УДК 532.529+532.583

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСАДКИ НАБУХАЮЩЕГО ПОЧВЕННОГО СЛОЯ

М. Г. Храмченков (Казанский ГУ), Р. Х. Храмченкова (ЦНИИ геологии нерудных полезных ископаемых, г. Казань), А. Н. Чекалин (НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, г. Казань)

Предложена новая теория для описания механических и физико-химических свойств глинистых грунтов и почв как природных набухающих систем. Решена простейшая задача для отжима (впитывания) воды из протяженного слоя конечной толщины. Проанализированы особенности полученного решения. Достигнуто хорошее согласие с экспериментальными результатами по данной задаче. Получено соотношение для определения оптимального размера почвенных водопрочных агрегатов.

Глинистые грунты и почвы с точки зрения механики пористых сред относятся к материалам, фильтрационные и физико-механические свойства которых определяются их способностью к набуханию. Процессы в набухающих средах традиционно изучаются с различных точек зрения. В настоящей работе речь идет о теоретическом описании ряда свойств таких сред, построенном на основе объединения методов теории фильтрационной консолидации и теории осмотического давления в набухающих системах. Как правило, эффекты набухания в физике почв пытаются учесть в рамках концепции расклинивающего давления [1]. Однако именно почвы относятся к системам, формирование которых протекает в условиях вынужденной коагуляции, обусловленной недостатком дисперсионной среды. Это заставляет использовать для описания физико-механических свойств почв другой подход, опирающийся на понятие осмотического давления. В соответствии с вышесказанным физической причиной, приводящей к проявлению специфических свойств природных набухающих систем (глинистые грунты, почвы и др.), является осмотическое давление, обусловленное избыточной концентрацией катионов-компенсаторов отрицательного заряда матричных частиц глинистых минералов, вызванного гетеровалентным изоморфизмом в решетке минералов [2, 3].

Рассмотрим систему уравнений механики набухающих сред, представляющую собой балансы массы и импульса для жидкой и твердой фаз среды, а также необходимые замыкающие соотношения:

$$\Gamma = \sigma^f + p; \tag{1}$$

$$(1-m)\,p + \sigma^f = -\varphi\left(\Theta\right); \tag{2}$$

$$\dot{\Theta} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0; \tag{3}$$

$$q = -\left(\frac{k}{\eta}\right)\frac{\partial p}{\partial z}, \quad k = k_0 + Am, \quad k_0, A = \mathrm{const}; \tag{4}$$

$$V_0 = V_0^{(0)} \exp\Theta; \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[V_s\left(\rho_s - \rho_w\right) + \rho_w\left(1-m\right)V_0\right] = \alpha\left[\left(1-m\right)\pi - \sigma^f\right]; \tag{6}$$

$$\pi = \frac{0,5eRT}{\left(1-m\right)V_0 - V_s}. \tag{7}$$

Здесь m — пористость среды; p — давление в жидкости; σ^f — эффективное напряжение; Γ — нагрузка на слой; Θ — функция набухания-усадки; q — скорость фильтрации; k — проницаемость среды; V_0 — представительный объем среды; ρ_s и ρ_w — плотности твердой фазы "скелета" и воды соответственно; π — осмотическое давление; α — коэффициент массообмена; R — универсальная газовая постоянная; T — температура (K); e — удельная емкость катионного обмена; V_s — объем твердой фазы скелета; $\varphi(\Theta)$ — реологическое соотношение.

Система уравнений (1)—(7) записана для простейшего случая — набухания (усадки) при взаимодействии среды с водой, не содержащей примесей.

Поясним происхождение уравнений (1)—(7):

(1) является условием равновесия жидкой и твердой фаз пористой среды под нагрузкой Г;
(2) следует из теоремы *живых сил*, записанной для твердой фазы среды с учетом эффекта набухания (изменения объема скелета) [1];
(3) выражает баланс массы вещества жидкой и твердой фаз [1];
(4) есть закон фильтрации в среде с переменной пористостью;
(5) — определение функции набухания/усадки;
(6) представляет собой уравнение скорости набухания, т. е. изменение массы скелета за счет набухания под действием осмотического давления [4];
(7) — определение осмотического давления в набухающих средах [1].

Таким образом, искомыми функциями системы уравнений (1)—(7) являются σ^f, p, Θ, m, k, q, V_0, π. Постоянными величинами модели являются Γ, η, k_0, A, $V_0^{(0)}$, ρ_w, ρ_s, e, α, R, T.

Граничные условия имеют вид

$$p|_{z=z_0} = \Gamma; \quad p|_{z=0} = p_0, \tag{8}$$

где z_0 — толщина слоя.

Начальные условия:

$$\Theta\left(z,0\right) = 0.$$

На рис. 1 приведена схема процесса. Прямая линия АВ изображает профиль давления в слое

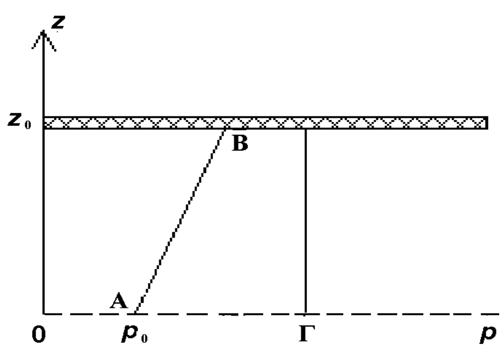

Рис. 1. Схема распределения давления в слое

глины толщиной z_0, к которому приложена постоянная внешняя нагрузка. Необходимо пояснить, почему профиль давления имеет форму прямой. Для этого сделаем некоторые упрощения системы уравнений (1)—(7).

Поскольку обычно для глинистых грунтов и почв $m \ll 1$, то m можно считать мало меняющейся функцией, т. е. попросту постоянной. Следовательно, можно убрать одно уравнение в (1)—(7). Пусть это будет уравнение (2). Таким образом, число уравнений и неизвестных функций сократилось до шести. Обезразмерим теперь уравнение (3):

$$\frac{1}{T_0}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + \frac{q_0}{L}\frac{\partial\left(q/q_0\right)}{\partial\left(z/L\right)} = 0, \quad T_0,\, q_0,\, L = \mathrm{const}. \tag{9}$$

В (9) использованы масштаб времени T_0 и характерная скорость фильтрации q_0, которые будут определены ниже, $L = z_0$.

Будем считать, что грунт или почва представляет собой структурно агрегированную среду с характерным размером агрегата r_a, фильтрация протекает в межагрегатном пространстве, а набухание осуществляется путем диффузионной пропитки агрегатов. Таким образом, $T_0 = r_a^2/D$, где D — коэффициент диффузии. Очевидно, что

$$\frac{L}{q_0\left(T_0 + Lq_0^{-1}\right)} \ll 1,$$

поскольку T_0 — быстро растущая функция r_a. Тогда уравнение (3) перейдет в

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

откуда немедленно следует

$$q = q_0 = \mathrm{const}, \quad q_0 = -\frac{k_0}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{10}$$

Решение второго уравнения в (10) с учетом граничных условий (8) имеет вид

$$p = \Gamma + \left(\Gamma - p_0\right)\frac{z - z_0}{z_0}. \tag{11}$$

Введем новую функцию процесса:

$$f = \left(1 - m\right)V_0 - V_s.$$

Физический смысл f заключается в том, что f есть объем воды, содержащейся в набухающем скелете пористой среды. Уравнение для f следует из системы (1)—(7) с учетом (11):

$$\frac{df}{dt} = \alpha\left[\left(1 - m\right)\frac{0,5eRT}{f} - \Gamma + p\right].$$

Усредним последнее уравнение по z. Тогда имеем

$$\frac{df}{dt} = b\left(\frac{a}{f} - 1\right),$$
$$\frac{eRT}{G} = a, \ \ \frac{0,5G}{\rho w} = b, \ \ G = \Gamma - p_0. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) легко находится:

$$f = a\ln\left(1 - \frac{f}{a}\right) = -bt. \tag{13}$$

Вид решения приведен на рис. 2.

До сих пор предполагалось, что набухание (усадка) приводит к изменению объема всей системы. Но на начальных стадиях процесса имеет место лишь изменение пористости без изменения объема среды в целом. Полученная зависимость (13) позволяет оценить это изменение.

Действительно, будем считать, что $V_0 = \mathrm{const}$, но m — переменная. Обозначим $f/a = x$. Тогда, разложив функцию $\ln(1-x)$ в левой части (13) в ряд, получим

$$m = 1 + \ln V_0 - \frac{V_s}{V_0} - \ln\sqrt{2abt}.$$

Вид этой зависимости приведен на рис. 3. Как и на рис. 2, имеется хорошее согласие результатов расчета с экспериментальными данными.

Проанализируем теперь некоторые следствия из соотношения (13). Это соотношение получено из системы (1)—(7) исключением уравнения (2) (реологического соотношения) в предположении, что $m = \mathrm{const}$. Таким образом, имеется степень свободы в выборе реологического соотношения для исследуемых сред. Так, если исследуемая среда имеет реологию Кельвина [3], то

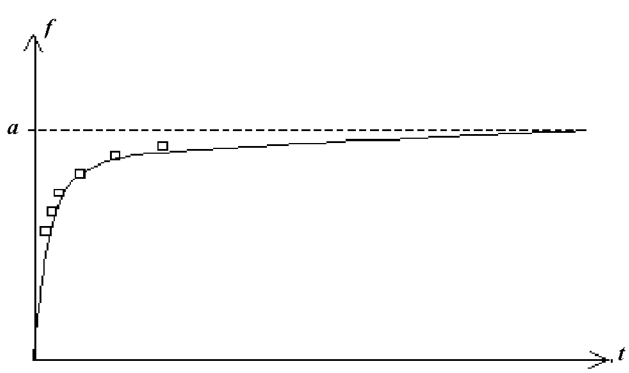

Рис. 2. Зависимость содержания воды в составе пористой матрицы от времени: —— — расчет; □ — эксперимент из работы [3]

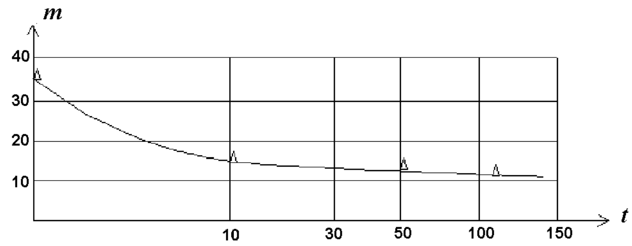

Рис. 3. Зависимость пористой набухающей среды от времени: —— — расчет; △ — эксперимент из работы [5]

связь между деформациями и временем дается зависимостью

$$\varepsilon = \frac{S_c}{2\mu} + \left(\frac{\varepsilon_0}{2\mu} - S_c\right)\exp\left(\frac{t}{T_{ret}}\right), \tag{14}$$

где μ, S_c, $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$; $T_{ret} = \eta/\mu$. Подставляя в (14) выражение для t из (13), получим зависимость деформации среды от набухания, т. е. количества впитанной скелетом воды.

В случае реологии Максвелла (упруговязкость) вместо (14) имеем зависимость напряжений от времени:

$$S = 2\dot{d}_c\eta + \left(S_0 - 2\dot{d}\eta\right)\exp\left(-\frac{t}{T_{ret}}\right), \tag{15}$$

где $\dot{d}_c$, η, S_0, $\mu_e = \mathrm{const}$; $T_{ret} = \eta/\mu l$. Аналогично (14) в (15) вместо t можно использовать его представление через количество поступившей в состав набухающего скелета воды, следующее из (13).

Поскольку $m \ll 1$, то можно считать $f = V_0 - V_s$, $V_s = \mathrm{const}$. Выше уже говорилось, что среда предполагается структурно агрегированной. Введем поверхностную плотность заряда собственно твердых частиц среды σ. Тогда заряд агрегата есть $\beta\sigma r_a^2$, где β — структурный фактор. Для куба (предполагаем, что объем заполнен частицами грунта кубической формы) $\beta \geq 6$; знак $>$ возникает в силу того, что заряд может располагаться на внутренних поверхностях агрегата. Число таких кубиков будет $N = e/\left(\beta\sigma r_a^2\right)$. Тогда для объема V_0 можно получить следующее выражение:

$$V_0 = \frac{e}{\beta\sigma r_a^2} r_a^3 = \frac{er_a}{\beta\sigma}. \tag{16}$$

Подставим (16) в (13):

$$\frac{e'r_a - V_s}{a} + \ln\left(1 - \frac{e'r_a - V_s}{a}\right) = -\frac{bt}{a},$$

где $e' = e/(\beta\sigma)$. Найдем теперь производную $\frac{\partial t}{\partial r_a}$. Очевидно, что

$$\frac{dt}{dr_a} = \frac{e'}{b} \frac{e' r_a - V_s}{1 - (e' r_a - V_s)/a}.$$

Для

$$r_a^f = \frac{V_s}{e'} = \frac{V_s \beta \sigma}{e} = \frac{V_s \beta e}{e \Sigma} = \frac{\beta}{\rho_s \sigma_i} \qquad (17)$$

имеем $\frac{\partial t}{\partial r_a} = 0$. Здесь σ_i есть удельная поверхность почвы, т. е. внутренняя поверхность, приходящаяся на единицу массы скелета. При переходе через точку $r_a = r_a^f$ функция меняет знак с минуса на плюс, таким образом $r_a = r_a^f$ представляет собой точку минимума для функции $\frac{\partial t}{\partial r_a}$. Следовательно, если объем V_0 будет заполнен кубиками со стороной r_a^f, время набухания, или впитывания влаги этим объемом, будет минимально.

Последний вывод имеет исключительную важность для физики почв. Во-первых, он позволяет получить явное соотношение для эффективного размера почвенного агрегата в зависимости от таких важнейших характеристик почвы, как плотность твердой фазы ρ_s, удельная поверхность σ_i и структурный фактор β (необходимо отметить, что формула (17) хорошо согласуется с полученным в [2] экспериментальным соотношением для r_a^f). Во-вторых, придается совершенно новый смысл функциональной необходимости процесса агрегации в почвах: в почвах формируются преимущественно такие агрегаты, которые обеспечивают минимальное время впитывания влаги почвенным слоем.

Интересен также следующий факт. Если взять последнее соотношение в (12) $G = \Gamma - p_0$ и предположить, что $p_0 < 0$ (это соответствует протеканию процесса в условиях неполного насыщения), то p_0 можно рассматривать как дополнительную нагрузку, которая приводит к усадке слоя даже без внешней нагрузки на слой Γ (капиллярная усадка). Таким образом, вместе с нагрузкой Γ дополнительным фактором, обеспечивающим механическую стабильность почвы, является капиллярное давление.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы:

1. Набухающий слой грунта или почвы должен располагаться на некоторой глубине. Вес вышележащих пород Γ играет роль стабилизирующего фактора при взаимодействии набухающего слоя с водой.
2. Набухающий слой должен иметь возможность подстраиваться под нагрузку Γ, например регулированием величины обменной емкости. Такие процессы протекают в почвах за счет взаимодействия с почвенной органикой [2]. Отрицательное (капиллярное) давление играет роль дополнительной нагрузки и ведет к усадке, что также стабилизирует набухающую систему.
3. Загрязнения меняют величину осмотического давления [1], что, в свою очередь, меняет весь комплекс свойств набухающего слоя (реология, агрегатная структура и др.).
4. Размер почвенных агрегатов не зависит от входящих в состав обменного комплекса катионов и характеризует способность почвы к всасыванию влаги.

Работа выполнена при поддержке МНТЦ (грант 2364).

Список литературы

1. *Храмченков М. Г.* Элементы физико-химической механики природных пористых сред. Казань: Изд-во Казанского матем. общества, 2003.
2. *Зубкова Т. А., Карпачевский Л. О.* Матричная организация почв. М.: Русаки, 2001.
3. *Уоррел У.* Глины и керамическое сырье. М.: Мир, 1978.
4. *Гугенгейм Э. А.* Современная термодинамика. М.—Л.: Госхимиздат, 1941.
5. *Якобсон А., Пуш Р.* Явления тиксотропии в перемятых мягких глинах // Инженерно-геологические свойства глинистых пород и процессы в них. М.: Изд-во МГУ, 1972. С. 25—34.

Статья поступила в редакцию 25.03.04.