецирования имеет три варианта, отличающихся различными способами фильтрации: фильтрация сверткой, фильтрация Фурье, радоновская фильтрация [3].

Все алгоритмы с использованием интегральных преобразований имеют общее — замену непрерывных интегральнодифференциальных операторов преобразования дискретными в конце процедуры вывода алгоритма реконструкции.

Метод реконструкции, основанный на разложении искомой функции (в рассматриваемом случае линейного коэффициента ослабления рентгеновского излучения $\mu(x, y)$) в ряд, принципиально иной. Дискретизацию здесь выполняют в самом начале: оценка функции сводится к нахождению конечного множества чисел. Алгоритмы с использованием разложения в ряд можно разделить на две группы: итерационные и неитерационные.

Итерационные методы реконструкции изображения используют аппроксимацию восстанавливаемого сечения объекта исследования массивом ячеек равномерной плотности (равномерной μ), представляющих собой неизвестные величины линейных алгебраических уравнений, свободными числами которых являются проекции. Решаются уравнения итерационными методами, что и дало название данному классу алгоритмов реконструкции.

В настоящее время известно несколько итерационных методов реконструкции. Отличаются они в основном последовательностью внесения поправок во время итерации. Среди них наиболее известны следующие методы: алгебраический метод реконструкции томограммы (ART), метод одновременного итерационного восстановления (SIRT), итерационный метод наименьших квадратов (ILST), мультипликативный алгоритм алгебраической реконструкции (MART) [4].

Неитерационные методы основаны на способах решения системы линейных уравнений большой размерности путем приведения ее к более простой системе.

На основе вышеприведенного анализа схему классификации методов реконструкции изображений по проекциям можно представить в виде рис. 1.



Рис. 1. Классификация методов реконструкции изображений по проекциям

Особенности аналитического метода реконструкции изображения с использованием обратного проецирования и фильтрации сверткой

Алгоритмы, основанные на методе интегральных преобразований (аналитические методы), состоят из следующих этапов:

- 1) формулировки математической модели, в рамках которой известная и неизвестная величины представлены функциями, аргументы которых изменяются на континууме вещественных чисел;
- 2) нахождения формулы обращения и определения по ней неизвестной функции;
- 3) адаптации формулы обращения к дискретизированным зашумленным данным.

Для простоты изложения алгоритма реконструкции будем рассматривать основные выводы формул и доказательства для параллельной геометрии сканирования, а затем проведем трансформацию основных формул на веерную геометрию.

Рассмотрим первый этап. Обозначим двумерное распределение физической величины как функцию $\mu(x, y)$, вид которой априори не известен. Однако известно, что в большинстве приложений она ограничена в пространстве, т. е. равна нулю вне некоторой конечной области на плоскости, обозначаемой далее через Ω . Можно полагать, что функция μ определена областью Ω , представляющей собой круг радиусом T с центром в начале координат.

Иногда удобнее записывать функцию μ не в прямоугольных (x, y) , а в полярных (r, ϕ) координатах. В этом случае

$$\mu(x, y) = \mu(r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Прямая на плоскости может быть задана двумя параметрами: расстоянием l (со знаком) от начала координат и углом θ относительно оси y (рис. 2). Положение точки P на плоскости определяется ее координатами (x, y) или $(r \cos \phi, r \sin \phi)$, а положение рентгеновского луча — расстоянием l' от начала координат и углом θ .

На основании преобразования Радона с учетом преобразования координат по формулам Эйлера [3] будем иметь для *лучевой суммы*

$$p(l, \theta) = \int_{-T}^T \mu(x' \cos \theta - y' \sin \theta, x' \sin \theta + y' \cos \theta) dy', \quad (1)$$

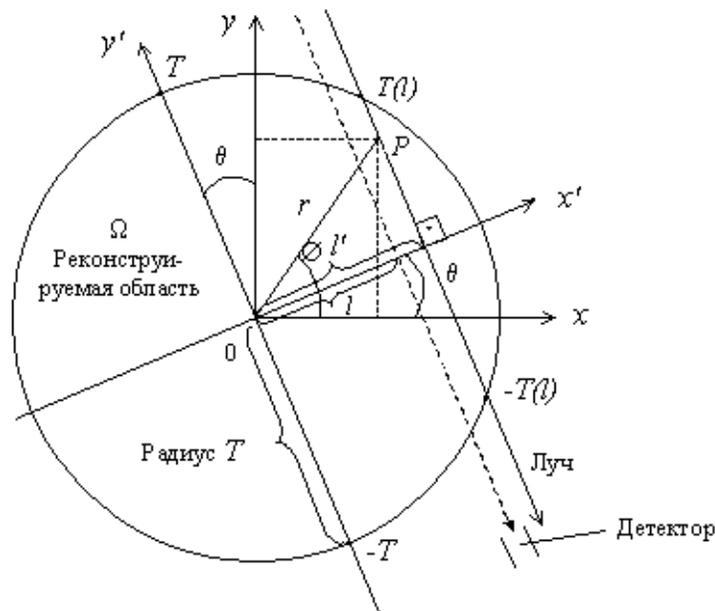


Рис. 2. Параллельная геометрия сканирования

где пределы интегрирования в общем случае зависят как от параметров l и θ , так и от размеров области Ω .

В рассматриваемом случае реконструируемый объект представлен в виде круга радиусом T , в котором

$$T(l) = (T^2 - l^2)^{1/2}, \quad |l| \leq T; \quad p(l, \theta) = 0, \quad |l| > T.$$

Необходимо отметить, что при любых l и θ пары (l, θ) и $(-l, \theta + \pi)$ задают одну и ту же прямую, поэтому

$$p(l, \theta) = p(-l, \theta + \pi).$$

Следует также отметить, что аргументы функции $p(l, \theta)$ отличаются от обычных полярных координат. Выберем две различные прямые, проходящие через начало координат под углами θ_1, θ_2 . В общем случае интегралы $p(0, \theta_1)$ и $p(0, \theta_2)$ от функции μ из (1) по этим прямым будут различными, хотя этой разницы не должно существовать, если аргументы интерпретировать как полярные координаты.

Рассмотрим далее второй этап — определения алгоритма реконструкции.

Прежде чем перейти к выводу формул реконструкции — нахождению формул обращения выражения (1), необходимо показать, что такое обратная проекция, для чего требуется аппроксимация функции $\mu(x, y)$.

Прямой метод обратной проекции восстановления изображения применять не целесообразно, так как реконструируемое с его помощью изображение является грубой аппроксимацией исследуемого объекта. Однако этот метод является основой для понимания более сложных алгоритмов реконструкции, в том числе алгоритма ОПФС. Простейший вариант этого метода оценивает $\mu(x, y)$ в любой точке сечения посредством сложения лучевых сумм $p(l, \theta)$ для всех l , проходящих через искомую точку.

Рассмотрим пример, когда для восстановления используются только три проекции (рис. 3), хотя для практических целей требуется гораздо большее их число.

Восстановление производится путем обратного проецирования каждой проекции через плоскость, т. е. физический сигнал, соответствующий данной лучевой сумме $p(l, \theta)$, прикладывается ко всем точкам, которые образуют этот луч. После того как это сделано для всех проекций, получается аппроксимация исследуемого объекта.

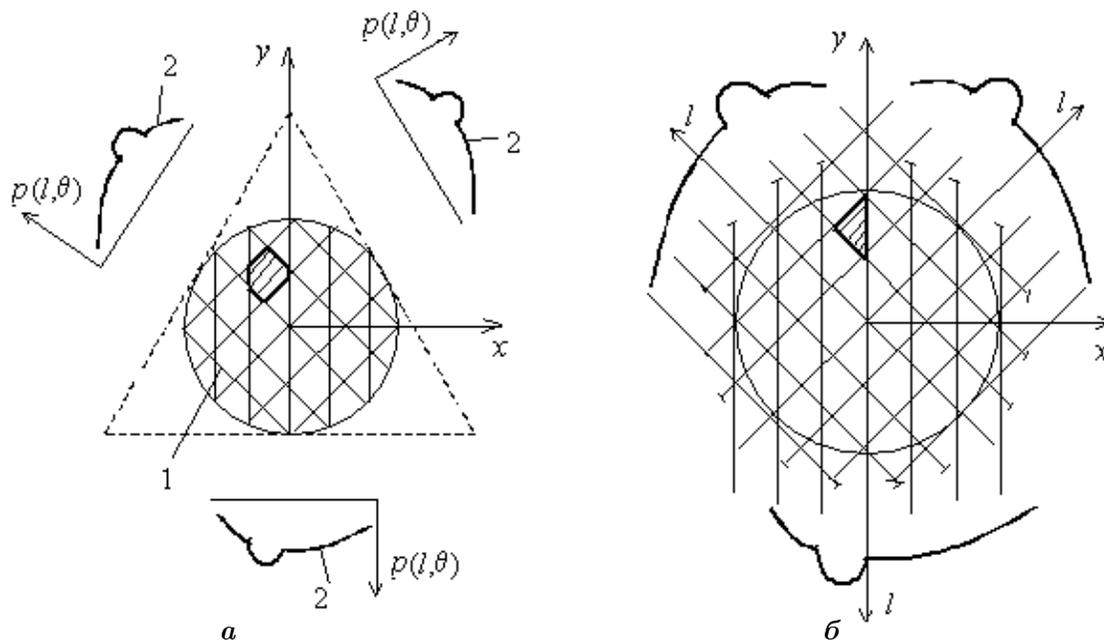


Рис. 3. Восстановление объекта методом обратной проекции: а — объект (1) и его проекции (2); б — восстановленный объект

В практических приложениях регистрируемые данные соответствуют оценкам функции $p(l, \theta)$ для обширной совокупности дискретных значений параметров l и θ , а реконструируемое изображение представляется в виде двумерного массива чисел. Будем считать, что отсчеты функции $p(l, \theta)$ берутся равномерно по l и θ . Рассмотрим случай регистрации проекций для M значений угла θ , взятых с шагом $\Delta\theta$, и N значений расстояния l , взятых с шагом Δl . Определим целые числа N^+ и N^- следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} N^+ &= \frac{N-1}{2}, \\ N^- &= -\frac{N-1}{2} \end{aligned} \right\} N - \text{нечетное}; \quad \left. \begin{aligned} N^+ &= \frac{N}{2} - 1, \\ N^- &= -\frac{N}{2} \end{aligned} \right\} N - \text{четное}. \quad (2)$$

Для того чтобы совокупность лучей

$$\{(n\Delta l, m\Delta\theta) : N^- \leq n \leq N^+, \quad 1 \leq m \leq M\}$$

полностью покрыла круг радиусом T (т. е. область Ω), положим

$$\Delta l = \frac{T}{N^+}; \quad \Delta\theta = \frac{\pi}{M}. \quad (3)$$

Оценка $p(n\Delta l, m\Delta\theta)$ называется *дискретной проекцией* параллельного рентгеновского пучка. Обозначим через $\mathfrak{R}(\nu, \theta)$ одномерное преобразование Фурье проекции p по аргументу l при угле θ :

$$\mathfrak{R}(\nu, \theta) = \int_{-T}^T p(l, \theta) e^{-i2\pi\nu l} dl, \quad (4)$$

где ν — пространственная частота.

Рассмотрим проекционные теоремы [3], которые будут необходимы для вывода формул.

1. Если $h(l)$ — произвольная функция одной переменной, для которой существуют нижеследующие интегралы, то при любых углах θ справедливо равенство

$$\int_{-T}^T p(l, \theta) h(l) dl = \iint_{\Omega} \mu(x, y) h(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy. \quad (5)$$

Рассмотрим левую часть равенства (5). Если подставить в нее выражение для $p(l, \theta)$ из (1) и сделать замену переменных, перейдя от координат (x', y') к прямоугольным координатам (x, y) , то получим правую часть равенства (5).

Этот результат имеет большое практическое значение для вывода и понимания методов преобразования при реконструкции изображений. Он показывает, что операция над проекцией $p(l, \theta)$ при угле θ эквивалентна определенной операции над исходным объектом $\mu(x, y)$. Если операция на $\mu(x, y)$ обратима, как, например, преобразование Фурье, то из этого следует способ нахождения $\mu(x, y)$ по заданной $p(l, \theta)$.

2. Пусть $\mathfrak{R}(\nu, \theta)$ — одномерное преобразование Фурье функции $p(l, \theta)$ по первому аргументу, определяемое формулой (4). Тогда

$$\mathfrak{R}(\nu, \theta) = \widehat{\mu}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta), \quad (6)$$

где $\widehat{\mu}$ — двумерное преобразование Фурье функции $\mu(x, y)$.

В качестве функции $h(l)$ в выражении (5) возьмем функцию $\exp(-i2\pi\nu l)$. Результат следует из определения одномерного преобразования Фурье (4).

В соответствии с физической интерпретацией этот результат называется *теоремой о центральном сечении*. Действительно, пусть θ — заданный фиксированный угол. Тогда в теореме утверждается, что при изменении ν величина $\mathfrak{R}(\nu, \theta)$ равна значению μ при радиусе ν и угле θ в Фурье-пространстве.

Перейдем к выводу формул реконструкции. Взяв обратное преобразование Фурье равенства (6), получим

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \Re(\nu, \theta) \exp(i2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\nu| d\nu d\theta. \quad (7)$$

Подстановка выражения (4) для $\Re(\nu, \theta)$ в (7) дает формулу реконструкции функции $\mu(x, y)$ по заданным $p(l, \theta)$.

Из приведенной теоремы о центральном сечении следует, что при реконструкции изображения по выборочным проекциям не следует ожидать, что метод (7) даст лучшую оценку функции $\mu(x, y)$, чем ее аппроксимация $\tilde{\mu}(x, y)$ с ограниченной шириной спектра $\nu = \pm 1/(2\Delta l)$. Тогда преобразование Фурье функции $\tilde{\mu}(x, y)$ можно записать в виде произведения Фурье-функции $\widehat{\mu}$ на функцию *фильтрующего окна* $W(\nu)$:

$$\widehat{\tilde{\mu}}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) = \widehat{\mu}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) W(\nu). \quad (8)$$

Переписав (7) для функции $\tilde{\mu}(x, y)$, получим

$$\tilde{\mu}(x, y) = \int_0^\pi \int_{-1/(2\Delta l)}^{1/(2\Delta l)} \Re(\nu, \theta) W(\nu) \exp[i2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)] |\nu| d\nu d\theta. \quad (9)$$

Выразим $\Re(\nu, \theta)$ из (4) и заменим порядок интегрирования по l и ν . В результате получим

$$\tilde{\mu}(x, y) = \int_0^\pi \int_{-T}^T p(l, \theta) g(x \cos \theta + y \sin \theta - l) dl d\theta; \quad (10)$$

$$g(l) = \int_{-1/(2\Delta l)}^{1/(2\Delta l)} |\nu| W(\nu) \exp(i2\pi\nu l) d\nu, \quad (11)$$

где $x \cos \theta + y \sin \theta = l'$ — луч, проходящий через точку P (см. рис. 2).

Выражения (10), (11) составляют основу метода реконструкции — метода *свертки и обратного проецирования* для параллельных лучей.

Поясним название этого метода. Представим (10) в виде следующей последовательности операций:

$$\tilde{p}(l', \theta) = \int_{-T}^T p(l, \theta) g(l' - l) dl; \quad (12)$$

$$\tilde{\mu}(x, y) = \int_0^\pi \tilde{p}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta. \quad (13)$$

Промежуточная величина $\tilde{p}(l', \theta)$, определяемая формулой (12), является результатом свертки по l проекции $p(l, \theta)$ при угле θ и функции $g(l)$, заданной выражением (11). Функция $\tilde{p}(l', \theta)$ называется *свернутой проекцией при угле θ* , а $g(l)$ — *сворачивающей функцией*. Формула (13) отражает формальное применение прямого метода обратной проекции, отличительной особенностью которого являются операции над исходной проекцией $p(l, \theta)$ в виде фильтрации сверткой с последующей фильтрацией в виде сворачивающей функции $g(l)$ со своим фильтрующим окном $W(\nu)$.

Заметим, что при выборе разных фильтрующих окон получаются различные сворачивающие функции, так как из (11) имеем

$$\widehat{g}(\nu) = |\nu| W(\nu), \quad (14)$$

где $\widehat{g}(\nu)$ — Фурье-преобразование функции $g(l)$.

Операция, описываемая выражением (13), называется *обратным проецированием*.

Таким образом, применение как бы двойной операции фильтрации над исходной проекцией $p(l, \theta)$ в виде свертки, которая усредняет выборочные значения проекции и тем самым уменьшает шумовой (фоновый) выброс выборочных значений, и фильтрующего окна сворачивающей функции, которое уменьшает вредное влияние интенсивности от соседних точек на исследуемую точку объекта через уменьшение эффекта наложения их спектров, позволяет получить приемлемые результаты реконструкции $\mu(x, y)$ в виде $\tilde{\mu}(x, y)$ методом обратного проецирования.

Рассмотрим третий этап алгоритма — этап адаптации формулы обращения к дискретным зашумленным данным.

Для аппроксимации функции изображения $\tilde{\mu}(m_x \Delta x, m_y \Delta y)$, где m_x, m_y — масштабные коэффициенты дискретизации изображения; $\Delta x, \Delta y$ — дискретные элементы изображения, восстанавливаемого по проекциям $p(n \Delta l, \theta_m)$, $1 \leq m \leq M$, $N^- \leq n \leq N^+$ (см. (2), (3)), требуется найти алгоритм реконструкции, удобный для реализации на спецпроцессоре или универсальной ЭВМ. Можно вычислить интеграл от обратной проекции (13) с помощью формулы трапеции:

$$\tilde{\mu}(m_x \Delta x, m_y \Delta y) \cong \Delta \theta \sum_{m=1}^M \tilde{p}(m_x \Delta x \cos \theta_m + m_y \Delta y \sin \theta_m, \theta_m). \quad (15)$$

Для каждого значения θ_m необходимо найти значения свернутой проекции $\tilde{p}(l', \theta_m)$ при $M_x \times M_y$ значениях l' , где $M_x \times M_y$ — размерность матрицы изображения исследуемого объекта. Один из способов нахождения значений $\tilde{p}(l', \theta_m)$ состоит в вычислении свертки отдельно для каждого значения l' при помощи аппроксимации (12) с выборочными значениями $g(l' - n \Delta l)$ сворачивающей функции. Однако такой подход слишком трудоемок, поскольку $M_x \times M_y$ обычно составляет от 512^2 до 2048^2 . Целесообразнее сначала оценить $\tilde{p}(n \Delta l, \theta_m)$ при $N^- \leq n \leq N^+$, а затем посредством интерполяции по этим оценкам найти требуемые N значений функции \tilde{p} .

Таким образом, аппроксимация свертки (12) осуществляется с помощью двух операций над дискретными данными: дискретной свертки, результат которой обозначим через \tilde{p}_g , и последующей интерполяции \tilde{p}_g , результат которой обозначим через $\tilde{p}_и$. Эти операции можно записать в следующем виде:

$$\tilde{p}_g(n' \Delta l, \theta_m) = \Delta l \sum_{n'=N^-}^{N^+} p(n \Delta l, \theta_m) g((n' - n) \Delta l), \quad N^- \leq n' \leq N^+; \quad (16)$$

$$\tilde{p}_и(l', \theta_m) = \Delta l \sum_{n'=N^-}^{N^+} \tilde{p}_g(n' \Delta l, \theta_m) J(l' - n' \Delta l). \quad (17)$$

Здесь $J(l)$ — функция интерполяции, а число слагаемых (точек интерполяции) зависит от ширины интервала (апертуры детектора), где $J(l)$ отлична от нуля.

Необходимо заметить, что в дискретной свертке (16) используются выборочные значения $g(n \Delta l)$, взятые через равные интервалы. Выбрав конкретную функцию окна, эти значения можно вычислить один раз и хранить в памяти ЭВМ. В качестве функции окна можно взять

$$W(\nu) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha |\nu|}{\nu_{\text{ср}}}, & |\nu| \leq \nu_{\text{ср}}; \\ 0, & |\nu| > \nu_{\text{ср}}, \end{cases} \quad (18)$$

где $\nu_{\text{ср}}$ — частота среза; α — коэффициент регуляризации, принимающий значения от 0 до 1. По-

ложив $\nu_{\text{ср}} = 1/(2\Delta l)$ и подставив (18) в (14), получим

$$g(n\Delta l) = \begin{cases} \frac{3-2\alpha}{12(\Delta l)^2}, & n=0; \\ -\frac{\alpha}{\pi^2(n\Delta l)^2}, & n-\text{четное}; \\ -\frac{1-\alpha}{\pi^2(n\Delta l)^2}, & n-\text{нечетное}. \end{cases} \quad (19)$$

После выбора $g(n\Delta l)$ и $J(l)$ с помощью алгоритма свертки и обратного проецирования вычисляются функции (16), (17) и (15), причем в (15) вместо \tilde{p} используются значения \tilde{p}_n .

Рассмотрим влияние оценки интеграла от обратной проекции (13) по формуле трапеций вида (16).

Чтобы отделить влияние дискретизации по параметру l и выделить дискретизацию по углу θ , будем считать, что функция $\tilde{p}(l', \theta)$ точно определена при произвольных значениях l' . Используя это упрощение, найдем функцию передачи рассеяния точки для алгоритма реконструкции, т. е. рассмотрим реконструкцию "импульсного" объекта (тонкий стержень) с координатами (ξ, η) .

Объект исследования $O(x, y)$ и его преобразование Фурье $\widehat{O}(X, Y)$ описывается функциями

$$O(x, y) = \delta(x - \xi, y - \eta); \quad (20)$$

$$\widehat{O}(X, Y) = \exp(-i2\pi(X\xi + Y\eta)). \quad (21)$$

Пусть $\tilde{O}(x, y)$ — импульсный сигнал с ограниченной шириной спектра, соответствующей указанному импульсному объекту:

$$\tilde{O}(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\nu_{\text{ср}}}^{\nu_{\text{ср}}} \widehat{O}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) W(\nu) \exp(i2\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\nu| d\nu d\theta, \quad (22)$$

где $\nu_{\text{ср}}$ — частота среза функции окна.

Функция $\tilde{O}(x, y)$ представляет собой выходной сигнал, полученный за счет процедуры реконструкции по (9). Подставив $\widehat{O}(X, Y)$ из (21) в (22), получим

$$\tilde{O}(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\nu_{\text{ср}}}^{\nu_{\text{ср}}} \exp(i2\pi\rho\nu \cos(\theta - \gamma)) W(\nu) |\nu| d\nu d\theta,$$

где $\text{tg } \gamma = \frac{y - \eta}{x - \xi}$; $\rho = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$.

Поменяв порядок интегрирования, увидим, что интеграл по θ есть не что иное, как интегральное представление функции Бесселя $J_0(2\pi\rho\nu)$. Таким образом,

$$\tilde{O}(x, y) = \pi \int_{-\nu_{\text{ср}}}^{\nu_{\text{ср}}} J_0(2\pi\rho\nu) W(\nu) |\nu| d\nu. \quad (23)$$

Рассмотрим функцию $\tilde{O}_g(x, y)$, которая получается в случае, когда интеграл по θ в (22) вычисляется по формуле трапеции, а не аналитически. По определению будем иметь

$$\tilde{O}_g(x, y) = \Delta\theta \sum_{m=1}^M \int_{-\nu_{\text{ср}}}^{\nu_{\text{ср}}} \exp(i2\pi\rho\nu \cos(\theta_m - \gamma)) W(\nu) |\nu| d\nu. \quad (24)$$

Используя свойства производящей функции для функций Бесселя, а именно

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(Z) e^{im\theta},$$

получаем из (24)

$$\tilde{O}_g(x, y) = \pi \int_{-\nu_{\text{ср}}}^{\nu_{\text{ср}}} \left[\sum_{K=-\infty}^{\infty} (-1)^{MK} e^{-i2MK\gamma} J_{2MK}(2\pi\rho\nu) \right] W(\nu) |\nu| d\nu. \quad (25)$$

Из сравнения результата (25) с формулой (23) следует, что член суммы при $K = 0$ равен $J_0(2\pi\rho\nu)$, т. е. $\tilde{O}(x, y) = \tilde{O}_g(x, y)$. Таким образом, сумма (25) по ненулевым K представляет собой ошибку аппроксимации интеграла по θ по методу трапеции.

Как следует из асимптотического представления функции Бесселя, она имеет первый максимум при $Z > m$, причем при $Z \leq m - 2$ ее значения малы по сравнению с этим максимумом. Необходимо также отметить, что член суммы (25) при каждом ненулевом K периодически изменяется по γ с периодом $\pi/(MK)$. В соответствии с этим из (25) получим, что равенство $\tilde{O}_g(x, y) \cong \tilde{O}(x, y)$ будет выполняться для $\rho \leq \rho'$, где

$$\rho' = \frac{M}{\pi\nu_{\text{ср}}}. \quad (26)$$

Собственно условие (26) формально вытекает из условия $Z = m$ при $K = 1$.

Учитывая исходное предположение об импульсном объекте (сигнале) с ограниченной шириной спектра, приходим к выводу о возможности реконструкции изображения, которое является копией с ограниченной шириной спектра заданного импульсного объекта, для точек, отстоящих от места локализации импульса не далее, чем на расстоянии ρ' . Если рассмотреть поле реконструкции в виде круга диаметром D_Ω как суперпозицию импульсов, то во избежание ошибок численной аппроксимации интеграла от обратной проекции (23) необходимо, чтобы $\rho' > D_\Omega$. Учитывая, что $D_\Omega = N\Delta l$, $\nu_{\text{ср}} = 1/(2\Delta l)$, получаем из (26) неравенство, связывающее число ракурсов M и число лучей (единичных детекторов и отсчетов) N :

$$M > \pi \frac{N}{2}.$$

Это неравенство определяет выбор количества ракурсов и единичных детекторов при практическом проектировании томографа.

Модифицированный метод реконструкции для случая веерных рентгеновских лучей

Рассмотрим метод интегральных преобразований восстановления изображения для веерной схемы сканирования как модификацию метода для параллельной схемы.

На рис. 4 показаны геометрические соотношения для веерного луча. Луч задан двумя параметрами: γ, β . Пусть O — начало координат, а U — положение источника излучения на окружности радиусом D с центром в точке O . Тогда β — угол наклона прямой OU . Пусть R — точка у основания перпендикуляра, опущенного из начала координат к лучу. Тогда θ — угол между перпендикуляром OR и осью Ox , а l — длина перпендикуляра OR .

Каждый луч, задававшийся в параллельной геометрии (см. рис. 2) парой чисел (l, θ) , теперь рассматривается как элемент множества расходящихся лучей (γ, β) , где угол β задает положение источника излучения, а γ — угол между рассматриваемым лучом и прямой, соединяющей источник и центр окружности.

Обозначим для веерной геометрии линейный интеграл, принятый для параллельной геометрии как $p(l, \theta)$, через $q(\gamma, \beta)$.

Учитывая, что β изменяется с периодом 2π , пределы интегрирования по β можно заменить: от 0 до 2π .

Как и для параллельной геометрии лучей, операцию реконструкции по формуле (31) можно представить в два этапа:

$$\begin{aligned}\tilde{q}(\gamma', \beta) &= \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} q(\gamma, \beta) \cos \gamma g(S \sin(\gamma' - \gamma)) d\gamma; \\ \tilde{\mu}(x, y) &= \frac{\Delta}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{q}(\gamma', \beta) d\beta,\end{aligned}\quad (32)$$

где

$$g(S \sin(\gamma' - \gamma)) = \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| W(\nu) \exp(i2\pi\nu S \sin(\gamma' - \gamma)) d\nu. \quad (33)$$

Рассмотрим выражение (33). Ядро $g(l)$ в соответствии с (14) определяется как обратное преобразование Фурье от модуля пространственной частоты $|\nu|$:

$$g(l) = \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \exp(i2\pi\nu l) d\nu. \quad (34)$$

Следует отметить, что выражение (34) представляет неотфильтрованное ядро, поэтому не совпадает с выражением (11).

Для аргумента из выражения (33) уравнение (34) примет вид

$$g(S \sin \tilde{\gamma}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \exp(i2\pi\nu S \sin \tilde{\gamma}) d\nu,$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma' - \gamma$.

Введя новую переменную $\nu' = \nu \frac{S \sin \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}}$, получим

$$g(S \sin \tilde{\gamma}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nu' \frac{\tilde{\gamma}}{S \sin \tilde{\gamma}} \right| \exp(i2\pi\nu' \tilde{\gamma}) \frac{\tilde{\gamma}}{S \sin \tilde{\gamma}} d\nu',$$

откуда

$$g(S \sin \tilde{\gamma}) = \frac{\tilde{\gamma}^2}{S^2 \sin^2 \tilde{\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu'| \exp(i2\pi\nu' \tilde{\gamma}) d\nu'. \quad (35)$$

Интеграл в выражении (35) представляет ядро с аргументом $\tilde{\gamma}$, полученное для параллельных лучей. Следовательно, ядро для веерных лучей может быть определено в виде

$$\tilde{g}(\tilde{\gamma}) = \frac{\tilde{\gamma}^2}{S^2 \sin^2 \tilde{\gamma}} g(\tilde{\gamma}),$$

где $g(\tilde{\gamma})$ — ядро, определяемое выражением (34). В результате (32) для случая веерной геометрии сканирования примет вид

$$\tilde{\mu}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{S^2} d\beta \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \tilde{q}(\gamma, \beta) \tilde{g}(\gamma' - \gamma) d\gamma, \quad (36)$$

где $\bar{q}(\gamma, \beta) = q(\gamma, \beta) \text{Д} \cos \gamma$ — модифицированная проекция; $\tilde{g}(\gamma' - \gamma) = g(\gamma' - \gamma) \frac{\gamma^2}{\sin^2 \tilde{\gamma}}$ — модифицированное ядро.

Следовательно, выражение (33) представляет собой модифицированное ядро $g(\tilde{\gamma})$, которое определяется, как для случая параллельных лучей. Тогда для $W(\nu)$, определяемого выражением (18), и дискретного представления проекции (19) модифицированное ядро для веерной геометрии сканирования определится как

$$\tilde{g}(i, \Delta\gamma) = \begin{cases} \frac{3 - 2\alpha}{12 (\Delta\gamma)^2}, & i = 0; \\ -\frac{\alpha}{\pi^2 \sin^2(i\Delta\gamma)}, & i - \text{четное}; \\ -\frac{1 - \alpha}{\pi^2 \sin^2(i\Delta\gamma)}, & i - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (37)$$

где $\Delta\gamma$ — угол между соседними детекторами; $i = -N, \dots, 0, \dots, N$.

На практике при использовании ЭВМ для решения задачи реконструкции уравнение (36) предварительно аппроксимируют. Используя простейший вид аппроксимации, т. е. заменяя интегрирование суммированием, можно представить алгоритм реконструкции для веерных лучей в виде следующих этапов:

1. Модификация полученных экспериментальных проекций:

$$\bar{q}(\gamma_i, \beta_j) = q(\gamma_i, \beta_j) \text{Д} \cos(\gamma_j),$$

где $i = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2 - 1$ (для четного N); $j = 1, \dots, M$; $q(\gamma_i, \beta_j)$ — исходные экспериментальные проекции.

2. Вычисление ядра свертки по формуле (37). Для коэффициента регуляризации $\alpha = 0$ будем иметь ядро

$$\tilde{g}(i, \Delta\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{4 (\Delta\gamma)^2}, & i = 0; \\ 0, & i - \text{четное}; \\ -\frac{1}{\pi^2 \sin^2(i\Delta\gamma)}, & i - \text{нечетное}. \end{cases}$$

3. Свертка проекции с ядром, т. е. вычисление внутреннего интеграла в (36):

$$g(\gamma_i, \beta_j) = \Delta\gamma \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \bar{q}(\gamma_i, \beta_j) \tilde{g}(\gamma_l - \gamma_i),$$

где $l = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2 - 1$.

4. Обратное проецирование, т. е. вычисление внешнего интеграла (36)

$$\tilde{\mu}(x, y) = \frac{\Delta\beta}{2} \sum_{j=1}^M \frac{1}{S^2} g(\gamma'_p, \beta_j)$$

в следующей последовательности:

- а) определение γ'_p по формуле (30) (γ'_p — угол для каждой точки P восстанавливаемой матрицы изображения размерностью $M_x \times M_y$; $\Delta\beta$ — угловой ракурс, $\Delta\beta = 2\pi/M$);
- б) интерполирование свертки с целью определения $g(\gamma'_p, \beta_j)$ по дискретным экспериментальным значениям $g(\gamma_l, \beta_j)$;
- в) вычисление множителя $1/S^2$, используя формулу (29);
- г) обратное проецирование свернутой проекции $g(\gamma'_p, \beta_j)$, предварительно умноженной на множитель $1/S^2$.

Заключение

Дана классификация алгоритмов реконструкции изображения для трансмиссионной рентгеновской томографии. Представлен интегральный метод реконструкции изображения по проекциям — ОПФС.

Получены формулы решения уравнения компьютерной томографии для веерной геометрии сканирования, показано значение фильтрующего ядра свертки в достижении корректности определения томографического параметра $\mu(x, y)$.

Разработаны практические алгоритмы реконструкции изображения по методу ОПФС для веерной геометрии сканирования с большим количеством отсчетов в проекции (свыше 512) и матрицей изображения размерностью 512×512 и более, которые внедрены в отечественном рентгеновском компьютерном томографе РКТ-01 [3], предназначенном для исследования всего тела человека.

Список литературы

1. Реконструкция изображений / Под ред. Г. Старка: Пер. с англ. М.: Мир, 1992.
2. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии / Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
3. *Симонов Е. Н.* Рентгеновская компьютерная томография. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2002.
4. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

Статья поступила в редакцию 28.05.04.
