

УДК 519.6

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

А. И. Панов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Изложена методика построения параметризованного набора разностных схем уравнения теплопроводности на произвольной нерегулярной сетке. Разностные операторы сохраняют симметричность и положительную определенность — свойства, присущие исходному дифференциальному оператору. Рассматриваются вопросы точности полученных схем.

Введение

Во многих областях современной науки возникают задачи, существенным элементом которых являются уравнения газовой динамики. Исследования, связанные с подобными задачами, привели к созданию мощных программных комплексов, предназначенных для численного решения задач механики сплошных сред. В основу большого количества численных методик положен метод конечных разностей. Любая разностная схема строится исходя из разбиения области независимых переменных на конечное число ячеек, образующих счетную сетку задачи. В двумерных областях наиболее часто применяются так называемые регулярные сетки, состоящие из четырехугольных ячеек и покрывающие область решения в матричном порядке, образуя *строки* и *столбцы* ячеек. В нерегулярных сетках используются ячейки, как правило, с переменным числом сторон, в результате чего способы нумерации узлов и ячеек в общем случае не отражают их взаимного расположения. Инициатива использования нерегулярных сеток принадлежит И. Д. Софронову [1]. Выдвинутые им идеи получили свое развитие при создании таких нерегулярных методик, как ДМК и МЕДУЗА [2].

В последнее время практика ставит все больше задач, где на газодинамическое течение воздействуют дополнительные факторы, такие как электромагнитные поля, процессы теплопроводности, излучения и т. д. Учет подобных явлений усложняет математическую постановку задачи и порождает самостоятельные проблемы при их решении. К настоящему времени опубликовано много работ (см., например, [3–6]), в которых предложены методы решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках. В этих работах рассматриваются различные способы аппроксимации уравнения теплопроводности, вопросы устойчивости и сходимости численного решения.

Обычно при построении аппроксимации пространственных производных на неравномерных сетках используется процедура интерполяции. Если счетная сетка сильно неравномерная, то, как правило, отношение погрешности интерполяции к приращению пространственного аргумента не является бесконечно малой величиной. Поэтому была предпринята попытка построить аппроксимацию пространственных производных без использования процедуры интерполяции. В основу построения предлагаемой разностной схемы уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках положен метод, использующий для аппроксимации пространственных производных только две операции — дифференцирование обобщенных функций и проектирование. Оператор проектирования используется для перевода сингулярных функций в кусочно-постоянные. Данный метод применим для аппроксимации пространственных производных любого порядка. Показано, что для треугольных,

параллелограммных и шестиугольных однородных сеток точность аппроксимации первых производных получается не ниже первого порядка, а точность аппроксимации вторых производных — не ниже второго.

Для большого класса неоднородных сеток имеет место аппроксимация первых производных в смысле сходимости в слабом. Что касается вторых производных, то даже для аппроксимации их в слабом требуется наличие аппроксимации производных первого порядка в норме пространства L_2 . Приводится пример, иллюстрирующий отсутствие сходимости численного решения к аналитическому при измельчении неоднородной сетки, для которой есть аппроксимация первых производных в слабом, но нет аппроксимации в норме L_2 . Данные результаты инициировали дальнейшее развитие выбранного подхода для конструирования разностной аппроксимации пространственных производных на произвольных счетных сетках.

В статье описывается модификация дифференциально-проеекционного метода, в котором для получения более точной аппроксимации первых производных операция проектирования в определении разностного градиента заменяется применением линейного оператора. Для данного метода получен общий вид линейного оператора, зависящий от набора числовых параметров, использование которого приводит к симметричной разностной матрице для уравнения диффузии с симметричным тензором коэффициентов проводимости. Получены условия, гарантирующие положительную определенность разностной матрицы, если тензор коэффициентов проводимости исходной задачи положительно определен.

Дифференциально-проеекционный способ построения разностных операторов

В конечно-разностных методах обычно используются разрывные функции, принимающие в ячейках счетной сетки постоянные значения. Частные производные от таких функций почти всюду равны нулю и не несут информации о росте и убывании этих функций. Поэтому предлагается применять дифференцирование разрывных функций в обобщенном смысле, а получаемые при этом сингулярные обобщенные функции превращать в кусочно-постоянные при помощи операторов проектирования.

Предположим, что пространство R^2 покрыто счетной сеткой $\Omega = \{\Omega_i, i \in I\}$. Ячейками сетки Ω могут быть произвольные несамопересекающиеся многоугольники. Сетку Ω будем называть основной сеткой. Наряду с основной рассмотрим вспомогательную сетку $\omega = \{\omega_j, j \in J\}$, покрывающую пространство R^2 так, что каждая ячейка ω_j содержит только узел j сетки Ω . Для определенности будем считать, что ячейки ω_j получены путем соединения середин ребер ячеек Ω_i с их центрами (рис. 1). При этом соединяющие линии не обязаны быть прямолинейными отрезками.

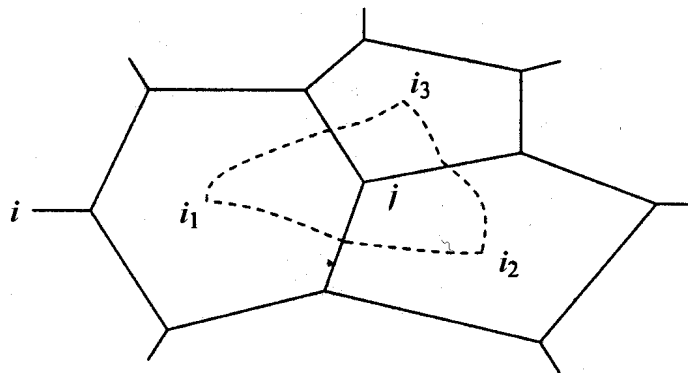


Рис. 1. Схема построения узловых ячеек

В дальнейшем для локально-суммируемых функций $f = f(x, y)$ интеграл $\int_{R^2} f(x, y)\varphi(x, y) dx dy$ будем рассматривать как линейный функционал на функциях $\varphi(x, y)$ и обозначать через $\langle f, \varphi \rangle$. Это же обозначение будем использовать для функционалов, порожденных обобщенными функциями f .

Как обычно, через $\chi(x, y; A) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A \end{cases}$ будем обозначать характеристическую функцию

множества A . Для сокращения записи вместо $\chi(x, y; A)$ часто будем писать $\chi(A)$.

Обозначим через Π и π следующие проекторы на класс кусочно-постоянных функций:

$$\Pi : f \rightarrow \Pi f = \sum_{i \in I} \frac{\langle f, \chi(\Omega_i) \rangle}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i); \quad \pi : f \rightarrow \pi f = \sum_{j \in J} \frac{\langle f, \chi(\omega_j) \rangle}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \chi(\omega_j).$$

Заметим, что для непрерывных финитных или быстро убывающих на бесконечности функций имеет место равномерная сходимость $\Pi f \Rightarrow f$, $\pi f \Rightarrow f$ при $\text{diam}(\Omega) \rightarrow 0$.

Для построения разностных аналогов дифференциальных операторов воспользуемся понятием дифференцирования обобщенных функций:

$$\langle \text{grad} f, \varphi \rangle = - \langle f, \text{grad} \varphi \rangle, \quad (1)$$

где f — обобщенная функция, $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$.

Всякая кусочно-постоянная функция $f = \sum_{i \in I} f_i \chi(x, y; \Omega_i)$ является обобщенной функцией, для которой $\text{grad} f = \sum_{i \in I} f_i \text{grad} \chi(x, y; \Omega_i)$. При этом

$$\langle \text{grad} \chi(\Omega_i), \varphi \rangle = - \langle \chi(\Omega_i), \text{grad} \varphi \rangle = - \int_{\Omega_i} \text{grad} \varphi \, dx dy = - \int_{\partial \Omega_i} \varphi \vec{n} \, dl, \quad (2)$$

где $\partial \Omega_i$ — граница ячейки Ω_i ; \vec{n} — вектор внешней нормали; $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$. Правая часть равенства (2) допускает непрерывное продолжение с $C_0^\infty(R^2)$ на достаточно широкий класс разрывных функций, включающих в себя и функции $\chi(\omega_j)$. Значит, и оператор $\text{grad} \chi(\Omega_i)$ непрерывным образом продолжается на функции $\chi(\omega_j)$ и

$$\langle \text{grad} \chi(\Omega_i), \chi(\omega_j) \rangle = - \int_{\partial \Omega_i \cap \omega_j} \vec{n} \, dl.$$

Следовательно, имеет смысл выражение

$$\begin{aligned} \text{Grad}_\Omega f &= \frac{D_\Omega f}{Dx} \vec{i} + \frac{D_\Omega f}{Dy} \vec{j} = \pi \text{grad} \Pi f = \sum_{j \in J} \frac{\langle \text{grad} \Pi f, \chi(\omega_j) \rangle}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \chi(\omega_j) = \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \frac{f_i \langle \text{grad} \chi(\Omega_i), \chi(\omega_j) \rangle}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \chi(\omega_j) = - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \frac{f_i \int_{\partial \Omega_i \cap \omega_j} \vec{n} \, dl}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \chi(\omega_j), \end{aligned}$$

где $f_i = \frac{\langle f, \chi(\Omega_i) \rangle}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle}$. Это выражение примем за определение разностного дифференцирования.

Определение 1. Разностные производные $\text{Grad}_\Omega f$ от интегрируемой на ячейках сетки Ω функции f представляют собой кусочно-постоянные на ячейках сетки ω функции, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$\text{Grad}_\Omega f = \pi \text{grad} \Pi f = - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \frac{f_i \int_{\partial \Omega_i \cap \omega_j} \vec{n} \, dl}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \chi(\omega_j), \quad f_i = \frac{\langle f, \chi(\Omega_i) \rangle}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle}. \quad (3)$$

Из (3), в частности, видно, что $K_\Omega \subset D(\text{Grad}_\Omega)$, $R(\text{Grad}_\Omega) \subset K_\omega \times K_\omega$, где D — область определения; R — область значений; K_Ω , K_ω — пространства функций, принимающих постоянные значения в ячейках сеток Ω и ω соответственно.

Поменяв местами в операторе $\pi \text{ grad } \Pi$ проекторы π и Π и проделав следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \text{Grad}_\omega f &= \frac{D_\omega f}{Dx} \vec{i} + \frac{D_\omega f}{Dy} \vec{j} = \Pi \text{ grad } \pi f = \sum_{i \in I} \frac{\langle \text{grad } \pi f, \chi(\Omega_i) \rangle}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i) = \\ &= - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{f_j \int_{\partial \omega_j \cap \Omega_i} \vec{n} dl}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{f_j \int_{\partial \Omega_i \cap \omega_j} \vec{n} dl}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i), \quad f_j = \frac{\langle f, \chi(\omega_j) \rangle}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle}, \end{aligned}$$

получим еще одно определение разностного дифференцирования.

Определение 2. Разностные производные $\text{Grad}_\omega f$ от интегрируемой на ячейках сетки ω функции f представляют собой кусочно-постоянные на ячейках сетки Ω функции, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$\text{Grad}_\omega f = \Pi \text{ grad } \pi f = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{f_j \int_{\partial \Omega_i \cap \omega_j} \vec{n} dl}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i), \quad f_j = \frac{\langle f, \chi(\omega_j) \rangle}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle}. \quad (4)$$

Очевидно, что $K_\omega \subset D(\text{Grad}_\omega)$; $R(\text{Grad}_\omega) \subset K_\Omega \times K_\Omega$.

Последовательно производя численное дифференцирование то способом (3), то способом (4), можно получить разностные аналоги дифференциальных операторов второго и более высоких порядков.

Замечание 1. Так как справедливы формулы

$$\langle \pi f, g \rangle = \langle f, \pi g \rangle \text{ и } \langle \Pi f, g \rangle = \langle f, \Pi g \rangle,$$

то из (1) следует, что для разностного дифференцирования по формулам (3), (4) выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \text{Grad}_\Omega f, g \rangle &= - \langle f, \text{Grad}_\omega g \rangle; \\ \langle \text{Grad}_\omega f, g \rangle &= - \langle f, \text{Grad}_\Omega g \rangle. \end{aligned}$$

Точность аппроксимации производных первого порядка в некоторых частных случаях

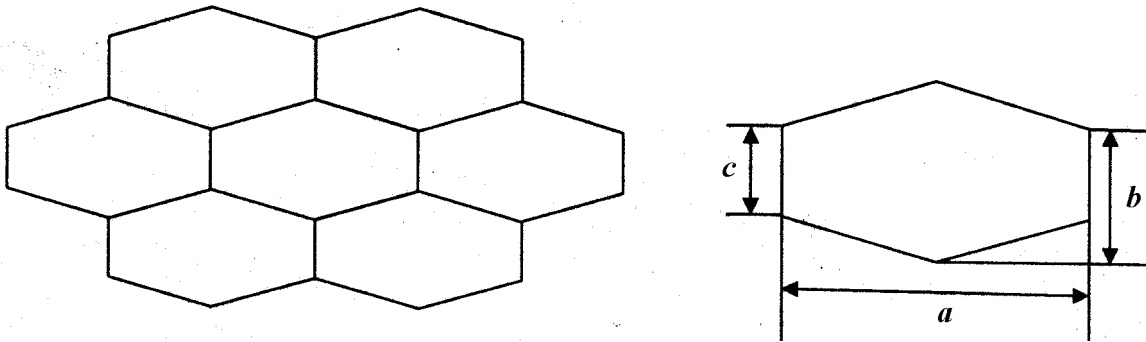
Оценку погрешности аппроксимации сделаем для бесконечно дифференцируемых функций, разлагающихся в ряд Тейлора

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_j) + (\text{grad } f(\vec{r}_j), \vec{r} - \vec{r}_j) + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{\partial^k f(\vec{r}_j)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{(x - x_j)^m (y - y_j)^n}{m! n!}$$

в окрестности каждой узловой ячейки ω_j . Легко проверяется, что

$$(\text{Grad}_\Omega f)_j - \text{grad } f(\vec{r}_j) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{\partial^k f(\vec{r}_j)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{1}{m! n!} (\text{Grad}_\Omega (x - x_j)^m (y - y_j)^n)_j. \quad (5)$$

Порядок аппроксимации на треугольной сетке. Предположим, что основная сетка Ω состоит из равных шестиугольных ячеек (рис. 2). Тогда вспомогательная сетка ω будет состоять из равных треугольников.


 Рис. 2. Шестиугольная сетка Ω

Рассмотрим треугольную ячейку, расположенную основанием вверх. Из (5) следует, что

$$\left(\frac{D_{\Omega}f}{Dx}\right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial x}\right)_j = \frac{\partial^2 f(\vec{r}_j)}{\partial x \partial y} \frac{c}{2} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x \partial y^2} \frac{c^2}{8} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^3} \frac{a^2}{24} + O(\text{diam}^3(\omega_j)).$$

Таким образом, оператор $\frac{D_{\Omega}}{Dx}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial x}$ с первым порядком точности при $c \neq 0$ и со вторым порядком при $c = 0$. Аналогично,

$$\left(\frac{D_{\Omega}f}{Dy}\right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial y}\right)_j = \frac{\partial^2 f(\vec{r}_j)}{\partial y^2} \frac{c-b}{2} + \text{ctg}\alpha \frac{\partial^2 f(\vec{r}_j)}{\partial x^2} \frac{a}{4} + O(\text{diam}^2(\omega_j)) + \text{ctg}\alpha O(\text{diam}^2(\omega_j)),$$

где α — угол при основании треугольной ячейки. Таким образом, оператор $\frac{D_{\Omega}}{Dy}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial y}$ с первым порядком при условии, что $\text{ctg}\alpha = \frac{a}{2b}$ ограничен.

Для треугольной ячейки, расположенной основанием вниз,

$$\left(\frac{D_{\Omega}f}{Dx}\right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial x}\right)_j = -\frac{\partial^2 f(\vec{r}_j)}{\partial x \partial y} \frac{c}{2} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x \partial y^2} \frac{c^2}{8} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^3} \frac{a^2}{24} + O(\text{diam}^3(\omega_j)),$$

$$\left(\frac{D_{\Omega}f}{Dy}\right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial y}\right)_j = \frac{\partial^2 f(\vec{r}_j)}{\partial y^2} \frac{b-c}{2} - \text{ctg}\alpha \frac{\partial^2 f(\vec{r}_j)}{\partial x^2} \frac{a}{4} + O(\text{diam}^2(\omega_j)) + \text{ctg}\alpha O(\text{diam}^2(\omega_j)).$$

Следовательно, в обоих случаях $\frac{D_{\Omega}}{Dx}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial x}$ с первым порядком точности при $c \neq 0$ и со вторым порядком при $c = 0$. Оператор $\frac{D_{\Omega}}{Dy}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial y}$ с первым порядком точности при условии, что $\text{ctg}\alpha$ ограничен.

Порядок аппроксимации на параллелограммной сетке. Предположим, что основная сетка Ω состоит из равных параллелограммных ячеек (рис. 3). Вспомогательная сетка ω будет также состоять из равных параллелограммов.

Из (5) следует, что

$$\left(\frac{D_{\Omega}f}{Dx}\right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial x}\right)_j = \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x \partial y^2} \frac{b^2}{8} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^2 \partial y} \frac{b^2 \text{ctg}\alpha}{4} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^3} \frac{a^2 + 3b^2 \text{ctg}^2 \alpha}{24} + O(\text{diam}^4(\omega_j)).$$

Так как $a, b, b \text{ctg}\alpha < \text{diam}(\omega_j) = \sqrt{(a + b \text{ctg}\alpha)^2 + b^2}$, то оператор $\frac{D_{\Omega}}{Dx}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial x}$ со вторым порядком точности. Аналогично,

$$\left(\frac{D_{\Omega}f}{Dy}\right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial y}\right)_j = \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial y^3} \frac{b^2}{24} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\text{ctg}\alpha}{3} \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^3}\right) \frac{a^2 - b^2 \text{ctg}^2 \alpha}{4} +$$

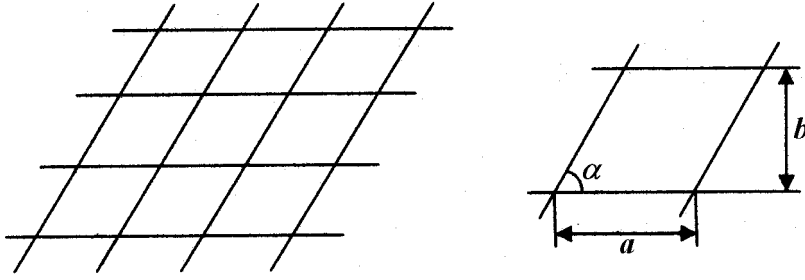


Рис. 3. Параллелограммная сетка Ω

$$+ O(b^4) + \frac{a^2 - b^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4} (O(\operatorname{diam}^2(\omega_j)) + \operatorname{ctg} \alpha O(\operatorname{diam}^2(\omega_j))). \quad (6)$$

Из (6) следует, что оператор $\frac{D_\Omega}{Dy}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial y}$ со вторым порядком при условии, что $\operatorname{ctg} \alpha$ ограничен.

Порядок аппроксимации на шестиугольной сетке. Предположим, что основная сетка Ω состоит из равных треугольных ячеек (рис. 4). Тогда вспомогательная сетка ω будет состоять из равных шестиугольников.

Рассмотрим узловую ячейку ω_j , изображенную на рис. 2. Из (5) следует, что

$$\left(\frac{D_\Omega f}{Dx} \right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial x} \right)_j = \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x \partial y^2} \frac{c^2}{8} + \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^3} \frac{a^2}{4} + O(\operatorname{diam}^4(\omega_j)).$$

Таким образом, оператор $\frac{D_\Omega}{Dx}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial x}$ со вторым порядком точности. Аналогично,

$$\left(\frac{D_\Omega f}{Dy} \right)_j - \left(\frac{\partial f(\vec{r}_j)}{\partial y} \right)_j = \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial y^3} \frac{b^2 - 3\frac{c}{2}\left(b - \frac{c}{2}\right)}{6} + \frac{c}{b} \frac{\partial^3 f(\vec{r}_j)}{\partial x^2 \partial y} \frac{a^2}{16} + O(\operatorname{diam}^4(\omega_j)).$$

Так как $\frac{c}{b} < 1$, то оператор $\frac{D_\Omega}{Dy}$ аппроксимирует $\frac{\partial}{\partial y}$ со вторым порядком точности.

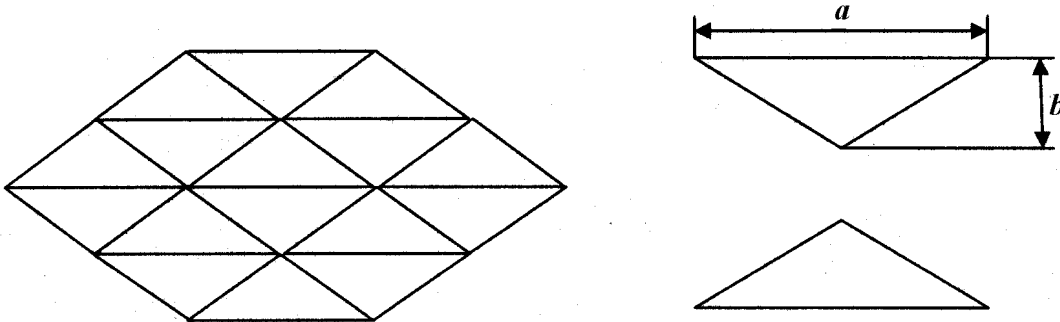


Рис. 4. Треугольная сетка Ω

Точность аппроксимации производных второго порядка в некоторых частных случаях

Оценку погрешности аппроксимации сделаем для функций, разлагающихся в ряд Тейлора

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{\partial^k f(\vec{r}_i)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{(x-x_i)^m (y-y_i)^n}{m! n!} \quad (7)$$

в окрестности каждой ячейки Ω_i .

В качестве Δ_{Ω} будет использоваться оператор

$$\Delta_{\Omega} = \frac{D_{\Omega}^2}{Dx^2} + \frac{D_{\Omega}^2}{Dy^2}, \quad \text{где} \quad \frac{D_{\Omega}^2 f}{Dx^2} = \frac{D_{\omega}}{Dx} \left(\frac{D_{\Omega}}{Dx} \right); \quad \frac{D_{\Omega}^2 f}{Dy^2} = \frac{D_{\omega}}{Dy} \left(\frac{D_{\Omega}}{Dy} \right).$$

Используя (7), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_{\Omega}^2 f}{Dx^2} \right)_i - \frac{\partial^2 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2} &= \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{\partial^k f(\vec{r}_j)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{1}{m! n!} \left(\frac{D_{\Omega}^2}{Dx^2} (x-x_j)^m (y-y_j)^n \right)_i; \\ \left(\frac{D_{\Omega}^2 f}{Dy^2} \right)_i - \frac{\partial^2 f(\vec{r}_i)}{\partial y^2} &= \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{\partial^k f(\vec{r}_j)}{\partial x^m \partial y^n} \frac{1}{m! n!} \left(\frac{D_{\Omega}^2}{Dy^2} (x-x_j)^m (y-y_j)^n \right)_i. \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации на шестиугольной сетке. Рассмотрим сетку Ω , состоящую из равных шестиугольных ячеек (см. рис. 2). Как было показано, оператор Grad_{Ω} аппроксимирует grad с первым порядком точности. Тем не менее из-за того, что производные второго порядка входят в соответствующие невязки для противоположно ориентированных треугольников с разными знаками, будут выполняться равенства

$$\left(\frac{D_{\Omega}^2 f}{Dx^2} \right)_i - \frac{\partial^2 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^4} \frac{a^2}{12} + O(a^4); \quad (8)$$

$$\left(\frac{D_{\Omega}^2 f}{Dy^2} \right)_i - \frac{\partial^2 f(\vec{r}_i)}{\partial y^2} = - \left(\frac{a}{2b} \right)^2 \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^4} \frac{a^2}{16} + \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{a^2}{8} + \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial y^4} \frac{b^2}{12} + \left(\frac{a}{2b} \right)^2 O(a^4) + O(\text{diam}^4(\Omega_i)). \quad (9)$$

То есть оператор $\frac{D_{\Omega}^2}{Dx^2}$ аппроксимирует $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ со вторым порядком точности. А оператор $\frac{D_{\Omega}^2}{Dy^2}$ аппроксимирует $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ со вторым порядком при условии, что $\frac{a}{2b}$ ограничено. Из (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} (\Delta_{\Omega} f)_i - \Delta f(\vec{r}_i) &= \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{2b} \right)^2 \right) \frac{a^2}{4} + \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{a^2}{8} + \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial y^4} \frac{b^2}{12} + \\ &+ O(a^4) + \left(\frac{a}{2b} \right)^2 O(a^4) + O(\text{diam}^4(\Omega_i)). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор Δ_{Ω} аппроксимирует Δ со вторым порядком точности при условии, что $\frac{a}{2b}$ ограничено.

Порядок аппроксимации на параллелограммной сетке. Рассмотрим сетку Ω , состоящую из равных параллелограммных ячеек (см. рис. 3). Для ячеек данной сетки

$$\left(\frac{D_{\Omega}^2 f}{Dx^2} \right)_i - \frac{\partial^2 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^4} \frac{a^2 + 3(b \text{ctg} \alpha)^2}{12} + \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^3 \partial y} \frac{b^2 \text{ctg} \alpha}{2} + \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{b^2}{4} + O(\text{diam}^4(\Omega_i)); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_{\Omega}^2 f}{Dy^2} \right)_i - \frac{\partial^2 f(\vec{r}_i)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial y^4} \frac{b^2}{12} + (a^2 - b^2 \text{ctg}^2 \alpha) \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\text{ctg} \alpha}{6} \frac{\partial^4 f(\vec{r}_i)}{\partial x^3 \partial y} \right) + \\ &+ O(b^4) + (a^2 - b^2 \text{ctg}^2 \alpha) [O(\text{diam}^2(\Omega_i)) + \text{ctg} \alpha O(\text{diam}^2(\Omega_i)) + \text{ctg}^2 \alpha O(\text{diam}^2(\Omega_i))]. \end{aligned} \quad (11)$$

Тем самым оператор $\frac{D_\Omega^2}{Dx^2}$ аппроксимирует $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ со вторым порядком точности. А оператор $\frac{D_\Omega^2}{Dy^2}$ аппроксимирует $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ со вторым порядком при условии, что $\text{ctg}\alpha$ ограничен. Из (10), (11) следует, что оператор Δ_Ω также аппроксимирует Δ со вторым порядком точности при условии ограниченности $\text{ctg}\alpha$.

Аппроксимация и сходимости на сетках общего вида

Для любой непрерывной функции $f = f(x, y)$ на любом ограниченном в R^2 множестве имеет место равномерная сходимость

$$\Pi f \Rightarrow f, \quad \pi f \Rightarrow f \quad \text{при} \quad \text{diam } \Omega \rightarrow 0$$

и тем более сходимость в слабом

$$\langle \Pi f, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \quad \langle \pi f, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle,$$

где $\varphi = \varphi(x, y)$ — произвольная основная функция. Отсюда и из непрерывности операции обобщенного дифференцирования следует, что

$$\langle \text{grad } \Pi f, \varphi \rangle \rightarrow \langle \text{grad } f, \varphi \rangle, \quad \langle \text{grad } \pi f, \varphi \rangle \rightarrow \langle \text{grad } f, \varphi \rangle \quad \text{при} \quad \text{diam } \Omega \rightarrow 0$$

для любой основной функции φ . Можно было бы ожидать, что $\text{Grad}_\Omega f$ и $\text{Grad}_\omega f$ также слабо сходятся к $\text{grad } f$. Это, например, имеет место для шестиугольной сетки Ω (с вспомогательной треугольной сеткой ω), рассмотренной выше. При этом сходимость имеет место при $\text{diam } \Omega \rightarrow 0$ без каких-либо ограничений на величину $\frac{a}{b}$. Однако можно показать, что в общем случае слабая сходимость $\text{Grad}_\Omega f$ и $\text{Grad}_\omega f$ к $\text{grad } f$ при $\text{diam } \Omega \rightarrow 0$ отсутствует. Верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если Grad_ω аппроксимирует grad в норме L_p ($0 \leq p \leq \infty$), то Grad_Ω аппроксимирует grad в слабом.*

Доказательство. Из неравенства Гельдера

$$|\langle \text{Grad}_\Omega f - \text{grad } f, \varphi \rangle| = |\langle f, \text{Grad}_\omega \varphi - \text{grad } \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L_q} \|\text{Grad}_\omega \varphi - \text{grad } \varphi\|_{L_p},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Теорема 2. *Если Grad_Ω аппроксимирует grad в норме L_2 , то Δ_Ω аппроксимирует Δ в слабом.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} \langle \text{Div}_\omega \text{Grad}_\Omega f - \text{div } \text{grad } f, \varphi \rangle &= \langle \text{grad } f - \text{Grad}_\Omega f, \text{grad } \varphi \rangle + \langle \text{grad } \varphi - \text{Grad}_\Omega \varphi, \text{Grad}_\Omega f \rangle \leq \\ &\leq \|\text{grad } f - \text{Grad}_\Omega f\|_{L_2} \|\text{grad } \varphi\|_{L_2} + \|\text{grad } \varphi - \text{Grad}_\Omega \varphi\|_{L_2} \|\text{Grad}_\Omega f\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Если Grad_Ω аппроксимирует grad в слабом и Δ_Ω аппроксимирует Δ в слабом, то на функциях из C_0^∞ оператор Grad_Ω аппроксимирует grad в норме L_2 .*

Доказательство. Так как $f \in C_0^\infty$, то $\|\text{grad } f\|_{L_2}^2 - \|\text{Grad}_\Omega f\|_{L_2}^2 = \langle \text{Div}_\omega \text{Grad}_\Omega f - \text{div } \text{grad } f, f \rangle \rightarrow 0$. Но так как Grad_Ω аппроксимирует grad в слабом, то из $\|\text{Grad}_\Omega f\|_{L_2}^2 \rightarrow \|\text{grad } f\|_{L_2}^2$ следует, что $\|\text{Grad}_\Omega f - \text{grad } f\|_{L_2} \rightarrow 0$.

То есть для аппроксимации Δ в слабом на функциях из C_0^∞ необходимо и достаточно, чтобы Grad_Ω аппроксимировал grad в норме L_2 .

Модифицированный дифференциально-проекторный способ построения разностных операторов

Предположим, что счетная область $D \subset R^2$ покрыта исходной счетной сеткой $\Omega = \{\Omega_i : i \in I\}$. Как и ранее, наряду с исходной сеткой Ω рассмотрим вспомогательную узловую сетку $\omega = \{\omega_j : j \in J\}$, способ построения которой описан выше. Обозначим через $\omega_j^{i_1 i_2}$ часть узловой ячейки ω_j , лежащую только в ячейках Ω_{i_1} и Ω_{i_2} . Способ построения подобластей $\omega_j^{i_1 i_2}$ показан на рис. 5. Разбиение исходной области D на подобласти $\omega_j^{i_1 i_2}$ обозначим через ω' . То есть

$$\omega' = \left\{ \omega_j^{i_1 i_2} : j \in J, i_1 \in I, i_2 \in I \right\}.$$

С каждой областью $\omega_j^{i_1 i_2}$ свяжем вектор

$$\vec{\omega}_j^{i_1 i_2} = \int_j^{C^{i_1 i_2}} \vec{n} dl,$$

получающийся интегрированием нормали (направленной из ячейки Ω_{i_1} в ячейку Ω_{i_2}) по части ребра, разделяющего ячейки Ω_{i_1} и Ω_{i_2} .

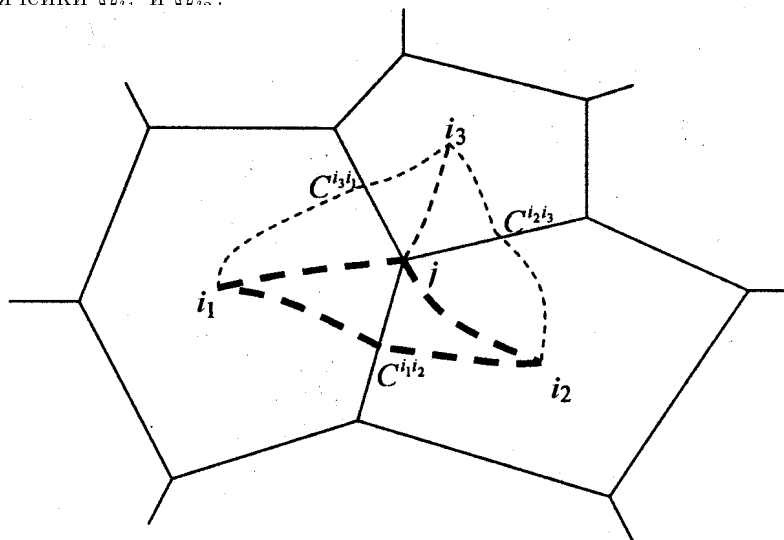


Рис. 5. Подобласть $\omega_j^{i_1 i_2}$ узловой ячейки ω_j

Аппроксимация производных первого порядка. Предполагается, что искомая функция является кусочно-постоянной на сетке Ω и принадлежит образу проектора Π :

$$\Pi : u \rightarrow \Pi u = \sum_{i \in I} \frac{\langle u, \chi(\Omega_i) \rangle}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i),$$

а разностный градиент является кусочно-постоянной вектор-функцией на разбиении ω' и принадлежит образу оператора Grad_Ω :

$$\text{Grad}_\Omega : u \rightarrow \pi \text{grad } \Pi u,$$

где grad — дифференциальный оператор в пространстве обобщенных функций; π — линейный оператор, переводящий обобщенные функции, сосредоточенные на ребрах исходной сетки, в кусочно-постоянные на ω' функции.

Обозначим через $\omega_j'' = \left\{ \omega_j^k : k \in K_j \right\}$ множество подобластей узловой ячейки ω_j , составленных из областей разбиения ω' , и определим форму оператора π следующим образом:

Определение 3.

$$\pi : \vec{u} \rightarrow \pi \vec{u} = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} A_j^k \langle \vec{u}, \chi(\omega_j^k) \rangle \chi(\omega_j^k), \quad (12)$$

где A_j^k — произвольные симметричные положительно определенные матрицы размерности 2×2 .

Замечание 2. Для узловой ячейки ω_j , изображенной на рис. 5, $\omega_j'' = \{\omega_j^k : k \in K_j\} = \{\omega_j^{i_1 i_2}, \omega_j^{i_2 i_3}, \omega_j^{i_3 i_1}, \omega_j^{i_1 i_2} \cup \omega_j^{i_2 i_3}, \omega_j^{i_2 i_3} \cup \omega_j^{i_3 i_1}, \omega_j^{i_3 i_1} \cup \omega_j^{i_1 i_2}, \omega_j^{i_1 i_2} \cup \omega_j^{i_2 i_3} \cup \omega_j^{i_3 i_1}\}$.

Рассмотрим некоторые свойства оператора π .

Предложение 1. Пусть $K = \sum_{j \in J} K_j \chi(\omega_j)$ — кусочно-постоянная на узловых ячейках функция.

Тогда функция K и оператор π коммутируют. То есть

$$K \pi \vec{u} = \pi K \vec{u}.$$

Предложение 2. Оператор π — симметричный. То есть

$$\int_{R^2} (\pi \vec{u}, \vec{v}) \, dx dy = \int_{R^2} (\vec{u}, \pi \vec{v}) \, dx dy.$$

Предложение 3. Оператор π — неотрицательно определенный. То есть

$$\int_{R^2} (\pi \vec{u}, \vec{u}) \, dx dy \geq 0.$$

В дальнейшем для простоты будем писать $i_1 i_2 \in k$, если $\omega_j^{i_1 i_2} \subset \omega_j^k$.

Предложение 4. $\pi \vec{u} = \sum_{\omega'} (\pi \vec{u})_j^{i_1 i_2} \chi(\omega_j^{i_1 i_2})$,

$$\text{где } (\pi \vec{u})_j^{i_1 i_2} = \sum_{i'_1 i'_2} A_{j, i'_1 i'_2} \langle \vec{u}, \chi(\omega_j^{i'_1 i'_2}) \rangle, \quad A_{j, i'_1 i'_2} = \sum_{k \in K_j, i'_1 i'_2 \in k, i_1 i_2 \in k} A_j^k.$$

Можно показать, что для того чтобы приближение дифференциального оператора $\text{grad} u \approx \sum_{\Omega_{i_p} \cap \omega_j^k \neq \emptyset} u_{i_p} \vec{\delta}_{i_p}$ на подобласти $\omega_i^k \subset \omega_j$ давало симметричный вклад в разностную матри-

цу оператора $\text{Div}_{\omega'} \text{Grad}_{\Omega} u$, это приближение должно равняться $\text{grad} u \approx -A \langle \text{grad} \Pi u, \chi(\omega_j^k) \rangle$, где A — некоторая симметричная матрица. После учета всех $\omega_j^k \in \omega_j''$ приходим к формуле (12) с симметричными матрицами A_j^k . Требование положительной определенности матриц A_j^k обеспечивает неотрицательную определенность разностной матрицы оператора $L = -\text{Div}_{\omega'} \text{Grad}_{\Omega}$.

Аппроксимация оператора диффузии

Аппроксимация дифференциального оператора второго порядка

$$\Lambda(u) = -\text{div} k \text{grad} u \quad (13)$$

осуществляется следующим образом:

1) функция u заменяется кусочно-постоянной функцией $U = \Pi u = \sum_{i \in I} U_i \chi(\Omega_i)$;

- 2) производные $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ заменяются разностными производными $\frac{D_\Omega U}{Dx_\alpha} = (\pi \operatorname{grad} U)_\alpha$;
- 3) коэффициент диффузии k заменяется кусочно-постоянной функцией $K = \sum_{j \in J} K_j \chi(\omega_j)$, где K_j получаются при помощи полугармонического усреднения k в узлы счетной сетки;
- 4) дифференциальный оператор div заменяется разностным $\operatorname{Div} = \Pi \operatorname{div}$.

В результате получается разностный оператор второго порядка

$$L(U) = -\Pi \operatorname{div} K \pi \operatorname{grad} U = -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega U,$$

аппроксимирующий дифференциальный оператор (13).

Используя предложения 1–3, докажем следующие утверждения:

Предложение 5. *Разностный оператор $L = -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega$ является симметричным оператором. То есть*

$$\langle -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega u, v \rangle = \langle u, -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega v \rangle.$$

Доказательство. $\langle -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega u, v \rangle = \langle -\operatorname{div} K \pi \operatorname{grad} \Pi u, \Pi v \rangle = \int_{R^3} (K \pi \operatorname{grad} \Pi u, \operatorname{grad} \Pi v) dV =$

$$= \int_{R^3} (\operatorname{grad} \Pi u, \pi K \operatorname{grad} \Pi v) dV = \int_{R^3} (\operatorname{grad} \Pi u, K \pi \operatorname{grad} \Pi v) dV = - \langle \Pi u, \operatorname{div} K \pi \operatorname{grad} \Pi v \rangle = \langle u, -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega v \rangle.$$

Здесь использовались предложения 1 и 2.

Предложение 6. *Разностный оператор $L = -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega$ является неотрицательно определенным оператором. То есть*

$$\langle -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega u, u \rangle \geq 0.$$

Доказательство. $\langle -\operatorname{Div}_{\omega'} K \operatorname{Grad}_\Omega u, u \rangle = \langle -\operatorname{div} K \pi \operatorname{grad} \Pi u, \Pi u \rangle = \int_{R^3} (K \pi \operatorname{grad} \Pi u, \operatorname{grad} \Pi u) dV =$

$$= \int_{R^3} (\pi \sqrt{K} \operatorname{grad} \Pi u, \sqrt{K} \operatorname{grad} \Pi u) dV \geq 0.$$

Здесь использовались предложения 1 и 3.

Отметим, что первоначальная разностная схема является частным случаем модифицированной с линейным оператором

$$\pi : \vec{u} \rightarrow \pi \vec{u} = \sum_{j \in J} \frac{1}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \langle \vec{u}, \chi(\omega_j) \rangle \chi(\omega_j).$$

То есть для всех подобластей $\omega_j^k \in \omega_j''$, не совпадающих с ω_j , матрицы A_j^k являются нулевыми. Для

подобласти ω_j^k , совпадающей с ω_j , матрица A_j^k является диагональной и равняется $\frac{1}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тестовые расчеты

Тест 1. О сходимости. Рассмотрим двумерное эллиптическое уравнение

$$c(u - u_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (14)$$

где $c = \frac{4n \left(\frac{n}{m^2} - 1 \right)}{a^2 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)^2}$; $u_0(x, y) = (a^2 - r^2)^{n-2} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4n}{c} (a^2 - nr^2) \right]$.

Решением данного уравнения является функция $u(x, y) = (a^2 - r^2)^n$.

Если взять $n = 3$, $m = 1,5$, то $c = \frac{324}{25a^2} \approx \frac{12,96}{a^2}$.

На рис. 6 изображены функции $u_0 = u_0(x, y)$ и $u = u(x, y)$ для $a = 1$.

Решение уравнения (14) $u = u(x, y)$ можно интерпретировать как решение уравнения теплопроводности с начальным распределением температуры $u_0 = u_0(x, y)$ в конце одного единичного шага по времени. Особенностью данной задачи является то, что вне круга радиусом $r = a$ решение равно нулю. Поэтому полностью отсутствует влияние граничных условий, которые, естественно, должны быть вынесены за данный круг.

Задача решалась на нескольких подобных неравномерных сетках, ячейками которых являлись шестиугольники, изображенные на рис. 7.

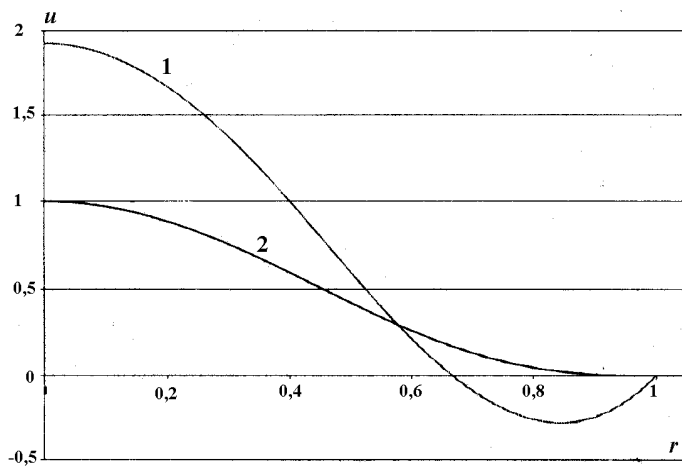


Рис. 6. Графики функций: 1 — $u_0 = u_0(x, y)$; 2 — $u = u(x, y)$

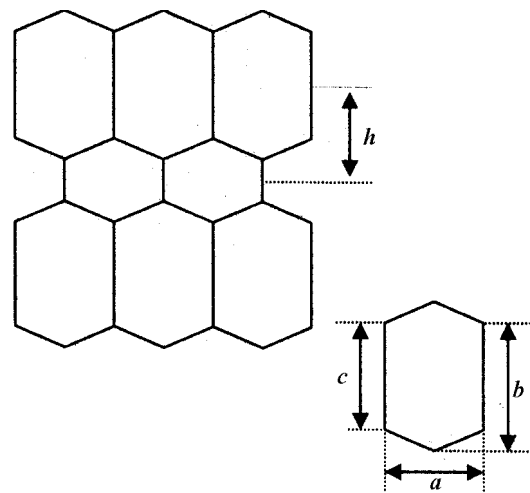


Рис. 7. Неравномерная шестиугольная сетка

Задача считалась по начальной и модифицированной схемам. Для первоначальной схемы есть аппроксимация в слабом первых производных, но нет аппроксимации в норме L_2 . Поэтому нет и сходимости при измельчении ячеек сетки. В модифицированной схеме ненулевыми в определении 3 брались следующие матрицы: для 1-го семейства узлов $A_j^{1,2,3} = \frac{1}{|\omega_j|} \begin{pmatrix} \frac{h+b_1}{2b_1} & 0 \\ 0 & \frac{h+b_1}{2h} \end{pmatrix}$,

для 2-го — $A_j^{1,2,3} = \frac{1}{|\omega_j|} \begin{pmatrix} \frac{h+b_2}{2b_2} & 0 \\ 0 & \frac{h+b_2}{2h} \end{pmatrix}$. В результате наблюдается сходимость к аналитическому решению. На рис. 8, 9 изображены решения для $N = 2626$ и поведение максимальной погрешности как функции от обратной величины числа ячеек.

Тест 2. Об анизотропии коэффициентов проводимости и точечном источнике. В модифицированной схеме для регулярных сеток матрицы параметров A_j^k оператора π выбираются следующим образом. Для каждой ячейки Ω_{i_p} , прилегающей к узлу с номером j , для подобласти

$\omega_j^k = \omega_j^{i_{p+1}i_p} \cup \omega_j^{i_p i_{p-1}}$ задается матрица $A_j^k = \frac{0,5(1-\alpha)}{\langle 1, \chi(\omega_j^k) \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Кроме того, для подобра-

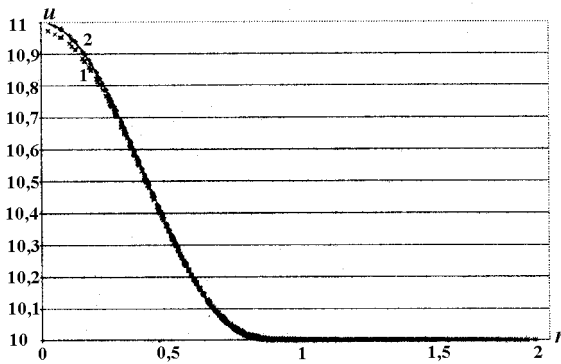


Рис. 8. Тест 1. Решение для $N = 2626$: 1 — по начальной схеме; 2 — по модифицированной схеме; * — численное решение; — — точное решение

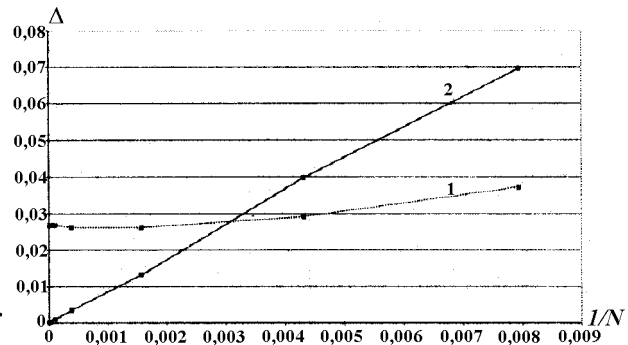


Рис. 9. Тест 1. Поведение максимальной погрешности решения при измельчении счетной неравномерной сетки: 1 — начальная схема; 2 — модифицированная схема

сти ω_j^k , совпадающей с ω_j , задается матрица $A_j^k = \frac{\alpha}{\langle 1, \chi(\omega_j) \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Параметр α выбирается превышающим $1/2$. Данная схема также имеет второй порядок точности.

Схема была обобщена на трехмерный случай и легла в основу создания трехмерной методики НИМФА [7, 8] для расчета перемещения примесей подземными водами. По этой схеме производится расчет фильтрации подземных вод и процесс дисперсии загрязнений в транспортном уравнении. Для процессов фильтрации и дисперсии проводящие свойства среды могут сильно зависеть от направления. Более того, направления главных осей тензора проводимости могут меняться от точки к точке. Поэтому матрица проводимости в исходной системе координат в общем случае будет полностью заполнена, а это означает, что дифференциальная задача содержит смешанные производные. Чтобы посмотреть, как ведет себя численное решение в этом случае, была рассчитана стационарная задача фильтрации с одной равномерно распределенной по глубине скважиной. В этой задаче главные оси тензора проводимости повернуты на 45° относительно осей координат. Коэффициенты фильтрации вдоль главных осей отличаются между собой в 2 раза.

Из рис. 10, 11, изображающих изолинии и погрешность решения, видно, что численное решение правильно отражает характер аналитического решения. Видно, что заметные отличия наблюдаются только в окрестности скважины.

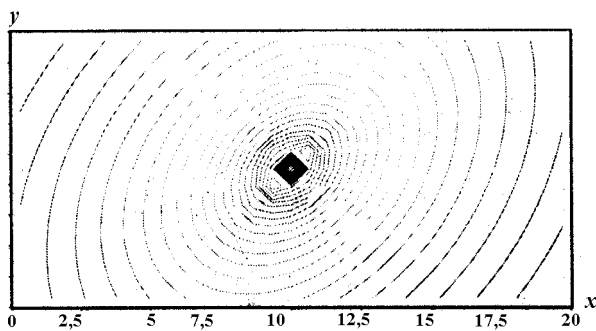


Рис. 10. Тест 2. Распределение изолиний напора в анизотропной среде

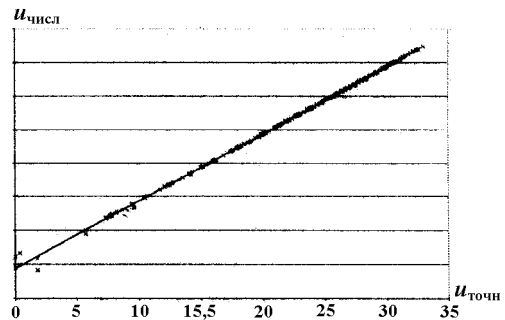


Рис. 11. Тест 2. Сравнение численного и аналитического решений: * — численное решение; — — аналитическое решение

Заключение

Приведен способ построения разностных схем, основанный на двух операциях — обобщенном дифференцировании и проектировании на класс кусочно-постоянных функций. Дается анализ точности аппроксимации дифференциальных операторов для нескольких видов равномерных сеток. Рассмотрены вопросы точности аппроксимации на произвольных нерегулярных сетках. Приведен критерий наличия аппроксимации первых производных в смысле слабой сходимости. Показано, что для уравнения диффузии точность аппроксимации первых производных на вспомогательной узловой сетке должна быть не ниже чем в норме пространства L_2 . Приводится пример, когда есть аппроксимация первых производных в слабом, но нет аппроксимации в норме пространства L_2 и в результате численное решение не сходится к аналитическому при измельчении ячеек сетки.

Для улучшения свойств получаемых схем сделана модификация первоначального способа. В модифицированном способе вводится дополнительная сетка и один из проекторов заменен линейным оператором. При этом разностная аппроксимация первых производных зависит от набора параметров, подбирая значения которых для каждого сеточного узла в отдельности можно получить удовлетворительную аппроксимацию в целом. Приведенные примеры подтверждают этот вывод.

Список литературы

1. Софронов И. Д. О численном решении уравнения теплопроводности на неортогональной сетке // Тез. кратких науч. сообщений 14 межд. конгресса математиков. М., 1966.
2. Sofronov I. D., Rasskazova V. V., Nesterenko L. V. The use of nonregular nest for solving two-dimension nonstationary problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. by N. N. Janenko and Yu. I. Shokin. M.: Mir Publisher, 1984.
3. Софронов И. Д., Урм В. Я. О решении уравнений акустики и теплопроводности методом конечных разностей на нерегулярных сетках // Комплексы программ математической физики. Новосибирск, 1972.
4. Мельцас В. Ю. О некоторых схемах для решения уравнения теплопроводности на ячейках Дирихле // Числ. методы мех. спл. среды. 1977. Т. 8, № 4.
5. Панов А. И., Рассказова В. В. Об одном методе решения уравнения лучистой теплопроводности на нерегулярных сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 1(15).
6. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск, 1996.
7. Gorev V. V., Deryugin Yu. N., Panov A. I., Chekalin A. N., Savelyev A. A. Triada technique for impurity transport by underground waters // Abstracts of Int. Conf. "Environmental Mathematical Modeling and Numerical Analysis". Rostov-on-Don, May 24—31, 1999.
8. Gorev V. V., Deryugin Yu. N., Panov A. I., Tikhomirov B. P. Numerical solution of 3D problems of contaminant transport by ground water // Abstracts of Int. Conf. "Modern Approaches to Flows in Porous Media". Moscow, September 6—8, 1999.