

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ПРИМЕНЕНИЕМ АДАПТИВНОГО ПО ПРОСТРАНСТВУ МЕТОДА ДРОБНЫХ СЕТОК

Р. М. Шагалиев, А. В. Алексеев, И. М. Беляков, А. В. Гичук,
В. В. Евдокимов, А. Н. Москвин, А. А. Нуждин, Н. П. Плетенева, Т. В. Шемякина
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается адаптивный по пространственным переменным алгоритм дробления сеток, используемый при численном решении двумерного уравнения переноса. Представлены результаты численного исследования этой методики, проведенного на примере расчета ряда модельных задач распространения излучения. Приведено сравнение результатов расчетов с применением адаптивного метода с результатами, полученными по стандартной схеме без использования адаптивности. Для тех и других расчетов определены затраты вычислительного времени. В качестве критерия эффективности адаптивного метода использовался выигрыш во времени проведения расчета по сравнению со стандартной методикой при достижении примерно одинаковой точности решения.

Введение

Численное моделирование многомерных процессов переноса частиц является одной из наиболее сложных и трудоемких по затратам вычислительного времени задач прикладной математики. Одна из основных сложностей решения многомерного уравнения переноса связана с тем, что количество переменных, требуемых для адекватного моделирования заданной системы, может быть очень большим. В частности, двумерное нестационарное уравнение переноса должно решаться в шестимерном, а трехмерное — в семимерном фазовом пространстве [1, 2]. Другая трудность численного моделирования уравнения переноса связана с тем, что это уравнение часто надо решать в сложной геометрии, содержащей существенно отличающиеся по своим оптическим свойствам подобласти.

Так, во многих задачах численного моделирования процесса переноса рентгеновского излучения возникает ситуация, когда в некоторой пространственной подобласти необходимо найти численное решение с более высокой точностью и эта подобласть перемещается в пространстве с течением времени. Например, такой подобластью может являться окрестность фронта волны излучения. В таких случаях для обеспечения высокой точности получаемого числен-

ного решения необходимо использовать подробную пространственную сетку в некоторой перемещающейся в пространстве с течением времени подобласти счетной области. Введение же мелкой пространственной сетки во всей счетной области при этом не является необходимым и, более того, существенно увеличивает временные затраты на счет задачи, а также затраты ресурсов оперативной памяти ЭВМ.

В работе [3] сформулирован адаптивный метод решения многомерного уравнения с применением дробных встраивающихся сеток в фазовом пространстве. В данном адаптивном методе аппроксимация уравнения переноса на дробных сетках строится отдельно по пространственным, по угловым переменным и по энергетической переменной. Важной особенностью метода [1] является аппроксимация уравнения переноса по пространственным переменным на адаптивных дробных неортогональных пространственных сетках. В двумерных задачах это регулярные неортогональные четырехугольные сетки и нерегулярные сетки, образованные из выпуклых многоугольников.

В настоящей работе дано более детальное изложение разностного метода аппроксимации уравнения переноса на адаптивных дробных пространственных сетках (AM-S метода). В

частности, более развернуто представлены алгоритмы разбиения опорной пространственной сетки на более мелкие, дробные, даны формулы интерполяции данных между адаптивными сетками разного уровня, приведены критерии построения адаптивной дробной сетки.

Для того чтобы провести численные исследования адаптивного по пространству метода, был создан набор тестовых задач. Рассматриваемый метод реализован в исследовательской программе, с использованием которой были выполнены серии сравнительных расчетов тестовых задач в различной постановке. Постановки указанных тестовых задач и результаты численных исследований также приводятся в данной работе.

Постановка двумерной задачи переноса

Методика основывается на кинетической модели описания процессов переноса излучения с использованием классической интегродифференциальной формы записи нестационарного двумерного кинетического уравнения. Отметим, что рассматриваемые ниже методы принципиально не зависят от аппроксимации по энергетической переменной, в силу чего без потери общности в расчетах можно ограничиться одногрупповым приближением. Уравнения записываются в следующем виде [1]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + L\varepsilon + \chi_t \varepsilon = \frac{\chi_a}{2\pi} \varepsilon_p + \frac{\chi_s}{2\pi} \varepsilon^{(0)} + \frac{Q}{2\pi}; \quad (1)$$

$$L\varepsilon = \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \varepsilon \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \varepsilon \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \chi_a \varepsilon^{(0)} - \chi_a \varepsilon_p. \quad (3)$$

В записи уравнений приняты следующие обозначения: r, z — цилиндрические координаты положения частицы; $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ — единичный вектор в направлении полета частицы; $\mu = \cos \theta$, ($-1 \leq \mu \leq 1$), θ — угол между вектором $\vec{\Omega}$ и вектором оси симметрии \vec{z} ; φ — угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}$ на плоскость, проходящую через точку (r, z) перпендикулярно оси \vec{z} , и вектором, соединяющим точки $(0, z)$ и (r, z) , $0 \leq \varphi \leq \pi$; $\varepsilon = \varepsilon(t, r, z, \mu, \varphi)$ — функция интенсивности излучения (искомая функция); $\varepsilon^{(0)} = \int \varepsilon d\Omega$ — плотность потока излучения; $T = T(r, z)$ — температура среды; $E = E(\rho, T)$ — внутренняя энергия; $\chi_a = \chi_a(\rho, T)$ — сечение поглощения; $\chi_s =$

$= \chi_s(\rho, T)$ — сечение рассеяния; $\chi_t = \chi_a + \chi_s$ — полное сечение; $\varepsilon_p = \varepsilon_p(T)$ — функция Планка; $Q = Q(r, z)$ — независимый источник.

Уравнения (1)–(3) требуется решить в осесимметричной области $D = \{(r, z) \in L\}$, где L — сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось \vec{z} .

Учитываются процессы поглощения и рассеяния фотонов. Процессы переизлучения энергии средой моделируются в приближении локального термодинамического равновесия (по функции Планка).

Граничное условие на внешней поверхности задается при $(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0$ в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(t, r, z, \mu, \varphi)_{(r,z) \in \Gamma} = \phi(t, r_\Gamma, z_\Gamma, \mu, \varphi). \quad (4)$$

Здесь Γ — образующая тела вращения; \vec{n} — внешняя нормаль к образующей Γ ; $\phi(t, r_\Gamma, z_\Gamma, \mu, \varphi)$ — заданная функция.

Кроме того, в нестационарном случае система уравнений (1)–(4) дополняется начальными условиями.

Адаптивный по пространственным переменным алгоритм решения уравнения переноса

Идея рассматриваемого многосеточного метода состоит в том, что на каждом шаге по времени путем анализа сеточного решения в счетных областях задачи выделяется некоторая, в общем случае многосвязная, подобласть, в которой для поиска численного решения уравнения переноса рентгеновского излучения с заданной точностью необходимо применение более подробной сетки. Пространственные ячейки из этой подобласти разбиваются по определенным правилам на более мелкие ячейки. При этом предлагаемый алгоритм дает возможность измельчить пространственные ячейки, принадлежащие лишь той пространственной подобласти, в которой необходима повышенная точность численного решения. Это позволяет избежать измельчения пространственной сетки во всей счетной области и уменьшить затраты ресурсов оперативной памяти ЭВМ, а также временные затраты на счет задачи. На разных шагах по времени список измельчаемых ячеек опорной пространственной сетки может варьироваться.

Основные положения. При создании адаптивного алгоритма были использованы следующие положения:

1. Каждая ячейка опорной пространственной сетки может быть разбита на более мелкие ячейки адаптивной дробной сетки (адаптивные ячейки).
2. Адаптивная дробная сетка строится путем равномерного разбиения по каждому пространственному направлению на число интервалов 2^N , где N — уровень адаптивной сетки.
3. Уровень адаптивной сетки по строкам и столбцам в одной ячейке может быть различным, но в соседних ячейках он не должен отличаться более чем на единицу.
4. Адаптивная сетка строится в начале расчета шага по времени на основе анализа пространственного распределения функции решения на опорной пространственной сетке, полученного из решения на адаптивной сетке предыдущего временного шага.
5. Функции решения интерполируются со старой адаптивной сетки на новую с учетом сохранения консервативности.
6. Порядок разрешения пространственных ячеек при организации бегущего счета в модуле решения уравнения переноса определяется на опорной сетке. При наличии в ячейке адаптивной сетки решается подсистема уравнений, отвечающая аппроксимации уравнения переноса на адаптивной сетке в данной ячейке.
7. Все значения функции решения на адаптивной сетке хранятся в специальной динамической структуре данных, а осредненные значения на опорной сетке хранятся в стандартных массивах.

Организация счета процесса переноса излучения на адаптивных сетках. Пространственно-временная аппроксимация уравнения переноса осуществляется на регулярной разностной сетке, состоящей из произвольных четырехугольников, по разностной схеме с расширенным шаблоном [4] с треугольным оператором переноса.

Численное решение системы сеточных уравнений переноса излучения на опорной сетке осуществляется с использованием неявной схемы бегущего счета методом итераций по источнику. При наличии в ячейке адаптивного разбиения аналогичная схема бегущего счета используется локально для получения решения в каждой из ячеек адаптивной сетки, входящей в данную ячейку

опорной. Очередность разрешения мелких ячеек в составе опорной сетки определяется освещенностью. Решение в опорной ячейке находится как результат осреднения решений в ячейках адаптивной сетки, при этом сохраняется консервативность схемы. Также при наличии в ячейке адаптивного разбиения уравнение энергии (3) решается в каждой мелкой ячейке.

В рассматриваемом адаптивном методе используется следующий алгоритм разбиения пространственных ячеек на более мелкие. Сначала ребра исходного четырехугольника равномерно разбиваются некоторыми точками на число интервалов 2^N , где N — уровень адаптивной сетки. Противоположные ребра разбиваются на одинаковое число отрезков. Смежные ребра могут быть разбиты на разное число отрезков. Мелкие четырехугольники образуются путем попарного соединения соответствующих точек разбиения, введенных на противоположных опорных ребрах. При данном типе разбиения геометрия мелких ячеек подобна геометрии опорной пространственной ячейки, что позволяет сохранить связь измельченной пространственной сетки с конкретной постановкой задачи.

Интерполяции данных между адаптивными сетками разного уровня. Переинтерполяция величин на ребрах ячеек, а также сеточных величин в центрах ячеек выполняется в ходе динамического перестроения (дробления или укрупнения) адаптивной сетки на шагах по времени. При организации бегущего счета в зависимости от адаптивного разбиения соседних ячеек опорной пространственной сетки граничные величины либо передаются непосредственно из соседней разрешенной опорной ячейки, либо получают переинтерполяцией. Опишем алгоритм пересчета сеточных данных более детально.

При построении адаптивной сетки в опорной ячейке, в которой до этого не было адаптивности, значения сеточных величин в центрах ячеек адаптивной сетки (интенсивность излучения ϵ , плотность потока фотонов $\epsilon^{(0)}$, температура излучения, температура вещества T , внутренняя энергия) задаются равными значениям в опорной ячейке.

В случае, когда в опорной ячейке с адаптивной сеткой строится более мелкая адаптивная сетка, чем уже существующая, значения сеточных величин F_i в ячейках новой, более мелкой, адаптивной сетки задаются равными значениям се-

точных величин F в ячейках старой адаптивной сетки, геометрически соответствующих ячейкам новой сетки: $F_i = F$.

В обратном случае, при переходе в опорной ячейке от мелкой адаптивной сетки к более крупной, переинтерполяция сеточных величин производится следующим образом:

$$F = \frac{1}{m} \sum_i F_i m_i,$$

где F_i — сеточные величины в ячейках мелкой адаптивной сетки, геометрически соответствующих одной ячейке более грубой адаптивной сетки, m_i — массы этих ячеек; F — сеточная величина в ячейке новой, более грубой, адаптивной сетки, m — масса этой ячейки. В случае, когда адаптивная сетка удаляется из опорной ячейки, интерполяция сеточных величин с адаптивной сетки в опорную ячейку производится по этому же принципу.

В более сложном случае, когда в опорной ячейке пространственной сетки по одному из направлений строится более мелкая адаптивная сетка, а по другому — более грубая, чем уже существующая, при переинтерполяции сеточных величин используются оба подхода.

Интенсивность излучения рассчитывается в узлах. При переходе от грубой сетки к более мелкой адаптивной сетке производится линейная интерполяция интенсивности излучения. В обратном случае, при переходе от мелкой адаптивной сетки к более грубой, значения интенсивности в узлах последней берутся из соответствующих узлов мелкой сетки.

Потоки излучения рассчитываются в центрах сторон. При переходе от грубой сетки к более мелкой адаптивной сетке потоки на сторонах ячеек мелкой сетки приравниваются к потоку на стороне крупной ячейки, геометрически соответствующей ячейкам мелкой сетки. При переходе от мелкой адаптивной сетки к более грубой переинтерполяция потоков производится следующим образом:

$$F = \frac{1}{R} \sum_i F_i R_i,$$

где F_i — потоки на сторонах ячеек мелкой адаптивной сетки, геометрически соответствующих стороне ячейки более грубой адаптивной сетки, R_i — освещенность этих сторон мелких ячеек; F — поток на стороне ячейки более грубой сетки, R — освещенность стороны этой ячейки.

Критерий построения адаптивной сетки.

На каждом шаге по времени работает программа построения адаптивной пространственной сетки. Анализируются значения функции температуры излучения в ячейках опорной сетки. Разбиение каждой опорной ячейки пространственной сетки производится независимо по строкам и по столбцам с тем лишь ограничением, что в результате порядок разбиения в соседних ячейках не должен отличаться более чем на один уровень. Рассмотрим алгоритм построения адаптивной сетки. Поскольку последовательность действий при определении порядка адаптивного разбиения ячеек на столбцы принципиально не отличается от случая разбиения на строки, остановимся на одном из этих вариантов.

Пусть на этапе счета некоторой задачи потребовалось определить необходимый уровень адаптивного разбиения ячеек на столбцы. Для каждой ячейки, в которой температура излучения больше некоторого заданного числа, находится максимум относительного отклонения температуры излучения по формуле

$$Div_{rel} = \max \left(\frac{|T_{rad} - T_{rad}^{left}|}{T_{rad} + T_{rad}^{left}}, \frac{|T_{rad} - T_{rad}^{right}|}{T_{rad} + T_{rad}^{right}} \right),$$

где T_{rad} — температура излучения в рассматриваемой ячейке; T_{rad}^{left} — температура излучения в соседней ячейке слева; T_{rad}^{right} — температура излучения в соседней ячейке справа. Если данная ячейка граничная, она имеет одного соседа и Div_{rel} находится как одно из значений относительного отклонения.

Заметим, что здесь речь идет о значениях величин на опорной сетке. Таким образом, не учитывается, вводилось ли ранее адаптивное разбиение и какой уровень оно имело. Ограничение снизу на температуру излучения позволяет не принимать во внимание "недостаточно прогретые" ячейки, разбиение которых нецелесообразно.

В силу того что $Div_{rel} \in [0; 1]$, установить связь этого относительного отклонения с уровнем адаптивности можно следующим образом. Введем некоторую монотонно возрастающую на интервале $[0; 1]$ функцию $F(x)$, такую что $F(0) = 0$, $F(1) = MaxAdapt + 1$, где $MaxAdapt$ — максимально допустимый уровень адаптивной сетки при разбиении ячейки по столбцам. В результате требуемый уро-

вень адаптивности $OrdAdapt$ находится так:

$$OrdAdapt = \begin{cases} [F(Div_{rel})], & Div_{rel} \in [0; 1); \\ MaxAdapt, & Div_{rel} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что, меняя вид функции $F(x)$, можно менять чувствительность критерия к значениям относительного отклонения, близким к минимальным или максимальным. Оптимальность выбора функции $F(x)$ должна определяться численным исследованием, а в простейшем случае эта функция может иметь вид

$$F(x) = x (MaxAdapt + 1).$$

Когда для всех ячеек опорной сетки определены значения $OrdAdapt$, выполняется процедура *сглаживания*, после чего уровень адаптивности для разбиения по столбцам в соседних ячейках, имеющих общие точки, будет отличаться не более чем на единицу.

В случае разбиения ячеек по строкам максимально допустимый уровень адаптивности $MaxAdapt$ можно определять независимо от аналогичного параметра для разбиения по столбцам. В остальном алгоритм полностью идентичен приведенному выше. Вообще говоря, для адаптивных разбиений в различных направлениях (по строкам, по столбцам) можно взять функции $F(x)$ разного вида. Но, по-видимому, их выбор будет во многом определяться геометрией конкретной задачи.

Постановка тестовых задач

Целью разработки представляемого набора тестовых задач являлось проведение с их помощью численных исследований адаптивного по пространственным переменным метода решения двумерного уравнения переноса. Отметим общие черты постановки всех тестовых задач:

- 1) использование цилиндрической системы координат;
- 2) приближение *серой материи* (однотипное приближение) по энергетической переменной;
- 3) структурированная разностная сетка по пространственным переменным, состоящая из выпуклых четырехугольников.

Тестовая задача с аналитическим решением. Рассчитывается процесс переноса излучения и взаимодействия излучения с плоской одномерной средой. Расчеты указанной одномерной

задачи по двумерной программе, использующей запись уравнения переноса в цилиндрической системе координат, проводятся в геометрии, изображенной на рис. 1.

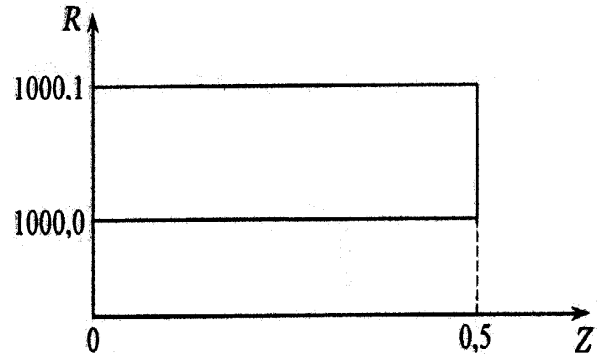


Рис. 1. Геометрия системы в тестовой задаче с аналитическим решением

На левом торце $\{Z = 0; 1000 \leq R \leq 1000,1\}$ задан входящий поток излучения

$$\varepsilon(0, \mu, t) = \frac{ct}{\pi(c + (cC_1 + 1))}, \quad \mu > 0,$$

$$C_1 = -0,85903205, \quad c = 3000,$$

где $\varepsilon(z, \mu, t)$ — интенсивность излучения; c — скорость света. На правом торце $\{Z = 0,5; 1000 \leq R \leq 1000,1\}$ входящий поток излучения задается равным нулю. На верхней $\{0 \leq Z \leq 0,5; R = 1000,1\}$ и нижней $\{0 \leq Z \leq 0,5; R = 1000\}$ боковых поверхностях задано граничное условие *зеркальное отражение*.

Зависимость энергии от температуры и сечение поглощения учитываются в виде $E = 2058 T^4$, $\chi_a = \frac{1}{2058 T^4}$ соответственно. Аналитическое решение задачи дается формулами [5]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(C_1 x + t) c}{\pi(c + (cC_1 \mu + 1))}; \\ E &= 2058 T^4 = C_1 x + t \end{aligned} \right\} \text{при } C_1 x + t \geq 0,$$

$$\varepsilon = 0; \quad T = 0 \quad \text{при } C_1 x + t \leq 0;$$

$$C_1 = -0,85903205.$$

Решение справедливо до тех пор, пока волна не достигнет правой границы.

Тестовая задача с плотным слоем. Рассматривается цилиндрический слой $\{1 \leq Z \leq 1,3; 100 \leq R \leq 102\}$, состоящий из одной физической области и удаленный от оси вращения

Z на расстояние $R = 100$, от оси R — на расстояние $Z = 1,0$ (рис. 2).

Постановка данного теста основана на модификации известной трехобластной тестовой задачи Флека [6]. А именно, в предлагаемом ниже тесте рассматривается одна из областей (оптически плотная) задачи Флека с несколько измененными размерами. Кроме того, предлагаемая задача решается в одностороннем приближении серой материи.

В счетной области задаются следующие параметры: координата $Z \in [1; 1,3]$; координата $R \in [100; 102]$; плотность вещества $\rho = 1$. Сечение поглощения $\chi_a = A/T^3$, где $A = 50,890585$, T — температура вещества; рассеяние отсутствует. Зависимость внутренней энергии от температуры имеет вид $E = 0,81T$.

На нижней поверхности $\{1 \leq Z \leq 1,3; R = 100\}$ задан входящий односторонний поток излучения, распределенный по телесному углу изотропным образом и соответствующий температуре излучения $T = 1$. На верхней поверхности $\{1 \leq Z \leq 1,3; R = 102\}$ задано граничное условие *свободная поверхность* (входящий поток, равный нулю). На боковых поверхностях области задано граничное условие зеркального отражения.

Начальная энергия соответствует температуре 0,0001, начальная интенсивность излучения $\epsilon(t, z, r, \mu, \varphi)|_{t=t_0} = 0$.

Задача считалась методом простых итераций, причем итерации по правой части сводились с

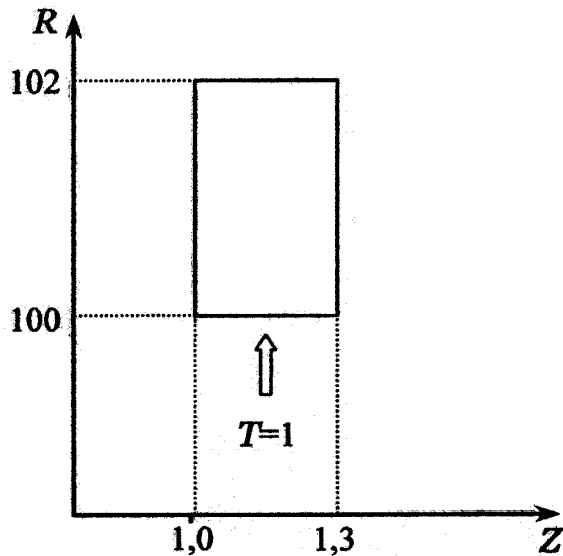


Рис. 2. Геометрия системы в тестовой задаче с плотным слоем

относительной точностью 0,00001 по плотности излучения. По пространственным и угловым переменным расчеты проводились по схеме второго порядка точности. При этом в точках системы, где температура $T \leq 0,001$, происходил переход на расчет по схеме первого порядка точности. Расчеты проводились до момента времени 0,05.

Рассчитывалось распространение излучения по системе. С учетом того, что решение носит одномерный характер, в качестве результата рассматривался профиль температуры излучения вдоль оси R на конечный момент времени.

Двумерная тестовая задача. В двумерной осесимметричной геометрии рассматривается прямоугольная область, представленная на рис. 3. Счетная область составлена из двух физических областей: область 1 $\{0 \leq Z \leq 5; 1 \leq R \leq 1,2\}$ — плотный кожух, область 2 $\{0 \leq Z \leq 5; 0 \leq R \leq 1\}$ — прозрачная.

Плотность вещества в системе $\rho = 1$. Зависимость энергии вещества от температуры задается уравнением $E = 0,81T$.

При выполнении расчетов учитывается процесс поглощения фотонов, причем сечение поглощения фотонов задано формулой $\chi_a = A/T^3$. С помощью различных значений коэффициента A в системе задаются оптически плотная и оптически прозрачная области — соответственно области 1 и 2. В области 1 $A = 50,89$; в области 2 $A = 0,1374$.

Сечение рассеяния в расчетах принимается равным нулю ($\chi_s = 0$). Начальная температура T во всех точках системы полагается равной 0,0001.

На левом торце прямоугольной области $\{Z = 0; 1 \leq R \leq 1,2\}$ задаются следующие граничные условия по излучению: на части грани-

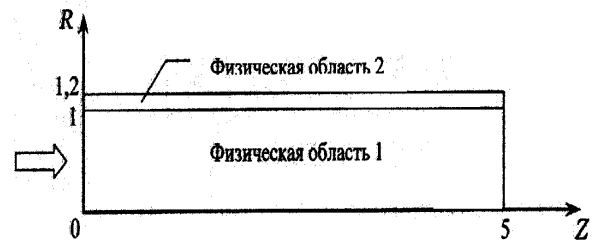


Рис. 3. Геометрия системы в двумерной тестовой задаче

цы, относящейся к плотному кожуху, — условие зеркального отражения, на части, относящейся к прозрачной области, — входящий изотропный поток излучения, соответствующий температуре $T = 1$. На верхней границе и правом торце входящий поток излучения задается равным нулю.

В результате решение уравнения переноса фотонов и взаимодействия излучения со средой в рассматриваемой задаче носит существенно двумерный характер.

Результаты численных исследований

Численное исследование адаптивного по пространству алгоритма требует выбора для каждой из рассматриваемых тестовых задач опорной пространственной сетки, которая обеспечит достаточно близкое к точному решение в области слабого изменения градиента. Также требуется определить такие интервалы по остальным переменным фазового пространства (шаг по времени, угловая сетка), которые обеспечат приемлемую точность аппроксимации. Такой подход позволяет выполнять построение адаптивной сетки наиболее оптимальным образом.

Выбор опорной сетки для тестовых задач. В ходе проведения расчетов на сходимость были получены точные решения тестовой задачи с плотным слоем и двумерной тестовой задачи, а для тестовой задачи с аналитическим решением установлены разбиения по переменным фазового пространства, достаточные для получения решения, близкого к аналитическому. Используемые при этом угловая сетка и шаг по времени взяты для расчетов с применением адаптивного алгоритма. Разбиение по пространственным переменным для опорной сетки, как сказано выше, выбиралось из соображений близости получаемого численного решения к точному в области малого изменения градиента решения.

Установлены следующие параметры разностной сетки в фазовом пространстве:

1. *Задача с аналитическим решением.* Опорная пространственная сетка содержит 10×25 или 10×50 ячеек (10 строк и 25 или 50 столбцов соответственно), угловая сетка — ES_8 -квадратура, шаг по времени $\Delta t = 0,00001$.
2. *Задача с плотным слоем.* Опорная пространственная сетка состоит из 22 столбцов и 20 или 40 строк, угловая сетка — ES_6 -

квадратура, шаг по времени $\Delta t = 0,00002$. За базовый принят расчет на пространственной сетке, содержащей 160×22 ячеек, так как дальнейшее измельчение не приводит к заметному изменению результата. Полученное при этом решение считается точным.

3. *Двумерная задача.* Опорная пространственная сетка состоит из 10 строк (по 5 в каждой из физических областей) и 50 столбцов, угловая сетка содержит 16 интервалов по углу μ и 6 интервалов по φ , шаг по времени $\Delta t = 0,00002$. За базовый принят расчет на пространственной сетке, содержащей 40×200 ячеек, а полученное при этом решение считается точным.

Результаты расчетов с использованием адаптивного метода. Для описания пространственных сеток, на которых выполнялись расчеты, ниже будут использоваться обозначения вида $Nr(Pr) \times Nz(Pz)$, где Nr — число строк, Nz — число столбцов, Pr — максимальный уровень адаптивности по строкам ($MaxAdapt$), Pz — максимальный уровень адаптивности по столбцам. Если по одному из направлений адаптивность не используется, параметр в скобках не указывается.

Результаты расчетов для задачи с аналитическим решением приведены на рис. 4–6.

На рис. 6 показаны результаты для расчетов с адаптивностью, в которых при максимальном разбиении опорной пространственной сетки во всех ячейках получается 200 интервалов по переменной Z . Это расчеты $10 \times 25(8)$ и $10 \times 50(4)$. Для сравнения на этом же рисунке показаны результаты расчетов без использования адаптивности на пространственных сетках 10×25 , 10×50 и 10×200 .

Эффективность применения адаптивного по пространству метода для каждой из тестовых задач оценивалась по достигаемой экономии времени счета. Для сравнения выбирались расчеты с адаптивностью и без нее, обеспечивающие близкие решения, при этом за 100% принималось время счета на пространственной сетке без использования адаптивности. Результаты для тестовой задачи с аналитическим решением приведены в табл. 1, 2.

На рис. 7 приведены результаты расчетов с использованием адаптивного алгоритма задачи с плотным слоем.

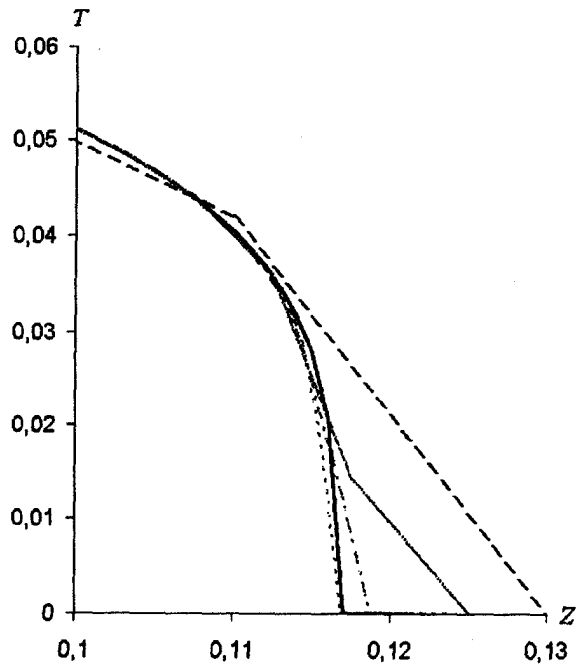


Рис. 4. Температура вещества вдоль оси Z на момент времени $t = 0,1$ в задаче с аналитическим решением для опорной сетки 10×25 : — — аналитическое решение; — — — расчет $10 \times 25(4)$; ··· — расчет $10 \times 25(8)$; ··· — расчет $10 \times 25(16)$; - - - - расчет 10×25

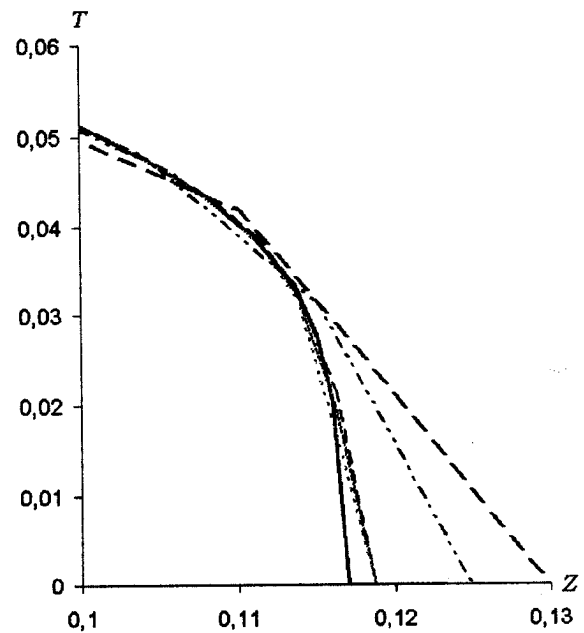


Рис. 6. Температура вещества вдоль оси Z на момент времени $t = 0,1$ в задаче с аналитическим решением для различных опорных сеток: — — аналитическое решение; - - - - расчет 10×25 ; ··· — расчет 10×50 ; - - - - расчет 10×200 ; ··· — расчет $10 \times 25(8)$; — — — расчет $10 \times 50(4)$

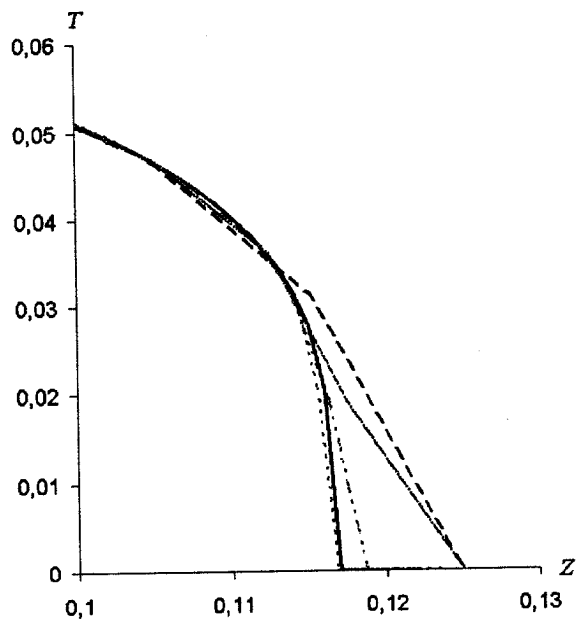


Рис. 5. Температура вещества вдоль оси Z на момент времени $t = 0,1$ в задаче с аналитическим решением для опорной сетки 10×50 : — — аналитическое решение; — — — расчет $10 \times 50(2)$; ··· — расчет $10 \times 50(4)$; ··· — расчет $10 \times 50(8)$; - - - - расчет 10×50

Таблица 1

Эффективность применения адаптивного по пространству метода для тестовой задачи с аналитическим решением; базовая пространственная сетка 10×400

Расчет	Время счета, %
10×400	100
$10 \times 50(8)$	18
$10 \times 25(16)$	11

Таблица 2

Эффективность применения адаптивного по пространству метода для тестовой задачи с аналитическим решением; базовая пространственная сетка 10×200

Расчет	Время счета, %
10×200	100
$10 \times 50(4)$	32
$10 \times 25(8)$	16

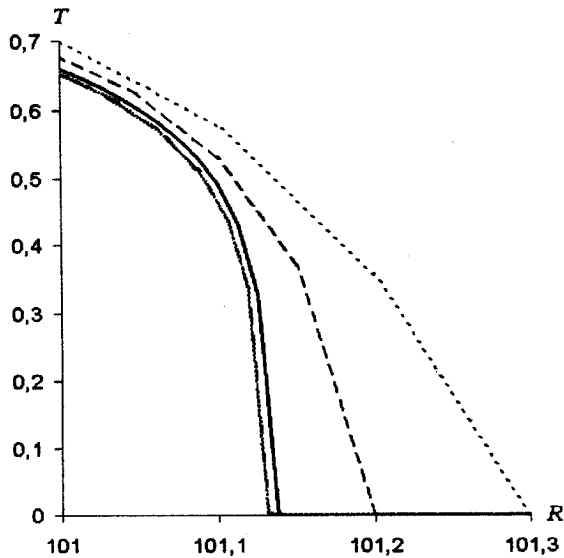


Рис. 7. Профиль температуры излучения вдоль оси R на момент времени $t = 0,05$ в задаче с плотным слоем для различных опорных сеток: — — решение на базовой сетке 160×22 ; — — расчет $40(4) \times 22$; - - - - расчет $20(8) \times 22$; ····· расчет 40×10 ; ····· расчет 20×10

Анализ результатов показывает, что в расчетах на сетках $40(4) \times 22$ и $20(8) \times 22$ с применением адаптивного метода они совпадают (соответствующие кривые на рис. 7 практически не отличаются друг от друга), а отклонение от результата на базовой сетке 160×22 оказывается весьма незначительным. Показатели эффективности адаптивного алгоритма приведены в табл. 3.

Более подробное рассмотрение процесса счета показывает, что выигрыш во времени счета обусловлен тем, что сгущение пространственной сетки вследствие применения адаптивного метода происходит только в зоне фронта волны излучения. Реально с учетом адаптивных ячеек расчет $40(4) \times 22$ выполняется на пространственной сетке с 45 строками, а расчет $20(8) \times 22$ — с 35 строками.

Результаты счета двумерной тестовой задачи на адаптивных сетках $10(4) \times 50(4)$ и $10(8) \times 50(8)$ показаны на рис. 8, там же для сравнения приведены численные решения на некоторых пространственных сетках без адаптивности.

Как видно из представленных графиков, решение, полученное на сетке $10(8) \times 50(8)$ с использованием адаптивного метода, оказывается близко к результату расчета на сетке 40×200 с использованием стандартной методики. По-

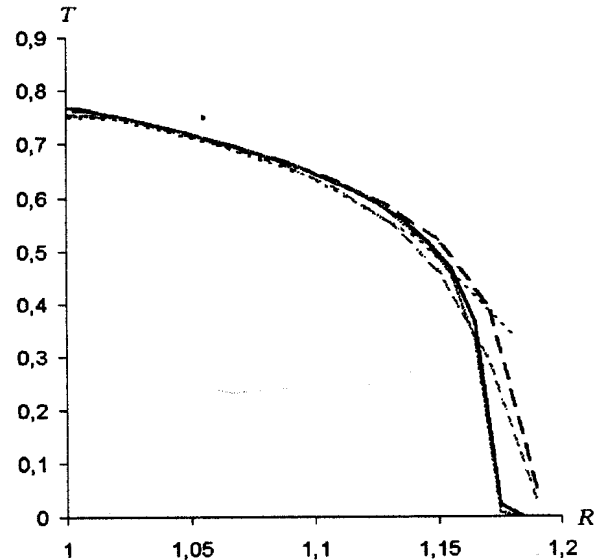


Рис. 8. Профиль температуры вещества вдоль линии $Z=2$ на момент времени $t = 0,01$ в двумерной тестовой задаче для различных опорных сеток: — — решение на базовой сетке 40×200 ; - - - - расчет 20×100 ; ····· расчет 10×50 ; - · - · - · расчет $10(??) \times 50(??)$; — — расчет $10(8) \times 50(8)$

казатели эффективности адаптивного алгоритма приведены в табл. 4.

В качестве иллюстрации, демонстрирующей результаты работы программ формирования адаптивной сетки, на рис. 9 для трех разных моментов времени представлено распределение поля температуры излучения в системе. Черные линии соответствуют опорной пространственной сетке, белые — адаптивным ячейкам. Максимальный уровень адаптивности в этом расчете — 2 по обоим направлениям (4 адаптивные ячейки в опорной сетке). Видно, что адаптивное разбиение пространственной сетки происходит только на фронте волны, причем по-разному в разных пространственных направлениях.

Реализованный в настоящее время алгоритм адаптивного разбиения по пространственным переменным позволяет измельчать разностную сетку независимо по строкам и по столбцам. Поскольку решение рассматриваемой задачи имеет двумерный характер, данный фактор может оказывать влияние на результат. Как показали расчеты, увеличение числа строк вместо использования адаптивного разбиения приводит к повышению точности получаемого результата, что и следовало ожидать. Так, решение на сетке $40 \times 50(4)$ оказывается близким к решению без адаптивного алгоритма на сетке 40×200 , при

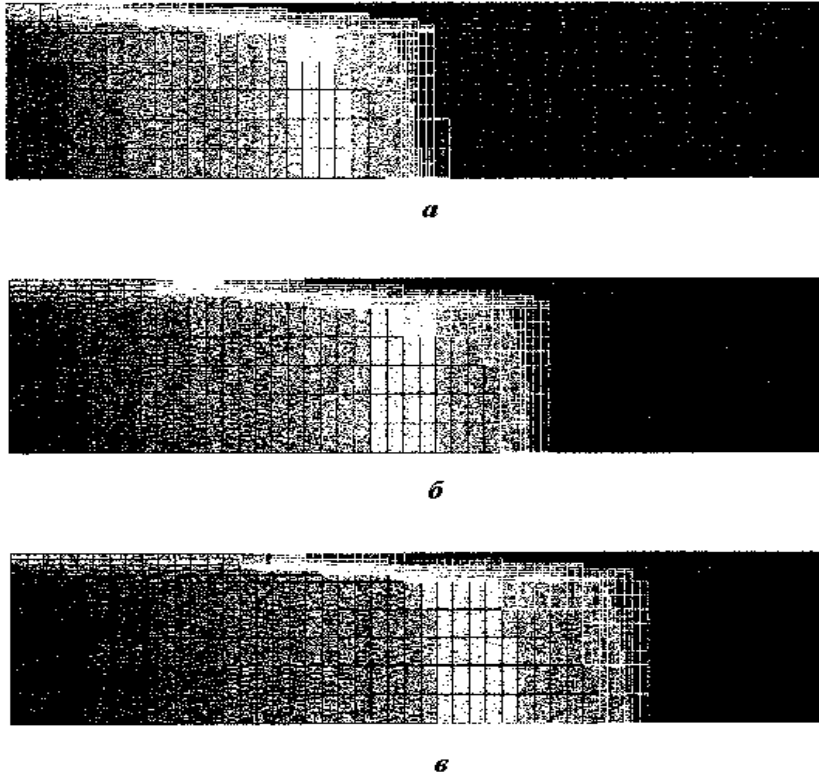


Рис. 9. Адаптивное разбиение пространственной сетки $10(8) \times 50(8)$ на разные моменты времени: *a* — $t = 0,004$; *b* — $t = 0,006$; *c* — $t = 0,008$

Таблица 3

Эффективность применения адаптивного по пространству метода для тестовой задачи с плотным слоем; базовая пространственная сетка 160×22

Расчет	Время счета, %
160×22	100
$40(4) \times 22$	25
$20(8) \times 22$	23

Таблица 4

Эффективность применения адаптивного по пространству метода для двумерной тестовой задачи; базовая пространственная сетка 40×200

Расчет	Время счета, %
40×200	100
$10(8) \times 50(8)$	36

этом расчет с использованием адаптивного алгоритма требует 32% времени расчета на сет-

ке 40×200 . Таким образом, эффективность адаптивного расчета на сетке $40 \times 50(4)$ выше, чем на сетке $10(8) \times 50(8)$ (см. табл. 4).

Изучение проблем выбора опорной сетки с учетом различного адаптивного разбиения строк и столбцов существенно зависит от рассматриваемой задачи и требует дополнительных исследований в каждом конкретном случае, поэтому в рамках данной работы этот вопрос не рассматривается.

Заключение

С целью анализа эффективности новой адаптивной схемы авторы провели серию тестовых расчетов нескольких нестационарных задач, предусмотренных контрактом с Лос-Аламосской национальной лабораторией (США).

Результаты сравнительных расчетов для всех тестовых задач подтвердили практическую работоспособность адаптивного метода дробных сеток. Результаты расчетов с использованием адаптивной схемы с динамическим дроблением сетки в зонах изменения решения оказываются

весьма близки к результатам, полученным в расчетах по стандартной схеме на существенно более подробных пространственных сетках, или к аналитическому решению.

При этом использование адаптивной схемы при обеспечении заданной точности численного решения позволяет существенно сократить временные затраты на проведение расчетов. Так, в разных тестовых задачах выигрыш по вычислительному времени от адаптивной схемы по сравнению со стандартной схемой при сохранении примерно одинаковой точности сеточного решения составил для разных режимов от 3 до 9 раз.

Таким образом, использование адаптивных алгоритмов позволяет проводить расчеты задач с существенно меньшими вычислительными затратами по сравнению со стандартной схемой при сравнимой точности результатов.

Работа выполнена в рамках контракта № 37713-000-02-35 (задача 014) с Лос-Аламосской национальной лабораторией США (LANL).

Список литературы

1. *Шагалиев Р. М., Шумилин В. А., Алексеев А. В. и др.* Математическое моделирование и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 20–26.
 2. *Алексеев А. В., Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М.* Методика численного решения нестационарного трехмерного уравнения переноса частиц в комплексе САТУРН // Там же. 1993. Вып. 3. С. 3–8.
 3. *Шагалиев Р. М.* Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // См. настоящий выпуск. С. 3–15.
 4. *Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М.* Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34–41.
 5. *Думкина Г. В., Козманов М. Ю.* Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19, № 4. С. 1061–1063.
 6. *Fleck J. A., Cummings J. D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.
-