

УДК 519.6

## АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ПРИМЕНЕНИЕМ ДРОБНЫХ СЕТОК В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р. М. Шагалиев  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Предлагается подход к аппроксимации многомерного уравнения переноса с введением адаптивно встраиваемых дробных сеток в фазовом пространстве. Адаптивный метод сформулирован для общего случая применения произвольных неортогональных пространственных сеток. В двумерных задачах это регулярные неортогональные четырехугольные сетки и нерегулярные сетки из выпуклых многоугольников. Сформулированы математические положения адаптивного метода дробных сеток. С учетом того, что при построении метода наиболее сложным является вопрос аппроксимации уравнения переноса в фазовом пространстве на дробных сетках по угловым переменным, дается подробный вывод алгоритмов и разностных уравнений адаптивного метода для этого случая.

### Введение

В настоящее время имеет место значительное расширение классов решаемых прикладных многомерных задач переноса частиц (нейтронов, фотонов, электронов и т. п.) и переноса энергии частицами, усложняются постановки указанных краевых задач и повышаются требования к точности расчетов. Актуальными являются вопросы более детального и точного описания решения в фазовом пространстве, создания численных методов, обеспечивающих вычисление результата с заданной точностью и т. п. Решение многих из указанных задач невозможно без применения современных высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем.

При конструировании численных методов, удовлетворяющих указанным требованиям, необходимо учитывать ряд специфических особенностей решаемых прикладных задач переноса. Отметим основные из них.

Как известно, задачи переноса являются существенно многомерными: их решение в пространственно-двумерном случае зависит от шести переменных (две пространственные, две угловые, энергетическая и временная), а в пространственно-трехмерном случае — от семи переменных (добавляется еще одна пространственная).

Далее, для постановок многих прикладных задач переноса характерны наличие физических подобластей со значительно отличающимися оптическими свойствами, существенная нелинейность, существенно разный характер поведения решения по угловым, энергетической и пространственным переменным в разных подобластях. В частности, часто в рассчитываемых системах содержатся как подобласти с существенно анизотропным распределением потока частиц по направлениям, так и подобласти, где распределение имеет *почти изотропный* характер; содержатся подобласти, где распределение потоков по спектру (энергии) является существенно неравновесным, и подобласти с *почти равновесным* распределением. Поток как функция пространственных переменных характеризуется значительными локальными изменениями.

Наконец, очень важно отметить, что в нестационарных задачах свойства указанных подобластей претерпевают значительные изменения во времени.

Потребности в расширении классов решаемых задач, особенности постановок прикладных задач переноса, сложный характер распределения решения предъявляют очень жесткие требования к используемым численным методам. Для того чтобы удовлетворить этим требованиям, необходимо пересмотр и развитие ряда положений и подходов, традиционно используемых при численном решении двумерных и трехмерных задач переноса.

В настоящее время традиционным для разностных методов решения задач переноса является однородный подход, когда область решения задачи покрывается сеткой с фиксированным числом ячеек в фазовом пространстве. В частности, разностная сетка фазового пространства содержит одно и то же количество энергетических групп во всех пространственных точках. Эта сетка в фазовом пространстве либо вообще не изменяется, либо претерпевает эпизодические изменения в процессе расчета временных шагов. Достоинством численных методов и комплексов программ, основанных на однородном подходе, является их относительная простота, в том числе при реализации в параллельном режиме. Вместе с тем при таком подходе отсутствует возможность динамической гибкой адаптации сетки к особенностям поведения решения на данном временном шаге в данной подобласти задачи, что часто приводит к неоправданно весьма высоким вычислительным затратам. При использовании однородного подхода в ряде случаев очень трудно, а иногда и невозможно обеспечить требуемую детализацию и приемлемые сроки расчета важных прикладных задач.

Некоторым усовершенствованием такого подхода является итерационный метод решения уравнения переноса по областям [1], в котором используется разное число строк и столбцов регулярной пространственной сетки, разное число энергетических групп и интервалов угловой сетки в разных математических (счетных) областях. Сетки областей в процессе всего расчета являются либо фиксированными, либо претерпевают эпизодические изменения.

Другим способом повышения эффективности счета представляется комбинированный подход к численному решению уравнения переноса, когда в разных подобластях задачи используются различные математические модели и численные методы (конечно-разностные, конечно-элементные, Монте-Карло, методы, использующие запись уравнения переноса в различных формах: интегродифференциальной, самосопряженной, интегральной и др.). Каждый из методов имеет свою область наиболее эффективного применения. Это создает определенные предпосылки для существенного повышения экономичности расчетов. Вместе с тем для обеспечения высокой эффективности счета по комбинированным методам требуется построение алгоритмов сшивки отмеченных выше численных методов на границах подобластей фазового пространства. Методические вопросы по построению таких алгоритмов сшивки развиты в настоящее время очень слабо, что делает задачу разработки и практического применения комбинированных методов проблематичной.

В данной работе предлагается численный метод, основанный на использовании адаптивных дробных сеток в фазовом пространстве для аппроксимации многомерных задач переноса.

Метод излагается применительно к случаю решения двумерного нестационарного уравнения переноса, записанного в цилиндрической системе координат, и допускает очевидные обобщения на трехмерный случай и записи уравнения переноса в других системах координат.

Отметим некоторые свойства предлагаемого метода. Во-первых, аппроксимация уравнения переноса на адаптивных дробных сетках строится отдельно по пространственным переменным, по угловым переменным и по энергетической переменной. Во-вторых, метод использует неортогональные пространственные сетки. В двумерных задачах это регулярные неортогональные четырехугольные сетки и нерегулярные сетки из выпуклых многоугольников. Сложность построения адаптивного метода на неортогональных дробных сетках обусловлена тем, что в большинстве традиционных методов аппроксимации используются те или иные модификации алгоритма *бегущего счета* [2] для численного решения систем сеточных уравнений переноса. Обобщение такого подхода на случай адаптивных дробных сеток не является очевидным.

Адаптивный метод дробных сеток предоставляет возможность устранения характерной для однородных подходов избыточной вычислительной работы, объем которой в расчетах многих классов прикладных задач во много раз превышает объем реально требуемых вычислений.

Вместе с тем при применении адаптивного метода дробных сеток объем вычислений в разных ячейках опорной сетки является существенно разным, что необходимо учитывать при развитии

алгоритмов распараллеливания, в частности алгоритмов [3, 4], для решения задач переноса на многопроцессорных ЭВМ.

В работе сформулированы основные математические положения адаптивного метода. Дан подробный вывод адаптивной схемы, аппроксимирующей уравнение переноса по угловым переменным.

## 1. Постановка двумерной многогрупповой задачи

В двумерной осесимметричной геометрии решается нестационарное спектральное уравнение переноса, записанное в многогрупповом приближении в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{v_i} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{1 - \mu^2} r \cos \varphi N_i \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi N_i \right) + \alpha_i N_i = F_i, \quad (1)$$

$$F_i = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=1}^{i_1} \beta_{ij} n_j^{(0)} + Q_i \right), \quad (2)$$

$$n_i^{(0)} = \int_{-1}^1 \int_0^\pi N_i d\varphi d\mu, \quad (3)$$

где  $i$  — номер энергетической группы ( $i = \overline{1, i_1}$ );  $t$  — переменная времени;  $r, z$  — пространственные координаты;  $\mu, \varphi$  — координаты в локальной цилиндрической системе вектора  $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ , определяющего направление полета частицы;  $N_i = N_i(r, z, \mu, \varphi, v_i, t)$  — функция потока частиц в точке  $(r, z)$  в момент времени  $t$  в направлении  $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ , отвечающая группе с номером  $i$ ;  $v_i = v_i(r, z)$  — средняя скорость частиц группы  $i$ ;  $\alpha_i = \alpha_i(r, z)$  — полное (транспортное) сечение в группе  $i$ ;  $\beta_{ij} = \beta_{ij}(r, z)$  — коэффициент матрицы перехода частиц из группы  $j$  в группу  $i$  при взаимодействии частиц со средой;  $Q_i = Q_i(r, z)$  — независимый источник частиц в группе  $i$ .

Уравнения (1)–(3) следует дополнить начальными и краевыми условиями, которые задаются обычным образом и вид которых для дальнейшего изложения не является существенным.

В частном случае одногруппового приближения уравнения (1)–(3) принимают вид

$$\frac{1}{v} \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{1 - \mu^2} r \cos \varphi N \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi N \right) + \alpha N = F,$$

$$F = \frac{\beta}{2\pi} n^{(0)} + \frac{Q}{2\pi},$$

$$n^{(0)} = \int_{-1}^1 \int_0^\pi N d\varphi d\mu.$$

Приведенные постановки соответствуют двумерному линейному случаю. Постановки задач в более общих случаях (пространственно-трехмерной многогрупповой линейной, нелинейной многогрупповой) приведены, например, в [1].

## 2. Основные положения адаптивного метода

1. Для построения адаптивного метода (АМ-метода) введем два вида разностных сеток в фазовом пространстве, определяемом пространственными, угловыми и энергетическими переменными.

Один вид сетки — это опорная сетка. Опорная сетка является основной сеткой, на которой осуществляется численный расчет всех физических процессов на всех временных шагах. Опорная сетка по пространственным переменным может иметь как регулярную (матричную), так и произвольную нерегулярную структуру. Она задается на стадии расчета начальных данных. В процессе решения задачи структура опорной сетки (количество содержащихся в ней математических областей, количество ячеек и т. п.) автоматически не изменяется.

Второй вид сетки — это адаптивная дробная сетка. Адаптивная дробная сетка, или, кратко, просто адаптивная сетка получается в результате дробления отдельных ячеек или отдельных подмножеств ячеек опорной сетки фазового пространства на более мелкие ячейки.

При использовании излагаемого АМ-метода дробление осуществляется строго внутри ячеек опорной сетки, т. е. ни по одной из переменных, описывающих решение в фазовом пространстве, не допускается, чтобы более мелкие ячейки АМ-метода были образованы частично из точек одной ячейки, а частично — из точек другой ячейки опорной сетки. Опорная и адаптивная сетки по пространственным переменным предполагаются произвольными неортогональными. А именно, это либо регулярные неортогональные четырехугольные сетки, либо нерегулярные сетки из произвольных выпуклых многоугольников.

2. Построение адаптивной сетки и аппроксимация на ней уравнения переноса осуществляются с использованием алгоритмов, критериев и сеточных методов, которые строятся отдельно по пространственным переменным, по угловым переменным и по энергетической переменной. С учетом сказанного АМ-метод численного решения уравнения переноса включает в себя:

- метод построения адаптивной пространственной сетки и аппроксимации на ней уравнения переноса — АМ-S-метод;
- метод построения адаптивной сетки по угловым переменным и аппроксимации на ней уравнения переноса — АМ-A-метод;
- метод построения адаптивной сетки по переменной энергии и многогрупповой аппроксимации на ней уравнения переноса — АМ-E-метод.

В расчетах конкретных задач допускается использование АМ-метода с учетом особенности постановки в различных вариантах: для аппроксимации только по пространственным переменным (используется только АМ-S-метод), только по угловым переменным (используется только АМ-A-метод), только по энергетической переменной (используется только АМ-E-метод), по произвольной комбинации АМ-S-, АМ-A- и АМ-E-методов.

3. Адаптивная сетка является сеткой, которая перестраивается в процессе расчета задачи. При этом допускается как дробление адаптивной сетки, так и ее укрупнение (до размеров ячеек опорной сетки). Допускается дробление на разное число ячеек адаптивной сетки разных ячеек опорной сетки фазового пространства.

При решении нестационарных задач перестройка адаптивной сетки осуществляется, как правило, на временных шагах. В стационарных задачах, а также при решении некоторых классов нестационарных задач перестройка адаптивной сетки реализуется на внешних итерациях по источнику.

4. Перестройка адаптивной сетки в процессе расчета задачи осуществляется с использованием особых критериев и алгоритмов, обеспечивающих адаптацию разностной сетки под особенности поведения решения задачи переноса в данной подобласти фазового пространства в данный момент времени. Перестройка (дробление и укрупнение ячеек адаптивной сетки фазового пространства) осуществляется отдельно по ячейкам пространственной сетки, по интервалам угловой сетки и энергетической сетки. На первом этапе реализации АМ-метода для простоты и экономичности вычислительных алгоритмов дробление осуществляется равномерным образом.

5. Используются специальные алгоритмы и критерии для выбора множества ячеек опорной сетки, где возможно использование АМ-метода. В дальнейшем для краткости это множество будем называть АМ-множеством. Как правило, это алгоритмы поэтапного задания и корректировки в процессе счета АМ-множества.

Отметим один подход к выбору такого множества:

- 5.1. На начальном этапе (подготовки расчета или подключения АМ-метода) АМ-множество формируется на основе известной информации об особенностях рассчитываемой задачи, таких как наличие подобластей с ожидаемыми существенными изменениями поведения решения в процессе расчета (тепловые волны, значительная анизотропия в угловом распределении, перераспределение потока по энергетической переменной и т. п.), наличие оптически плотных пограничных

слоев, примыкающих к оптически прозрачным каналам, в которых происходит поглощение и изменение энергетического спектра распространяющегося по каналу излучения, и др.

5.2. На этапах расчета временных шагов (внешних итерациях) осуществляется коррекция АМ-множества, соответствующего предыдущему шагу (внешним итерациям), с использованием некоторого набора алгоритмов анализа дробных адаптивных сеток, а именно:

- анализа в точках опорной сетки производных по пространственным переменным, по угловым переменным, по энергии с целью дробления тех пространственных точек и тех интервалов по угловым и энергетической переменным, где численное решение претерпевает изменения, превышающие некоторые заданные значения;
- анализа длин свободных пробегов в ячейках опорной пространственной сетки оптически плотной подобласти, примыкающих к оптически прозрачной, с целью дробления этих ячеек с использованием соответствующих критериев и алгоритмов;
- анализа и при необходимости дробления ячеек в зонах тепловых волн и волн сжатия в расчетах задач переноса излучения в движущейся среде.

Возможно использование других алгоритмов анализа, круг которых будет расширяться по мере накопления опыта расчетов с использованием АМ-метода и расширения классов решаемых задач. Эти алгоритмы и критерии должны обеспечивать на новом временном шаге возможность как дальнейшего дробления, так и укрупнения ячеек АМ-множества, исключения из АМ-множества тех ячеек, которые в результате укрупнения превратились в ячейки опорной сетки, и т. п. Далее, должна быть предусмотрена возможность анализа ячеек опорной сетки, соседних с ячейками — элементами данного АМ-множества, с последующим дополнением АМ-множества теми ячейками, в которых удовлетворяются критерии дробления. Из сказанного следует, что этап коррекции АМ-множества является итерационным.

6. Аппроксимация уравнения переноса на адаптивных дробных сетках по АМ-методу строится на основе разностной схемы, используемой на опорной сетке. При этом предполагается, что разностная схема, используемая для аппроксимации уравнения переноса на опорной сетке, обладает двумя важными свойствами. Во-первых, данная схема должна аппроксимировать уравнение переноса в рамках одной ячейки фазового пространства и, как следствие, допускать возможность численного решения системы сеточных уравнений переноса с известной правой частью прямым методом бегущего счета [2] или его обобщением для решения спектральных задач [5]. Классическими схемами, обладающими данным свойством, являются схемы типа  $DS_n$ -метода (см., например, [1, 5–7]). Во-вторых, аппроксимация уравнения переноса на адаптивной сетке осуществляется, как отмечалось выше, отдельно по разным типам переменных.

Обобщение разностной схемы по пространственным переменным, применяемой на опорной сетке, для пространственной аппроксимации уравнения переноса на адаптивных дробных сетках принципиальных вопросов не вызывает и поэтому в данной работе не излагается.

Аппроксимация уравнения переноса по угловым переменным на адаптивной дробной сетке (АМ-А-схема) будет построена в следующем разделе.

При аппроксимации и численном решении уравнения переноса на адаптивных дробных сетках по энергетической переменной в различных классах задач (переноса нейтронов, нелинейного переноса рентгеновского излучения и др.) возникают некоторые специфические особенности, которые будут опубликованы отдельно.

7. Как отмечалось выше, в данной работе на опорной сетке рассматриваются сеточные методы, допускающие решение системы сеточных уравнений переноса с заданной правой частью экономичным прямым алгоритмом бегущего счета [2] и его обобщением [5] для решения спектральных задач переноса рентгеновского излучения. В случае применения адаптивных дробных сеток по угловым и энергетической переменным возможность использования указанных алгоритмов, вообще говоря, теряется.

Важным свойством построенного в следующем разделе метода аппроксимации уравнения переноса на адаптивных дробных сетках по угловым переменным является то, что он обеспечивает возможность применения для численного решения сеточных уравнений алгоритма бегущего счета.

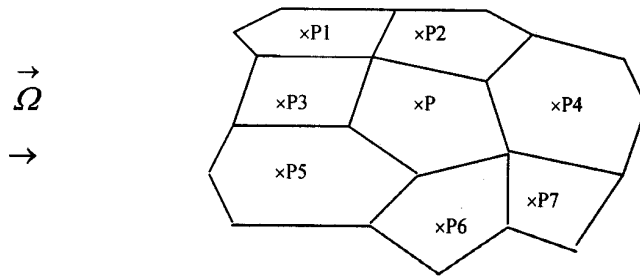
### 3. Адаптивная АМ-А-схема для аппроксимации многомерного уравнения переноса по угловым переменным

В данном разделе для простоты изложения, а также учитывая, что это не имеет принципиального значения, будем использовать одногрупповую стационарную постановку задачи переноса.

**3.1. Основные положения АМ-А-схемы.** Покроем область решения задачи в общем случае неортогональной пространственной сеткой, образованной из произвольных выпуклых многоугольников. В частном случае, когда область покрыта выпуклыми четырехугольниками, сетка имеет регулярную (т. е. матричную) структуру.

Аппроксимируем на указанных опорных сетках двумерное уравнение переноса по пространственным переменным по некоторой разностной схеме. При этом будем предполагать, что выполняется условие п. 6 предыдущего раздела. Говоря иначе, ограничимся рассмотрением сеточных методов, в которых аппроксимация уравнения переноса строится в рамках одной счетной ячейки. Классическими схемами, обладающими указанным свойством, являются, как уже отмечалось, схемы метода дискретных ординат, в частности схема с расширенным шаблоном [7]. В дальнейшем при построении адаптивного метода по угловым переменным для определенности будем ссылаться именно на данную схему, хотя это не имеет принципиального значения.

Итак, покроем область решения задачи пространственной сеткой из выпуклых многоугольников (рисунок).



Фрагмент неортогональной пространственной сетки из выпуклых многоугольников

Аппроксимируем на указанной сетке уравнение переноса по пространственным переменным по схеме с расширенным шаблоном:

$$\sum_{l=1}^{l_1} \bar{R}_{P(l,l+1)} N_{P(l,l+1)} + S_{P_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi N_{P_0} \right) + \alpha_{P_0} V_{P_0} N_{P_0} = V_{P_0} F_{P_0}. \quad (4)$$

Здесь  $N_{P(l,l+1)}$  — среднее сеточное значение искомой функции на ребре  $P(l,l+1)$  многоугольной ячейки с номером  $P$  ( $l = \overline{1, l_1}$ ,  $l_1$  — число вершин  $P(l)$  ячейки  $P$ ,  $l_1 + 1 \equiv 1$ );  $N_{P_0}$ ,  $F_{P_0}$ ,  $\alpha_{P_0}$  — средние значения соответственно искомой функции, функции правой части и сечения в многоугольнике  $P$ ;  $S_{P_0}$  — площадь многоугольника  $P$ ;  $V_{P_0}$  — объем ячейки, образованной вращением многоугольника  $P$  вокруг оси  $\vec{z}$  (без  $2\pi$ );

$$\begin{aligned} \bar{R}_{P(l,l+1)}(\mu, \varphi) &= \left[ \mu (r_{P(l+1)} - r_{P(l)}) - \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi (z_{P(l+1)} - z_{P(l)}) \right] r_{P(l+1)}, \\ r_{P(l,l+1)} &= 0,5(r_{P(l+1)} + r_{P(l)}). \end{aligned}$$

Для замыкания системы сеточных уравнений уравнение баланса (4) дополняется специальными уравнениями (дополнительными соотношениями — см. [7]), конкретный вид которых для дальнейшего изложения несущественен.

Введем опорную сетку по угловым переменным. С этой целью разобьем области изменения переменных  $\mu$  и  $\varphi$  на интервалы соответственно точками  $\mu_p$  ( $p = \overline{0, p1}$ ) и  $\varphi_q$  ( $q = \overline{0, q1}$ ):

$$-1 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p < \mu_{p+1} < \dots < \mu_{p1} = 1; \quad (5)$$

$$\pi = \varphi_0 > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots > \varphi_q > \varphi_{q+1} > \dots > \varphi_{q1} = 0. \quad (6)$$

Введем внутри соответствующих интервалов средние значения переменных  $\mu$  и  $\varphi$ :

$$\mu_{p-1} < \mu_{p-1/2} < \mu_p \quad (p = \overline{1, p1}); \quad \varphi_{q-1} > \varphi_{q-1/2} > \varphi_q \quad (q = \overline{1, q1}). \quad (7)$$

Тем самым введено дискретное множество направлений полета частиц  $\vec{\Omega}(\mu_{p-1/2}, \varphi_{q-1/2}) = \vec{\Omega}_{p-1/2, q-1/2}$ , соответствующее опорной сетке (5)–(7).

Аппроксимируем уравнение (4) по угловым переменным на опорной сетке по схеме с дополнительным соотношением по переменной  $\varphi$ . Тогда получим систему сеточных уравнений баланса:

$$\sum_{l=1}^{l1} R_{P(l, l+1)} N_{P(l, l+1)} + R_q N_q - R_{q-1} N_{q-1} + \alpha_{P_0} V_{P_0} N_{P_0} = V_{P_0} F_{P_0},$$

где

$$R_{P(l, l+1)} = r_{P(l, l+1)} \left[ \mu_{p-1/2} (r_{P(l+1)} - r_{P(l)}) - \sqrt{1 - \mu_{p-1/2}^2} \cos \varphi_{q-1/2} (z_{P(l+1)} - z_{P(l)}) \right];$$

$$R_q = \frac{S_{P_0}}{\Delta \varphi_{q-1/2}} \sqrt{1 - \mu_{p-1/2}^2} \sin \varphi_q; \quad R_{q-1} = \frac{S_{P_0}}{\Delta \varphi_{q-1/2}} \sqrt{1 - \mu_{p-1/2}^2} \sin \varphi_{q-1},$$

дополненную соотношениями вида

$$N_{p-1/2, q-1/2} = \eta N_{p-1/2, q} + (1 - \eta) N_{p-1/2, q-1}, \quad p = \overline{1, p1}, \quad q = \overline{1, q1},$$

где  $\eta$  ( $0 < \eta \leq 1$ ) — весовой параметр.

Суммируем теперь основные положения АМ-А-метода аппроксимации по угловым переменным уравнения переноса:

1. Опорная сетка по угловым переменным является основной сеткой, на которой осуществляется численное решение уравнения переноса. В процессе счета задачи опорная сетка не укрупняется, но возможно дробление отдельных интервалов по угловым переменным  $\mu$  и  $\varphi$  опорной сетки (5), (6) на более мелкие интервалы. Подчеркнем, что дробление осуществляется строго внутри интервалов опорной сетки. Говоря иначе, не допускается наличия в более мелкой угловой сетке адаптивного метода таких интервалов, точки которых принадлежат частично одному, частично другому интервалу опорной сетки.

2. Дробление угловой сетки осуществляется только для выбранного множества пространственных ячеек. В нестационарных расчетах элементы данного множества, как правило, фиксируются на одном временном шаге, но допускается их изменение (дополнение либо сужение) при переходе на следующий временной шаг. В стационарных расчетах, а также при решении некоторых классов нестационарных задач возможно изменение множества пространственных точек, где используется адаптивный метод, на внешних итерациях по источнику. В разных пространственных ячейках допускается дробление на разное число более мелких интервалов по переменным  $\mu$  и  $\varphi$  опорной угловой сетки.

3. Выбор множества пространственных ячеек, где необходимо дробление угловой опорной сетки на более мелкие интервалы сетки адаптивного метода, осуществляется с использованием специальных критериев и алгоритмов. С помощью данных алгоритмов определяется также тип дробления, в том числе количество подынтервалов, на которые разбивается соответствующий интервал опорной угловой сетки. Краткое описание указанных алгоритмов дано в следующем разделе.

4. При использовании адаптивного метода требуется специальная аппроксимация уравнения переноса. Кроме того, возникает проблема построения метода решения полученной системы сеточных уравнений переноса. Решению этих вопросов посвящен разд. 3.3.

**3.2. Критерии и алгоритмы дробления на подынтервалы интервалов опорной угловой сетки (построения дробной сетки).** Сформулируем ряд критериев и алгоритмов дробления угловой сетки в нестационарных задачах. Следует сразу отметить, что этот набор критериев и алгоритмов не претендует на полноту и может быть дополнен по мере накопления опыта практического использования адаптивного метода. В том случае, когда ищется решение стационарной задачи, внешние итерации, например итерации по методу Кэллога при решении стационарных задач по поиску максимального значения  $\lambda$ -параметра, можно рассматривать как шаги итерационного процесса и предложенные критерии и алгоритмы могут быть использованы на таких шагах.

Итак, дробление угловой сетки осуществляется согласно следующим критериям и алгоритмам:

1. Выбор множества  $A = \{P_a\}$  номеров ячеек пространственной сетки, в которых необходимо применение адаптивного метода, является поэтапным.

2. На начальном этапе (расчета начальных данных или подключения АМ-А-метода к расчету) множество  $A$  формируется на основе известной информации о рассчитываемой задаче. А именно, в данное множество включаются номера пространственных точек с учетом особенностей постановки задачи (наличие подобластей, где ожидается значительная анизотропия в решении и т. п.) и требований к точности описания функции углового распределения в разных подобластях задачи. Должна быть предусмотрена возможность "навязывания" постоянного для всего расчета (или этапа расчета) множества  $A$ .

3. На этапе расчета временных шагов (внешних итераций) реализуется возможность коррекции элементов множества  $A$ . Коррекция осуществляется с использованием некоторого набора критериев. Приведем некоторые возможные критерии:

- анализ градиентов искомой функции по угловым переменным и подключение АМ-А-метода в тех пространственных точках и тех интервалах угловой сетки, где решение претерпевает изменения, превышающие некоторые заданные значения;
- определение фронта тепловой волны с целью подключения АМ-А-метода на фронте (или на фронте и за фронтом тепловой волны);
- подключение АМ-А-метода в заданных приграничных точках (строках, столбцах), число которых может изменяться с учетом особенностей поведения решения во времени.

4. Коррекция множества  $A$  осуществляется следующим образом:

- 4.1. Рассматривается множество  $A^n$ , соответствующее предыдущему временному шагу (внешней итерации).
- 4.2. Из  $A^n$  выбрасываются номера тех точек, в которых не удовлетворяется ни один из введенных критериев.
- 4.3. Проводится анализ ячеек-соседей 1-го уровня (т. е. ячеек, примыкающих к ячейкам рассматриваемого множества и не содержащихся в массиве  $A$ ) с применением введенных критериев, и те ячейки, для которых справедлив хотя бы один из этих критериев, включаются в множество  $A^{n+1}$ , полученное после этапа 4.2.
- 4.4. Проводится анализ и добавление в множество  $A^{n+1}$  ячеек-соседей 1-го уровня для новых введенных в множество  $A^{n+1}$  ячеек.
- 4.5. Процесс, изложенный в п. 4.3, очевидно, является итерационным и продолжается до сходимости, т. е. до того момента, когда содержание множества  $A$  на данном шаге (множества  $A^{n+1}$ ) не будет претерпевать дальнейших изменений.

**3.3. Аппроксимация и численное решение уравнения переноса на адаптивных угловых сетках.** Введем в рассмотрение ячейку пространственной сетки с номером  $P$  (см. рисунок). Рассмотрим некоторое фиксированное направление  $\bar{\Omega}_{p-1/2, q-1/2}$  опорной угловой сетки (5), (6). Данному направлению отвечают сеточные интервалы  $\mu_{p-1} < \mu < \mu_p$  и  $\varphi_{q-1} > \varphi > \varphi_q$  по переменным  $\mu$  и  $\varphi$  соответственно, а также средние значения этих переменных  $\mu_{p-1/2} \in [\mu_{p-1}, \mu_p]$  и  $\varphi_{q-1/2} \in [\varphi_{q+1}, \varphi_q]$ .



Пусть в точке  $P$  для аппроксимации уравнения переноса введена адаптивная сетка, содержащая  $\overline{m}$  подынтервалов по  $\mu$  и  $\overline{m}$  подынтервалов по переменной  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\mu_{p-1} &= \mu_{p-1/2}^1 < \mu_{p-1/2}^2 < \dots < \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1} < \mu_{p-1/2}^{\overline{m}} < \dots < \mu_{p-1/2}^{\overline{m}1} = \mu_p; \\ \varphi_{q-1} &= \varphi_{q-1/2}^1 > \varphi_{q-1/2}^2 > \dots > \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1} > \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}} > \dots > \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}1} = \varphi_q.\end{aligned}$$

Введем  $\mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2} \in [\mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1}, \mu_{p-1/2}^{\overline{m}}]$ ,  $\varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1/2} \in [\varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}}]$  — средние значения соответственно  $\mu$  и  $\varphi$  в указанных подынтервалах. Указанные средние значения определяют направление полета частиц

$$\vec{\Omega}_{p-1/2, q-1/2}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} = \vec{\Omega} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1/2} \right) \quad (8)$$

в ячейке

$$\left[ \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1}, \mu_{p-1/2}^{\overline{m}} \right] \times \left[ \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}} \right] \quad (9)$$

адаптивной сетки по угловым переменным.

Построим сеточную аппроксимацию уравнения (4) в данной ячейке адаптивной сетки. С этой целью проинтегрируем уравнение (4) по угловым переменным по площади ячейки угловой сетки и аппроксимируем полученное выражение следующим разностным уравнением:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{l_1} R_{P(l, l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} \overline{N}_{P(l, l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} + R^{\overline{m}-1/2, \overline{m}} N^{\overline{m}-1/2, \overline{m}} - \\ - R^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1} N^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1} + \alpha_{P_0} V_{P_0} N_{P_0}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} = V_{P_0} F_{P_0}.\end{aligned} \quad (10)$$

Наряду с уравнением (10) введем дополнительные соотношения схемы с расширенным шаблоном [7] с целью получения замкнутой системы сеточных уравнений переноса в ячейке  $P$  для направления (8).

В уравнении (10)  $N_{P_0}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} = N_{P_0} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1/2} \right)$  — среднее значение искомой функции в центре ячейки  $P$  адаптивной сетки фазового пространства;  $N^{\overline{m}-1/2, \overline{m}} = N_{P_0} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}} \right)$ ,  $N^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1} = N_{P_0} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1} \right)$  — сеточные значения искомой функции на концах подынтервала по переменной  $\varphi$  адаптивной сетки;  $\overline{N}_{P(l, l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}$  — сеточные значения потоков через ребра ячейки (стороны многоугольника)  $P$ , которые определяются разными способами в зависимости от типа угловой сетки, используемого в соседних пространственных ячейках.

А именно, сеточное значение по угловым переменным функции  $\overline{N}_{P(l, l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}$  определяется по одному из перечисленных ниже вариантов.

*Вариант 1.* В многоугольнике  $P$  на стороне  $P_{(l, l+1)}$  задан входящий поток на угловой адаптивной сетке из ячеек вида (9), строго совпадающей с адаптивной сеткой, используемой в самом рассматриваемом многоугольнике.

Очевидно, что этот вариант реализуется в двух случаях. Во-первых, когда сторона  $P_{(l, l+1)}$  является частью внешней границы и входящий поток может быть вычислен на основе известных входящих граничных условий. Во-вторых, когда в многоугольнике  $P'$ , являющемся соседним к исходному многоугольнику  $P$  по стороне  $P_{(l, l+1)}$ , используется та же самая адаптивная угловая сетка, что и в многоугольнике  $P$ . В этом случае требуемый поток является известным после решения сеточных уравнений переноса в многоугольнике  $P'$ . Таким образом, в данном варианте  $\overline{N}_{P(l, l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} = N_{P(l, l+1)} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1/2} \right)$ , где  $N_{P(l, l+1)} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1/2} \right)$  — известный поток.

*Вариант 2.* Поток через сторону  $P_{(l, l+1)}$  многоугольника  $P$  является выходящим, т. е.  $R_{(l, l+1)} > 0$ , и в угловой сетке, используемой в соседнем многоугольнике  $P'$ , содержится рассматриваемая

ячейка (9) угловой сетки. В этом варианте  $\vec{N}_{P(l,l+1)}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2} = N_{P(l,l+1)} \left( \mu_{p-1/2}^{\bar{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\bar{m}-1/2} \right)$ , и этот поток находится путем решения сеточных уравнений переноса в многоугольнике  $P$  для рассматриваемой ячейки угловой сетки.

*Вариант 3.* В соседнем многоугольнике  $P'$  на стороне  $P_{(l,l+1)}$  поток задан на угловой опорной сетке либо на угловой адаптивной сетке из ячеек вида (9), причем эти ячейки являются более крупными, чем у адаптивной сетки, используемой в многоугольнике  $P$ . Таким образом, в данном варианте ячейка угловой сетки (9), соответствующая рассматриваемому в многоугольнике  $P$  направлению  $\vec{\Omega}_{p-1/2, q-1/2}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}$ , является частью некоторой ячейки

$$[\bar{\mu}^{\bar{m}-1}, \bar{\mu}^{\bar{m}}] \times [\bar{\varphi}^{\bar{m}-1}, \bar{\varphi}^{\bar{m}}], \quad (11)$$

используемой в многоугольнике  $P'$ .

Обозначим через  $\vec{\Omega}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}$  направление полета частиц, отвечающее ячейке (11) угловой сетки, а через  $\bar{\mu}^{\bar{m}-1/2}$  и  $\bar{\varphi}^{\bar{m}-1/2}$  — средние значения в ячейке соответствующих угловых переменных. Отсюда с учетом изложенного ранее способа построения ячеек адаптивной сетки следует, что ячейка (11) состоит из нескольких ячеек угловой адаптивной сетки, используемой в многоугольнике  $P$ . Множество таких ячеек обозначим как

$$\left\{ [\mu^{\bar{m}-1, s}, \mu^{\bar{m}, s}] \times [\varphi^{\bar{m}-1, \nu}, \varphi^{\bar{m}, \nu}], \quad s = \bar{1}, \bar{s}, \nu = \bar{1}, \bar{\nu}, \bar{s} \geq 1, \bar{\nu} \geq 1, \text{ причем } \bar{s}\bar{\nu} \geq 2 \right\}, \quad (12)$$

а соответствующие им направления полета частиц — как

$$\vec{\Omega}^{(\bar{m}-1/2, s), (\bar{m}-1/2, \nu)}, \quad s = \bar{1}, \bar{s}, \quad \nu = \bar{1}, \bar{\nu}. \quad (13)$$

Очевидно, что ячейка (9) угловой сетки, для которой строится аппроксимация уравнения переноса в ячейке  $P$ , является элементом данного множества.

В варианте 3 выделим, в свою очередь, три способа вычисления потока  $\vec{N}_{P(l,l+1)}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}$ .

*Вариант 3.1.* Пусть вектор  $\vec{\Omega}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}$ , соответствующий ячейке (11), и векторы (13) "освещают" ребро  $P_{(l,l+1)}$  ячейки  $P$  с одной и той же стороны. При этом освещенности отвечают входящему в многоугольник  $P$  потоку, т. е.

$$\begin{aligned} \left( \vec{\Omega}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &\leq 0; \\ \left( \vec{\Omega}^{(\bar{m}-1/2, s), (\bar{m}-1/2, \nu)}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &\leq 0 \quad (s = \bar{1}, \bar{s}, \quad \nu = \bar{1}, \bar{\nu}), \end{aligned}$$

где  $\vec{n}_{P(l,l+1)}$  — внешняя нормаль к стороне  $P_{(l,l+1)}$  многоугольника  $P$ .

Тогда положим  $\vec{N}_{P(l,l+1)}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2} = N_{P(l,l+1)} \left( \mu^{\bar{m}-1/2}, \varphi^{\bar{m}-1/2} \right)$ , где  $N_{P(l,l+1)} \left( \mu^{\bar{m}-1/2}, \varphi^{\bar{m}-1/2} \right)$  — поток, известный после решения сеточных уравнений переноса в многоугольнике  $P'$  в ячейке угловой сетки (11).

*Вариант 3.2.* Вектор  $\vec{\Omega}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}$  и векторы (13) "освещают" ребро  $P_{(l,l+1)}$  ячейки  $P$  с одной и той же стороны. При этом освещенности отвечают выходящему из многоугольника  $P$  потоку, т. е.

$$\begin{aligned} \left( \vec{\Omega}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &> 0; \\ \left( \vec{\Omega}^{(\bar{m}-1/2, s), (\bar{m}-1/2, \nu)}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &> 0 \quad (s = \bar{1}, \bar{s}, \quad \nu = \bar{1}, \bar{\nu}). \end{aligned}$$

Тогда  $\overline{N}_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} = N_{P(l,l+1)} \left( \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1/2} \right)$  и этот поток находится путем решения системы сеточных уравнений переноса в ячейке  $P$ .

*Вариант 3.3.* Освещенность ребра  $P_{(l,l+1)}$  ячейки  $P$  векторами разная, т. е. существует хотя бы одна пара индексов  $(s, \nu)$  такая, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left( \overrightarrow{\Omega}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &\leq 0; \\ \left( \overrightarrow{\Omega}^{(\overline{m}-1/2, s), (\overline{m}-1/2, \nu)}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &> 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left( \overrightarrow{\Omega}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &> 0; \\ \left( \overrightarrow{\Omega}^{(\overline{m}-1/2, s), (\overline{m}-1/2, \nu)}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) &\leq 0. \end{aligned}$$

В этом случае поток через ребро  $P_{(l,l+1)}$  ячейки  $P$ , заданный в уравнении баланса (10) произведением  $R_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} \overline{N}_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}$ , заменим следующим аппроксимирующим выражением:

$$\overline{R}_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} \overline{N}_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2},$$

где  $\overline{R}_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2} = r_{P(l,l+1)} \left[ (r_{l+1} - r_l) \overline{\mu}^{\overline{m}-1/2} - \sqrt{1 - \overline{\mu}^{\overline{m}-1/2}} \cos \overline{\varphi}^{\overline{m}-1/2} (z_{l+1} - z_l) \right]$  — "средний" коэффициент освещенности в более крупной ячейке (11) угловой сетки, которая используется в многоугольнике  $P'$ .

Численное решение полученной после такой замены системы сеточных уравнений переноса осуществляется по одному из двух предыдущих вариантов (3.1 или 3.2).

*Вариант 4.* В ячейке  $P'$  поток через ребро  $P_{(l,l+1)}$  задан на более подробной адаптивной угловой сетке, чем в ячейке  $P$ , т. е. рассматриваемая в многоугольнике  $P$  ячейка угловой сетки (9) состоит из некоторого множества ячеек угловой сетки, заданной в многоугольнике  $P'$ .

Множество таких ячеек обозначим как

$$\left[ \mu^{\overline{m}-1/2, s}, \mu^{\overline{m}-1/2, s-1} \right] \times \left[ \varphi^{\overline{m}-1/2, \nu}, \varphi^{\overline{m}-1/2, \nu-1} \right], \quad (14)$$

а соответствующие им средние значения  $\mu$ ,  $\varphi$  и направление полета частиц — соответственно как

$$\mu^{\overline{m}-1/2, s-1/2}, \quad \varphi^{\overline{m}-1/2, \nu-1/2}, \quad \overrightarrow{\Omega}^{(\overline{m}-1/2, s-1/2), (\overline{m}-1/2, \nu-1/2)} \quad (s = \overline{1}, \overline{s}; \quad \nu = \overline{1}, \overline{\nu}). \quad (15)$$

Отметим, что из изложенного алгоритма дробления ячеек опорной угловой сетки на ячейки адаптивной угловой сетки следует, что

$$\begin{aligned} \mu^{\overline{m}-1, 1} &= \mu_{p-1/2}^{\overline{m}-1}, & \mu^{\overline{m}-1, \overline{s}} &= \mu_{p-1/2}^{\overline{m}}; \\ \varphi^{\overline{m}-1, 1} &= \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}-1}, & \varphi^{\overline{m}-1, \overline{\nu}} &= \varphi_{q-1/2}^{\overline{m}}. \end{aligned}$$

В варианте 4 выделим, в свою очередь, два способа вычисления потока  $\overline{N}_{P(l,l+1)}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}$ .

*Вариант 4.1.* Поток через ребро  $P_{(l,l+1)}$  ячейки  $P$  является входящим, т. е.

$$\left( \overrightarrow{\Omega}_{p-1/2, q-1/2}^{\overline{m}-1/2, \overline{m}-1/2}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) \leq 0.$$

Тогда этот входящий поток определяется по формуле

$$R_{P(l,l+1)}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2} N_{P(l,l+1)}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2} = \frac{1}{\Delta\mu^{\bar{m}-1/2} \Delta\varphi^{\bar{m}-1/2}} \times \\ \times \sum_{s=1}^{\bar{s}} \sum_{\nu=1}^{\bar{\nu}} R_{P(l,l+1)}^{(\bar{m}-1/2, s-1/2), (\bar{m}-1/2, \nu-1/2)} N_{P(l,l+1)}^{(\bar{m}-1/2, s-1/2), (\bar{m}-1/2, \nu-1/2)} \Delta\mu^{\bar{m}-1/2, s-1/2} \Delta\varphi^{\bar{m}-1/2, \nu-1/2}.$$

Здесь  $R_{P(l,l+1)}^{(\bar{m}-1/2, s-1/2), (\bar{m}-1/2, \nu-1/2)}$  — коэффициенты освещенности, соответствующие направлениям из (15);  $\Delta\mu^{\bar{m}-1/2}$ ,  $\Delta\varphi^{\bar{m}-1/2}$  — длины интервалов по переменным  $\mu$  и  $\varphi$ , образующих ячейку (9);  $N_{P(l,l+1)}^{(\bar{m}-1/2, s-1/2), (\bar{m}-1/2, \nu-1/2)}$  — потоки в ячейках множества (14), известные после решения систем сеточных уравнений переноса в многоугольнике  $P'$  для направлений полета частиц этого множества;  $\Delta\mu^{\bar{m}-1/2, s-1/2} = \mu^{\bar{m}-1/2, s} - \mu^{\bar{m}-1/2, s-1}$ ;  $\Delta\varphi^{\bar{m}-1/2, \nu-1/2} = \varphi^{\bar{m}-1/2, \nu} - \varphi^{\bar{m}-1/2, \nu-1}$ .

*Вариант 4.2.* Поток через ребро  $P_{(l,l+1)}$  ячейки  $P$  является выходящим, т. е.

$$\left( \vec{\Omega}_{p-1/2, q-1/2}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2}, \vec{n}_{P(l,l+1)} \right) > 0.$$

Тогда

$$\overline{N}_{P(l,l+1)}^{\bar{m}-1/2, \bar{m}-1/2} = N_{P(l,l+1)} \left( \mu_{p-1/2}^{\bar{m}-1/2}, \varphi_{q-1/2}^{\bar{m}-1/2} \right)$$

и этот поток находится путем решения систем сеточных уравнений переноса в исходной ячейке  $P$  для рассматриваемой ячейки угловой сетки (9).

### Заключение

В статье сформулированы основные положения АМ-метода, аппроксимирующего уравнение переноса на адаптивных сетках в фазовом пространстве. АМ-метод строится путем введения адаптивных дробных сеток отдельно по пространственным переменным, по угловым переменным и энергетической переменной.

Дан подробный вывод АМ-А схемы, аппроксимирующей уравнение переноса на адаптивной сетке по угловым переменным.

Важными особенностями предложенного адаптивного метода дробных сеток является то, что он обеспечивает возможность использования неортогональных пространственных сеток, консервативность сеточного решения, а также возможность численного решения полученной системы сеточных уравнений прямым методом, являющимся развитием известного метода бегущего счета.

### Список литературы

1. Шагалиев Р. М., Шумилин В. А., Алексеев А. В., Беляков И. М., Евдокимов В. В., Звенигородская О. А., Плетенева Н. П., Федотова Л. П. Математические модели и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 20—26.
2. Троцкий В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 3. С. 793—797.
3. Алексеев А. В., Шагалиев Р. М. Алгоритм распараллеливания численного решения трехмерного уравнения переноса в комплексе САТУРН // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 3—7.

4. *Алексеев А. В., Нурждин А. А., Шагалиев Р. М.* Метод мелкозернистого распараллеливания двумерных и трехмерных задач переноса на неортогональных сетках // Там же. 2001. Вып. 2. С. 3—11.
  5. *Федотова Л. П., Шагалиев Р. М.* Конечно-разностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т 3, № 6.
  6. *Троцкий В. Е., Шумилин В. А.* Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 266, № 2. С. 230—241.
  7. *Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М.* Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34—41.
-