

УДК 519.6:533.7

ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ, ПОРЯДОК ЧИСЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ И ЭКОНОМИЧНОСТЬ СЧЕТА МНОГОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА НА ПРИМЕРЕ РАСЧЕТОВ НА СХОДИМОСТЬ ЗАДАЧИ "BLAST WAVES"

Ю. А. Бондаренко
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Проведены расчеты на сходимость известной одномерной тестовой задачи "Blast Waves" по нескольким разностным схемам газовой динамики с разным порядком аппроксимации конвективных слагаемых. Установлена связь между порядком аппроксимации и порядком численной сходимости. Экстраполяцией результатов одномерных расчетов на двумерный и трехмерный случаи получены оценки, связывающие стоимость расчетов (количество вычислений) с требуемой погрешностью и качеством разностной схемы. Сделаны выводы о целесообразности перехода на разностные схемы высокого порядка аппроксимации в зависимости от требуемого класса точности результатов.

Введение

В работе [1] и в обзоре [2] для оценки стоимости нестационарных газодинамических расчетов и эффективности разностных схем предложена модельная формула

$$\varepsilon \approx c_{n,\alpha} S^{-\alpha/(n+1)}, \tag{1}$$

которая дает качественную связь времени счета S (точнее, полного количества арифметических операций) газодинамических задач с погрешностью получаемого численного решения ε в зависимости от пространственной размерности $n = 1, 2, 3$ и численного порядка сходимости $\alpha > 0$. Уже из этой асимптотической зависимости видно, что в трехмерном случае ($n = 3$) для численного порядка сходимости $\alpha = 1$ уменьшение погрешности ε в 3 раза требует увеличения количества вычислений (и тем самым увеличения производительности вычислительной техники) в $3^4 \approx 100$ раз. Если же порядок численной сходимости α меньше единицы, то ситуация еще хуже.

В настоящей работе приводятся результаты одномерных расчетов на сходимость задачи "Blast Waves" [3] по нескольким разностным схемам разного уровня точности. Эти результаты используются для определения не зависящего от сетки множителя $c_{n,\alpha}$ в (1), зависящего от численного метода. С помощью экстраполяции полученных результатов на двумерный и трехмерный случай проводится количественное сравнение эффективности и экономичности разностных схем разного уровня точности в многомерном случае.

Результаты одномерных расчетов на сходимость.

Связь порядка численной сходимости и порядка аппроксимации

Задача "Blast Waves" [3] моделирует одномерное плоское нестационарное течение газа с уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho e$, $\gamma = 1,4$, в котором два взрывающихся с разной интенсивностью

слоя обжимают в процессе разлета срединный, почти холодный, слой. Это течение описывается следующими начальными и граничными условиями:

$$u(t, x)|_{t=0} = 0; \quad \rho(t, x)|_{t=0} = 1; \quad e(t, x)|_{t=0} = \begin{cases} 2500, & 0 \leq x \leq 0,1; \\ 0,025, & 0,1 < x < 0,9; \\ 250, & 0,9 \leq x \leq 1; \end{cases} \quad u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=1} = 0.$$

В расчетах на сходимость этой задачи использовалась равномерная начальная сетка с разным числом ячеек M : от 100 до 20 000. Расчеты проведены как в лагранжевой, так и в эйлеровой постановке. В эйлеровых расчетах на каждом шаге по времени после лагранжева этапа строится равномерная по расстоянию сетка, на которую пересчитываются все газодинамические величины. Лагранжев расчет на самой подробной сетке $M = 20\,000$ использовался в качестве эталона. На контрольный момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$ норма погрешности плотности аналогично [3] вычислялась по формуле

$$\| \Delta \rho_{\text{груб}} \|_{L_1} \equiv \| \rho_{\text{груб}} - \rho_{\text{эталон}} \|_{L_1} = \sum_{j \in M_{\text{груб}}} \left| \rho_{j+1/2}^{(\text{груб})} - (\rho_{\text{эталон}})_{j+1/2}^{(\text{груб})} \right| \left(x_{j+1}^{(\text{груб})} - x_j^{(\text{груб})} \right),$$

где

$$(\rho_{\text{эталон}})_{j+1/2}^{(\text{груб})} = \frac{\int_{x_j^{(\text{груб})}}^{x_{j+1}^{(\text{груб})}} \rho_{\text{эталон}}(x) dx}{x_{j+1}^{(\text{груб})} - x_j^{(\text{груб})}} = \frac{\sum_{k \in M_{\text{эталон}}} \rho_{k+1/2}^{(\text{эталон})} \text{mes} \left\{ \left[x_j^{(\text{груб})}, x_{j+1}^{(\text{груб})} \right] \cap \left[x_k^{(\text{эталон})}, x_{k+1}^{(\text{эталон})} \right] \right\}}{x_{j+1}^{(\text{груб})} - x_j^{(\text{груб})}}$$

есть плотность из лагранжева эталонного расчета, пересчитанная на сетку "грубого" расчета с сохранением массы.

Лагранжевы расчеты на сходимость проведены по полностью консервативной разностной схеме *крест* [4, 5] (серия 1) и по полностью консервативной разностной схеме типа крест с искусственной антидисперсией (серия 2). Схема с антидисперсией кратко описана в Приложении, более подробно ее построение и свойства будут изложены в другой работе. Результаты этих расчетов показаны на рис. 1, 2. Порядок численной сходимости в лагранжевых расчетах обеих серий близок к единице (точнее, $\alpha \approx 0,9$), но схема с антидисперсией дает погрешность в 2–3 раза меньше.

В эйлеровых расчетах на лагранжевом этапе использовалась разностная схема с искусственной антидисперсией. Для пересчета газодинамических величин с лагранжевой сетки на неподвижную эйлерову применялись методы первого и второго порядков аппроксимации.

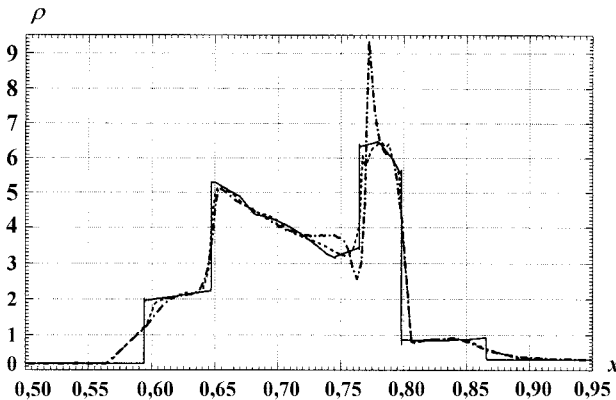


Рис. 1. Профили плотности в лагранжевых расчетах на момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$: \cdots — схема с антидисперсией, $M = 100$; $-\cdot-$ — схема крест, $M = 100$; $—$ — эталон (с антидисперсией), $M = 20\,000$

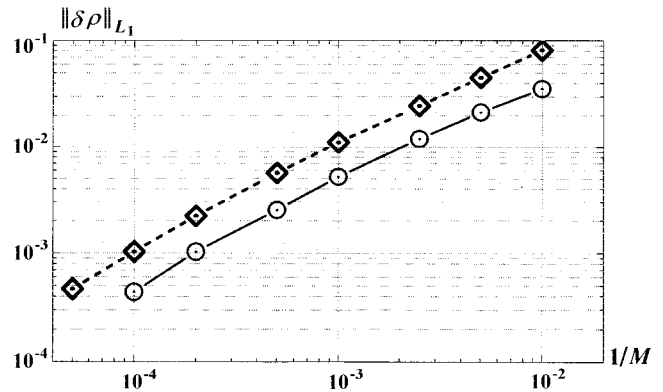


Рис. 2. Зависимость нормы погрешности плотности от сетки в момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$ в лагранжевых расчетах: $-\circ-$ — схема с антидисперсией; $-\diamond-$ — схема крест

В методе пересчета *первого порядка аппроксимации* (серия расчетов 3) удельный объем и полная энергия полагаются постоянными в пределах ячейки, а скорость полагается постоянной в пределах массы, отнесенной к узлу сетки. В результате получается кусочно-постоянная реконструкция удельного объема $\nu = \nu(m)$, полной энергии $E = e + u^2/2 = E(m)$ и скорости $u = u(m)$. Пересчет этих величин на новую эйлерову сетку узлов $\{m_j^{(\text{эйлер})}\}$ и центров ячеек $\{m_{j+1/2}^{(\text{эйлер})}\}$ осуществляется (в массовых переменных) на основе законов сохранения объема, полной энергии и количества движения по очевидным формулам (без использования предположения малости смещения сетки на одном шаге по времени):

$$\nu_{j+1/2}^{(\text{эйлер})} = \frac{m_{j+1}^{(\text{эйлер})} \int_{m_j^{(\text{эйлер})}}^{m_{j+1}^{(\text{эйлер})}} \nu(m) dm}{m_{j+1}^{(\text{эйлер})} - m_j^{(\text{эйлер})}}; \quad E_{j+1/2}^{(\text{эйлер})} = \frac{m_{j+1}^{(\text{эйлер})} \int_{m_j^{(\text{эйлер})}}^{m_{j+1}^{(\text{эйлер})}} E(m) dm}{m_{j+1}^{(\text{эйлер})} - m_j^{(\text{эйлер})}}; \quad u_j^{(\text{эйлер})} = \frac{m_{j-1/2}^{(\text{эйлер})} \int_{m_{j-1/2}^{(\text{эйлер})}}^{m_{j+1/2}^{(\text{эйлер})}} u(m) dm}{m_{j+1/2}^{(\text{эйлер})} - m_{j-1/2}^{(\text{эйлер})}}. \quad (2)$$

Новая внутренняя энергия единицы массы газа находится вычитанием из новой полной энергии кинетической энергии, посчитанной по новой скорости. Когда узлы новой (эйлеровой) сетки не выходят за пределы соседних ячеек старой (лагранжевой) сетки, т. е. когда смещение сетки удовлетворяет требованию локальности, этот метод пересчета эквивалентен известному донорному методу.

В методе пересчета *второго порядка аппроксимации* (серия расчетов 4) для удельного объема, полной энергии и скорости применяется предельная кусочно-линейная (по массовой переменной) реконструкция [6, 7], подробно описанная также в книге [8]. В этом методе реконструкции сеточные газодинамические величины заменяются (в интервалах (m_j, m_{j+1}) для удельного объема и полной энергии и в интервалах $(m_{j-1/2}, m_{j+1/2})$ для скорости) линейными по массовой переменной функциями с выполнением законов сохранения объема, полной энергии и количества движения с соблюдением требования монотонности. Для уменьшения скачков этих кусочно-линейных функций на границах отрезков консервативности используется итерационное уточнение. Пересчет полученных методом предельной кусочно-линейной реконструкции функций на новую (эйлерову) сетку осуществляется по формулам (2). В консервативном варианте метода пересчета новая внутренняя энергия определяется вычитанием новой кинетической энергии из новой полной энергии.

Дисбаланс полной энергии во всех расчетах серий 1–4 определялся только ошибками округления и не превосходил 10^{-9} %.

В серии расчетов 5 опробован для пересчета на эйлерову сетку неконсервативный метод предельной кусочно-линейной реконструкции, когда вместо полной энергии пересчитывается внутренняя энергия единицы массы из требования сохранения внутренней энергии, а изменение кинетической энергии не учитывается. В результате в расчетах этой серии на контрольный момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$ получен дисбаланс полной энергии $(E_{\text{полн}} - E_{\text{нач}})/E_{\text{нач}} \approx -7\%$, который практически не меняется при измельчении сетки. Эта серия расчетов интересна только тем, что она демонстрирует пример неправильной сходимости при нарушении законов сохранения (рис. 3). При использовании в неконсервативном пересчете донорного метода (метода кусочно-постоянной реконструкции первого порядка аппроксимации) отличие предельного решения от эталонного еще больше.

Полученные в расчетах нормы погрешности приведены в табл. 1. В табл. 2 приведены численные порядки сходимости плотности, вычисленные по формуле $a(M_1, M_2) = \left(\ln \frac{M_2}{M_1}\right)^{-1} \ln \frac{\|\Delta\rho(M_1)\|_{L_1}}{\|\Delta\rho(M_2)\|_{L_1}}$.

На рис. 4 показаны профили плотности, полученные в эйлеровых расчетах на сходимость, а на рис. 5 показано поведение погрешностей плотности при измельчении сетки. Кроме того, на рис. 5 и в табл. 1 приведены данные о погрешности плотности в схеме С. К. Годунова и в двух схемах РРМ-метода [9], взятые из работы [3].

Главное в этих результатах — это связь порядка аппроксимации метода пересчета газодинамических величин на эйлерову сетку с порядком численной сходимости. Первый вывод заключается в том, что порядок численной сходимости не превышает единицы как в лагранжевых, так и в эйлеровых расчетах. Это находится в полном согласии с результатами работы [10], где ограничение на порядок численной сходимости единицей связано с наличием нестационарных ударных волн. В

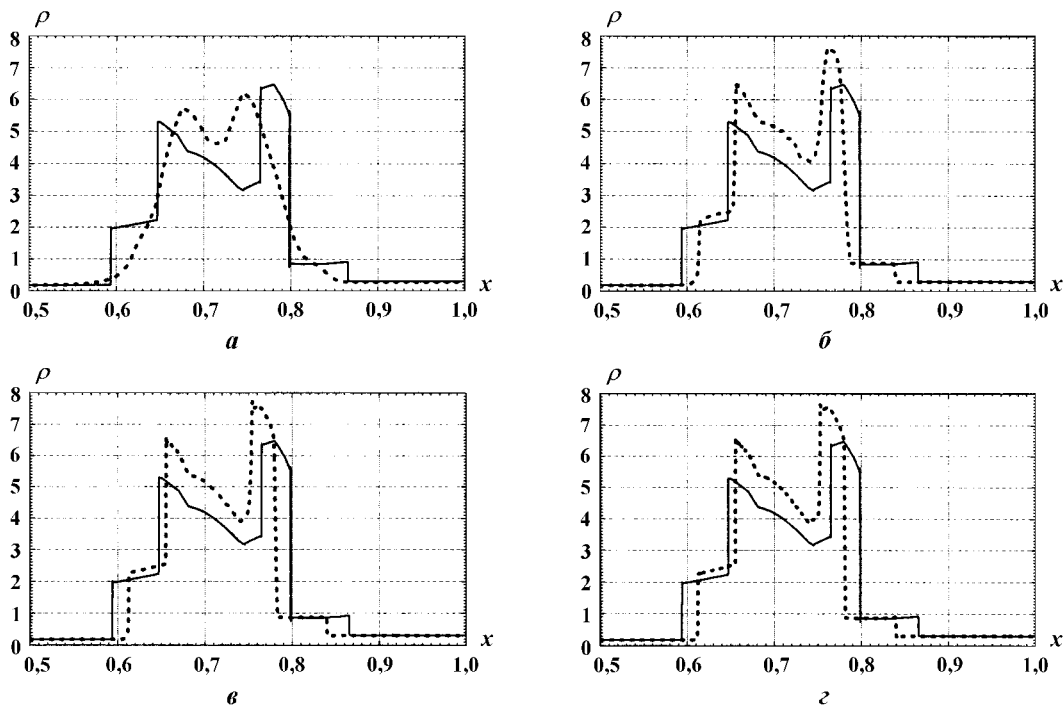


Рис. 3. Профили плотности в эйлеровых расчетах с неконсервативным пересчетом (серия 5) на момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$: — — лагранжев эталон, $M = 20\,000$; ····· — неконсервативный пересчет второго порядка аппроксимации; а — $M = 100$; б — $M = 1\,000$; в — $M = 5\,000$; г — $M = 20\,000$

Таблица 1

Нормы погрешности плотности в расчетах на сходимость на время $t_{\text{кон}} = 0,038$

Тип расчета (серия)	M								Сетка	Схема лагр. этапа	Метод реконструкции	Пересчет энергии
	100	200	400	1000	2000	5000	10000	20000				
1	0,0815	0,0452	0,0246	0,0111	0,00568	0,00222	0,00103	0,000468	Лагр.	Крест	Нет	—
2	0,0355	0,0214	0,012	0,00523	0,00252	0,00103	0,000439	Эталон	Лагр.	С анти-диспер.	Нет	—
3	0,3586	0,3287	0,2709	0,1989	0,1469	0,0951	0,0673	0,0476	Эйлер.	С анти-диспер.	Кусочно-постоян.	Полная
4	0,1806	0,1291	0,0778	0,0381	0,0227	0,0126	0,00804	0,00545	Эйлер.	С анти-диспер.	Предел. кусочно-линейн.	Полная
5	0,307	0,283	0,296	0,318	0,324	0,327	0,328	0,329	Эйлер.	С анти-диспер.	Предел. кусочно-линейн.	Внутренняя
Сх. Годунова из [3]	—	0,33	0,274	—	—	—	—	—	Эйлер.	—	—	—
PPMDE из [3]	—	0,099	0,0467	—	—	—	—	—	Эйлер.	—	—	—
PPMLR из [3]	—	0,076	0,0376	—	—	—	—	—	Эйлер.	—	—	—

задаче "Blast Waves" это усугубляется взаимодействием нестационарных ударных волн. Отметим, что даже вне фронтов ударных волн (точнее, в следах за фронтами) локальные порядки численной сходимости, как сильной, так и слабой (в терминологии [10]), во всех проведенных автором расчетах не превышают единицы.

Таблица 2

Численные порядки сходимости плотности в расчетах на сходимость на время $t_{\text{кон}} = 0,038$

Серия расчетов	$\frac{M_1}{M_2}$				Среднее $200 \leq M \leq 2000$	$\frac{M_1}{M_2}$			Сетка	Порядок аппрокс.
	100	200	400	1000		2000	5000	10000		
	200	400	1000	2000		5000	10000	20000		
1	0,850	0,878	0,869	0,967	0,90	1,025	1,108	1,138	Лагранж.	2
2	0,730	0,835	0,906	1,053	0,93	0,976	1,230	—	Лагранж.	2
3	0,126	0,279	0,337	0,438	0,35	0,474	0,499	0,500	Эйлер.	1
4	0,484	0,731	0,779	0,747	0,75	0,642	0,648	0,561	Эйлер.	2

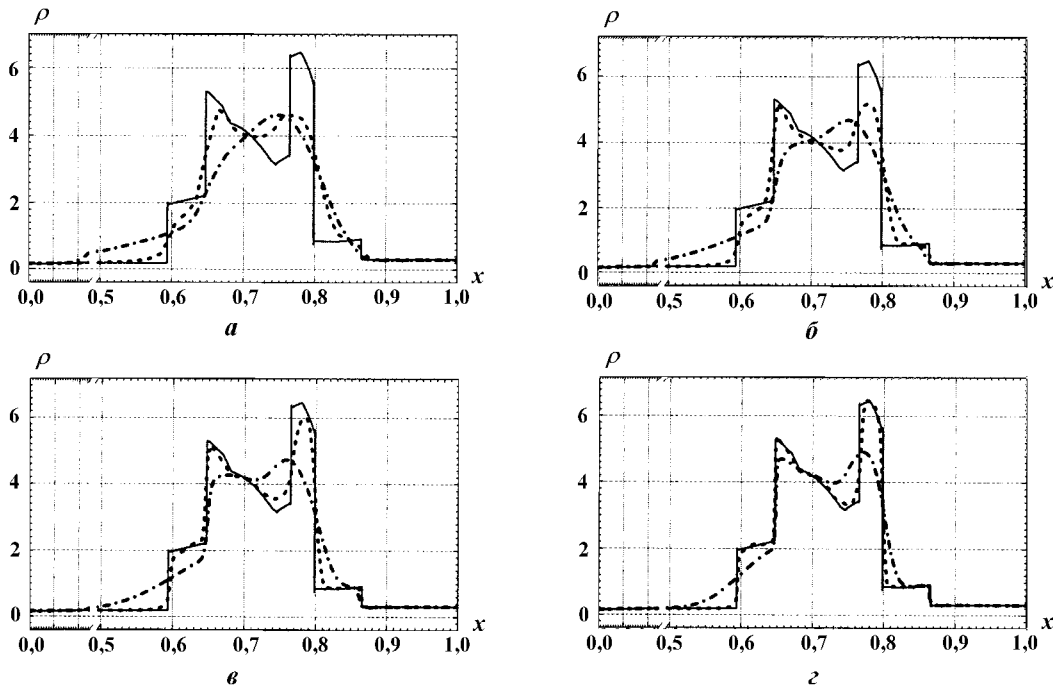


Рис. 4. Профили плотности в консервативных эйлеровых расчетах на момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$: — — серия 3, консервативный пересчет первого порядка аппроксимации; ····· — серия 4, консервативный пересчет второго порядка аппроксимации; — — серия 2, эталон, $M = 20000$; а — $M = 100$; б — $M = 200$; в — $M = 400$; г — $M = 1000$

В схеме С. К. Годунова и в эйлеровых расчетах серии 3 с методом пересчета первого порядка аппроксимации при $200 \leq M \leq 2000$ получен примерно одинаковый порядок численной сходимости $\alpha \approx 0,33$. Среднее арифметическое порядков численной сходимости расчетов серии 3 для интервала $200 \leq M \leq 2000$ равно $\alpha = 0,35$, а в схеме С. К. Годунова среднее арифметическое порядков численной сходимости [3] равно $\alpha = 0,33$. В PPM-методе [9] с третьим порядком аппроксимации метода реконструкции в работе [3] получены следующие средние порядки численной сходимости: для схемы PPMDE $\alpha = 1,08$, и для схемы PPMLR $\alpha = 0,96$.

На основании этих результатов и данных табл. 2 можно принять, что порядок численной сходимости α связан с порядком аппроксимации k_E разностной схемы (или порядком аппроксимации метода реконструкции при использовании пересчета газодинамических величин на эйлерову сетку) следующим приближенным соотношением

$$\alpha \approx \min \left\{ 1; \frac{k_E}{3} \right\}. \quad (3)$$

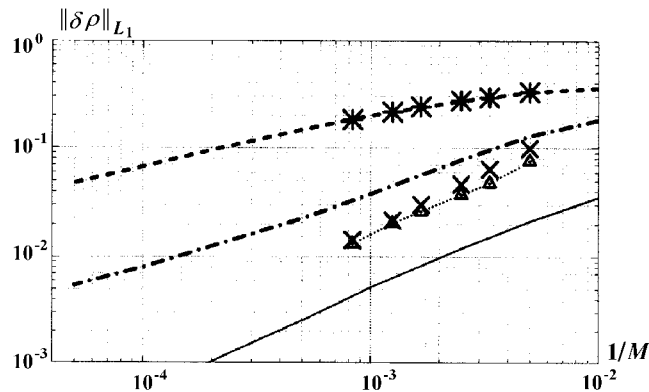


Рис. 5. Зависимость нормы погрешности плотности в момент времени $t_{\text{кон}} = 0,038$ от сетки в эйлеровых расчетах: — — — эйлеров пересчет, кусочно-постоянный; - · - · эйлеров пересчет, кусочно-линейный; — — лагранжев счет с антидисперсией; × — PPMDE из [3]; ···△··· — PPM LR из [3]; * — схема С. К. Годунова из [3]

Это второй основной вывод из проведенных расчетов.

Следует отметить, что соотношение (3) пригодно только для "практического" диапазона сеток $200 \leq M \leq 2000$. Как видно из данных табл. 2, при дальнейшем измельчении сетки (при $M \geq 10000$) в эйлеровых расчетах серии 3 с кусочно-постоянной реконструкцией и серии 4 с предельной кусочно-линейной реконструкцией порядок численной сходимости приближается к $\alpha = 1/2$. Но такие мелкие сетки не имеют практического значения, особенно для многомерного счета. С точки зрения практики многомерного газодинамического счета наиболее интересен интервал $200 \leq M \leq 1000$, на котором применимо соотношение (3).

Использование результатов одномерных расчетов на сходимость для уточнения связи количества вычислений, погрешности, размерности и порядка численной сходимости

Результаты расчетов дают возможность уточнить формулу (1), связывающую погрешность расчета с количеством вычислений. Обозначим через C_n *параметр трудоемкости*, т. е. количество вычислений, нужное для обсчета одной точки сетки на одном шаге по времени, и через C_α — *параметр точности*, который зависит от разностной схемы и определяется формулой

$$\varepsilon \approx C_\alpha (\Delta x)^\alpha. \quad (4)$$

Количество вычислений, пропорциональное времени счета, равно

$$S \approx C_n M^{n+1} \approx C_n (\Delta x)^{-(n+1)}, \quad (5)$$

где M — число точек сетки в одном измерении. Это количество вычислений после исключения размера ячеек с помощью (4) принимает вид

$$S_{n,\alpha}(\varepsilon) \approx C_n \left(\frac{\varepsilon}{C_\alpha} \right)^{-(n+1)/\alpha} = C_{n,\alpha} \varepsilon^{-(n+1)/\alpha}, \quad C_{n,\alpha} = C_n (C_\alpha)^{(n+1)/\alpha}. \quad (6)$$

Из формул (1) и (6) следует, например, что при моделировании нестационарных трехмерных процессов ($n = 3$) эйлеровыми методами первого порядка аппроксимации $k_E = 1$ с порядком численной сходимости $\alpha = 1/3$ (при наличии нестационарных ударных волн) зависимость количества вычислений от погрешности имеет вид

$$S_{3,1/3}(\varepsilon) \approx C_{3,1/3} \varepsilon^{-12},$$

т. е. для уменьшения погрешности всего в 2 раза надо увеличить количество вычислений (или время счета, или производительность ЭВМ) в $2^{12} \approx 4000$ раз.

Для оценки количества вычислений C_n в одной точке на одном шаге по времени используем приближенную формулу

$$C_n \approx c_0 n^2 (k_E + 1)^n. \quad (7)$$

Здесь параметр c_0 характеризует свойства программы (качество программирования и сложность задач, например стоимость уравнений состояния), множителем n^2 сделана попытка учесть сложность

расчета геометрических параметров (например объема ячейки сетки или площади грани), а множитель $(k_E + 1)^n$ описывает число точек сетки в шаблоне разностной схемы с порядком аппроксимации k_E . Конечно, для конкретной разностной схемы и в конкретной программе формула (7) после уточнений может сильно измениться, но обсуждаемые ниже оценки, как видно из формулы (6), в многомерном случае намного слабее зависят от параметра трудоемкости C_n , чем от параметра точности C_α .

Значение параметра точности C_α для разных разностных схем определим на основании результатов описанных выше расчетов задачи "Blast Waves". Для этого в одномерном случае ($n = 1$) из формул (5) и (6), исключая S , получим $C_\alpha = \varepsilon(M)M^\alpha$. Используя результаты расчетов из табл. 1 на сетке $M = 400$ (такая сетка наиболее интересна с точки зрения практики) и формулу (3) для порядка численной сходимости, получаем значения параметра точности C_α , приведенные в табл. 3. Здесь же приведены параметры двух гипотетических методов второго порядка численной сходимости, в первом из которых погрешность взята близкой к схеме PPMDE, а во втором погрешность соответствует лагранжевым расчетам серии 2; во всех случаях $M = 400$.

Таблица 3

Параметр точности C_α для различных разностных схем, полученный из результатов эйлеровых расчетов задачи "Blast Waves" на сетке $M = 400$

№	Метод	Порядок аппроксимации	Порядок численной сходимости	Норма погрешности $\ \rho - \rho_{\text{эталон}}\ _1$	Параметр точности C_α
1	Схема Годунова	1	1/3	0,274	2,02
2	Кусочно-постоянная реконструкция	1	1/3	0,2709	2,00
3	Предельная кусочно-линейная реконструкция	2	2/3	0,0778	4,22
4	PPM-метод кусочно-параболической реконструкции	3	1	0,0467	18,7
5	Гипотетический метод 1 второго порядка численной сходимости	≥ 2	2	0,05	8 000
6	Гипотетический метод 2 второго порядка численной сходимости	≥ 2	2	0,0125	2 000

Зависимость времени счета от качества разностной схемы в двумерном и трехмерном случаях

Экстраполируем результаты одномерных расчетов задачи "Blast Waves" на двумерный и трехмерный случаи. Используем оценку (6), приближенную формулу (7) и данные из табл. 3 для сравнения количества вычислений (или времени счета) двумерных и трехмерных задач с нестационарными ударными волнами по разностным схемам разного уровня точности. Коэффициент удешевления, или множитель уменьшения количества вычислений при переходе от метода $N1$ к более точному методу $N2$ (нумерация методов Nk соответствует табл. 3) получается равным

$$\Omega_n^{N1 \rightarrow N2}(\varepsilon) \equiv \frac{S_{n,\alpha(N1)}(\varepsilon)}{S_{n,\alpha(N2)}(\varepsilon)} = \left(\frac{k_{N1} + 1}{k_{N2} + 1}\right)^n \frac{(C_{\alpha(N1)})^{(n+1)/\alpha(N1)}}{(C_{\alpha(N2)})^{(n+1)/\alpha(N2)}} \varepsilon^{-[(n+1)/\alpha(N1) - (n+1)/\alpha(N2)]}. \quad (8)$$

Результаты вычисления коэффициентов удешевления по формуле (8) для нескольких значений погрешности в двумерном случае приведены в табл. 4, в трехмерном случае — в табл. 5. Для гипотетических методов второго порядка численной сходимости в этих вычислениях использован порядок аппроксимации $k_5 = k_6 = 6$, по аналогии с формулой (3). Это совсем не означает, что для достижения второго порядка численной сходимости надо использовать схемы шестого порядка аппроксимации. Просто таким способом сделана попытка учесть возможное увеличение стоимости счета точки в таких гипотетических методах.

Таблица 4

Коэффициенты удешевления двумерных расчетов при переходе к более точным разностным схемам

ε	$\Omega_2^{2 \rightarrow 3}(\varepsilon) \approx$ $\approx 0,17\varepsilon^{-4,5}$	$\Omega_2^{2 \rightarrow 4}(\varepsilon) \approx$ $\approx 9,6 \cdot 10^{-3}\varepsilon^{-6}$	$\Omega_2^{2 \rightarrow 5}(\varepsilon) \approx$ $\approx 2,9 \cdot 10^{-5}\varepsilon^{-7,5}$	$\Omega_2^{2 \rightarrow 6}(\varepsilon) \approx$ $\approx 2,3 \cdot 10^{-4}\varepsilon^{-7,5}$	
0,3	39	13	0,24	1,9	
0,1	$5,4 \cdot 10^3$	$9,6 \cdot 10^3$	$9,1 \cdot 10^2$	$7,3 \cdot 10^3$	
0,03	$1,2 \cdot 10^6$	$1,3 \cdot 10^7$	$7,6 \cdot 10^6$	$6,1 \cdot 10^7$	
0,01	$1,7 \cdot 10^8$	$9,6 \cdot 10^9$	$2,9 \cdot 10^{10}$	$2,3 \cdot 10^{11}$	
0,001	$5,4 \cdot 10^{12}$	$9,6 \cdot 10^{15}$	$9,1 \cdot 10^{17}$	$7,3 \cdot 10^{18}$	
ε	$\Omega_2^{3 \rightarrow 4}(\varepsilon) \approx$ $\approx 1,9 \cdot 10^{-2}\varepsilon^{-1,5}$	$\Omega_2^{3 \rightarrow 5}(\varepsilon) \approx$ $\approx 5,6 \cdot 10^{-5}\varepsilon^{-3}$	$\Omega_2^{3 \rightarrow 6}(\varepsilon) \approx$ $\approx 4,5 \cdot 10^{-4}\varepsilon^{-3}$	$\Omega_2^{4 \rightarrow 5}(\varepsilon) \approx$ $\approx 7,4 \cdot 10^{-4}\varepsilon^{-1,5}$	$\Omega_2^{4 \rightarrow 6}(\varepsilon) \approx$ $\approx 5,9 \cdot 10^{-3}\varepsilon^{-1,5}$
0,3	0,11	0,0021	0,017	0,0045	0,036
0,1	0,59	0,056	0,45	0,024	0,19
0,03	3,6	2,1	17	0,14	1,1
0,01	19	56	$4,5 \cdot 10^2$	0,74	5,9
0,001	$5,9 \cdot 10^2$	$5,6 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^5$	24	$1,9 \cdot 10^2$

Таблица 5

Коэффициенты удешевления трехмерных расчетов при переходе к более точным разностным схемам

ε	$\Omega_3^{2 \rightarrow 3}(\varepsilon) \approx$ $\approx 5,2 \cdot 10^{-2}\varepsilon^{-6}$	$\Omega_3^{2 \rightarrow 4}(\varepsilon) \approx$ $\approx 1,0 \cdot 10^{-3}\varepsilon^{-8}$	$\Omega_3^{2 \rightarrow 5}(\varepsilon) \approx$ $\approx 3,6 \cdot 10^{-7}\varepsilon^{-10}$	$\Omega_3^{2 \rightarrow 6}(\varepsilon) \approx$ $\approx 5,8 \cdot 10^{-6}\varepsilon^{-10}$	
0,3	72	16	0,062	0,99	
0,1	$5,2 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^5$	$3,6 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^4$	
0,03	$7,2 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^9$	$6,2 \cdot 10^8$	$9,9 \cdot 10^9$	
0,01	$5,2 \cdot 10^{10}$	$1,0 \cdot 10^{13}$	$3,6 \cdot 10^{13}$	$5,8 \cdot 10^{14}$	
0,001	$5,2 \cdot 10^{16}$	$1,0 \cdot 10^{21}$	$3,6 \cdot 10^{23}$	$5,8 \cdot 10^{24}$	
ε	$\Omega_3^{3 \rightarrow 4}(\varepsilon) \approx$ $\approx 2,2 \cdot 10^{-3}\varepsilon^{-2}$	$\Omega_3^{3 \rightarrow 5}(\varepsilon) \approx$ $\approx 7,8 \cdot 10^{-7}\varepsilon^{-4}$	$\Omega_3^{3 \rightarrow 6}(\varepsilon) \approx$ $\approx 1,2 \cdot 10^{-5}\varepsilon^{-4}$	$\Omega_3^{4 \rightarrow 5}(\varepsilon) \approx$ $\approx 2,2 \cdot 10^{-5}\varepsilon^{-2}$	$\Omega_3^{4 \rightarrow 6}(\varepsilon) \approx$ $\approx 3,5 \cdot 10^{-4}\varepsilon^{-2}$
0,3	0,024	$9,6 \cdot 10^{-5}$	0,0015	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,0039
0,1	0,22	0,0078	0,12	0,0022	0,035
0,03	2,4	0,96	15	0,025	0,39
0,01	22	78	$1,2 \cdot 10^3$	0,22	3,5
0,001	$2,2 \cdot 10^3$	$7,8 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^7$	22	$3,5 \cdot 10^2$

Автору неизвестны разностные схемы газовой динамики со вторым порядком численной сходимости на нестационарных ударных волнах. Но есть надежда, что практически пригодные разностные схемы такой точности удастся со временем построить, например на основе идей работы [11] или каким-нибудь другим способом.

Выводы

Из данных табл. 4, 5 можно сделать следующие выводы:

1. Переход от разностных схем первого порядка аппроксимации (с порядком численной сходимости $\alpha \approx 1/3$) к разностным схемам хотя бы второго порядка аппроксимации (с порядком численной сходимости $\alpha \approx 2/3$) удешевляет двумерные и трехмерные расчеты на несколько порядков. Поэтому от разностных схем с первым порядком аппроксимации конвективных членов пора отказываться (см. об этом также в обзоре [2]).

2. Для проведения расчетов с невысокой точностью порядка 10 % ($\varepsilon = 0,1$) переход от разностных схем второго порядка аппроксимации к разностным схемам третьего порядка аппроксимации (типа РРМ-метода) и тем более к схемам более высокого уровня точности экономически не оправдан.
3. Для проведения газодинамических расчетов с высокой точностью ($\varepsilon = 0,01$) использование разностных схем третьего порядка аппроксимации (с порядком численной сходимости $\alpha \approx \approx 1$) дает существенную экономию (более чем в 10 раз) по сравнению с разностными схемами второго порядка аппроксимации.
4. Гипотетические разностные схемы со вторым порядком численной сходимости в силу предположительно слишком большого числа вычислений, приходящихся на точку, экономически оправданны (и даже необходимы) только в случае потребности получения очень высокой точности, с интегральной погрешностью определения плотности существенно меньше 1 %. Задачи с аналогичным требуемым классом точности также встречаются на практике.

Конечно, все эти выводы основаны на очень приближенной экстраполяции результатов одномерных расчетов на двумерный и трехмерный случаи. Тем не менее, по мнению автора, для задач с существенно двумерным или трехмерным взаимодействием нестационарных ударных волн такая экстраполяция оправдана.

Приложение. Разностная схема типа крест с искусственной антидисперсией для одномерной лагранжевой газодинамики

Разностная схема с искусственной антидисперсией отличается от разностной схемы крест использованием антидиффузионных добавок к давлению, цель которых — уменьшить на два порядка фазовую ошибку [12]. При этом для подавления осцилляций, кроме искусственной вязкости, приходится вводить согласованное с антидисперсией диссипативное слагаемое третьего порядка малости [13] в виде параболического оператора с четвертыми пространственными производными. В одномерном плоском случае эта разностная схема описывается уравнениями

$$\frac{x_j^n - x_j^{n-1}}{\Delta t^{n-1/2}} = u_j^{n-1/2}; \quad (\text{П.1})$$

$$\eta_{j+1/2}^n \equiv \frac{1}{\rho_{j+1/2}^n} = \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{\Delta m_{j+1/2}}; \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{e_{j+1/2}^n - e_{j+1/2}^{n-1/2}}{0,5\Delta t^n} = -Q_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^{n-1/2} - u_j^{n-1/2}}{\Delta m_{j+1/2}} + \frac{G_j \left(D_j^n u^{n-1/2}\right)^2 + G_{j+1} \left(D_{j+1}^n u^{n-1/2}\right)^2}{2}; \quad (\text{П.3})$$

$$\frac{u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}}{\Delta t^n} = -\frac{\left(Q_{j+1/2}^n + \sigma_{j+1/2}^n\right) - \left(Q_{j-1/2}^n + \sigma_{j-1/2}^n\right)}{\Delta m_j}; \quad (\text{П.4})$$

$$Q_{j-1/2}^n = p_{j-1/2}^n + \Delta P_{j-1/2}^n + \varepsilon_{j-1/2}^n, \quad p_{j-1/2}^n = P \left(\rho_{j-1/2}^n, e_{j-1/2}^n\right); \quad (\text{П.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{e_{j+1/2}^{n+1/2} - e_{j+1/2}^n}{0,5\Delta t^n} = & -Q_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}} + \\ & + \frac{G_j \left(D_j^n u^{n-1/2}\right) \left(D_j^n u^{n+1/2}\right) + G_{j+1} \left(D_{j+1}^n u^{n-1/2}\right) \left(D_{j+1}^n u^{n+1/2}\right)}{2}; \quad (\text{П.6}) \end{aligned}$$

$$\Delta P_{j-1/2}^n = - \left(\Delta t^n \rho_{j-1/2}^n c_{j-1/2}^n \right)^2 \frac{\zeta_j^n \frac{p_{j+1/2}^n - p_{j-1/2}^n}{\Delta m_j} - \zeta_{j-1}^n \frac{p_{j-1/2}^n - p_{j-3/2}^n}{\Delta m_{j-1}}}{\Delta m_{j-1/2}}; \quad (\text{П.7})$$

$$\zeta_j^n = \frac{1}{(\Delta t^n)^2} \min \left\{ \frac{\left(x_j^n - x_{j-1}^n \right)^2 - \left(\Delta t^n c_{j-1/2}^n \right)^2}{12 \left(c_{j-1/2}^n \right)^2}; \frac{\left(x_{j+1}^n - x_j^n \right)^2 - \left(\Delta t^n c_{j+1/2}^n \right)^2}{12 \left(c_{j+1/2}^n \right)^2} \right\}; \quad (\text{П.8})$$

$$\sigma_{j+1/2}^n = \left(\rho_{j+1/2}^n c_{j+1/2}^n \right)^2 \frac{G_{j+1}^n D_{j+1}^n u^{n-1/2} - G_j^n D_j^n u^{n-1/2}}{\Delta m_{j+1/2}}; \quad (\text{П.9})$$

$$D_j^n u^{n\pm 1/2} = \frac{\left(\rho_{j+1/2}^n c_{j+1/2}^n \right)^2 \frac{u_{j+1}^{n\pm 1/2} - u_j^{n\pm 1/2}}{\Delta m_{j+1/2}} - \left(\rho_{j-1/2}^n c_{j-1/2}^n \right)^2 \frac{u_j^{n\pm 1/2} - u_{j-1}^{n\pm 1/2}}{\Delta m_{j-1/2}}}{\Delta m_j}; \quad (\text{П.10})$$

$$G_j = \min \left\{ \varphi_{j+1/2} \left(\frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{c_{j+1/2}^n} \right)^3; \varphi_{j-1/2} \left(\frac{x_j^n - x_{j-1}^n}{c_{j-1/2}^n} \right)^3 \right\}; \quad (\text{П.11})$$

$$\varphi_{j+1/2} = \frac{\left[1 - \left(\frac{\Delta t^n c_{j+1/2}^n}{x_{j+1}^n - x_j^n} \right)^2 \right] \left[4 - \left(\frac{\Delta t^n c_{j+1/2}^n}{x_{j+1}^n - x_j^n} \right)^2 \right]}{180 \frac{\Delta t^n c_{j+1/2}^n}{x_{j+1}^n - x_j^n}}. \quad (\text{П.12})$$

Формулы (П.1)–(П.6) обобщают полностью консервативную разностную схему типа крест [4, 5] на случай учета антидисперсии $\Delta P_{j+1/2}$ и сил сглаживания $\sigma_{j+1/2}$. Особый способ учета сил сглаживания в уравнениях (П.3) и (П.6), отличный от способа учета искусственной вязкости $\varepsilon_{j+1/2}$, обеспечивает неубывание энтропии за счет сглаживания. Формулы (П.7) и (П.8) определяют искусственную антидисперсию. Коэффициент антидисперсии (П.8) подобран так, чтобы фазовая ошибка имела четвертый порядок малости. Формулами (П.9)–(П.12) определен оператор сглаживания скорости третьего порядка малости. Коэффициент сглаживания (П.12) подобран так, чтобы фазовая ошибка за счет сглаживания уменьшилась еще на один порядок — такой критерий для выбора коэффициента сглаживания согласованно с коэффициентом антидисперсии предложил В. Н. Софронов. В описанных здесь расчетах использовалась искусственная вязкость $\varepsilon_{j+1/2}$ В. Ф. Куропатенко [14] с ограничителем вязкости Христенсена [15].

Такая разностная схема в линейном случае на равномерной по массе сетке при постоянной массовой скорости звука и отсутствии искусственной вязкости имеет третий порядок аппроксимации.

Список литературы

1. Бондаренко Ю. А. Устойчивость пятислойных и семислойных обратимых по времени операторных разностных схем // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 3. С. 28–36.
2. Бондаренко Ю. А., Башуров В. В., Яницкин Ю. В. Математические модели и численные методы для решения задач газовой динамики. Обзор зарубежной литературы: Препринт № 88. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
3. Woodward P., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54, No 1. P. 115–173.

4. *Бондаренко Ю. А.* Консервативные разностные схемы типа "крест" с положительно определенной кинетической энергией для лагранжевой газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 4. С. 19—23.
 5. *Бондаренко Ю. А.* Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
 6. *Каменецкий В. Ф., Семенов А. Ю.* Самосогласованное выделение разрывов при сквозных расчетах газодинамических течений // Там же. 1994. Т. 34, № 10. С. 1489—1502.
 7. *Мальшев А. П.* Монотонная разностная схема повышенной точности для численного моделирования волновых процессов // Там же. 1996. Т. 36, № 9. С. 155—158.
 8. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.
 9. *Colella Ph., Woodward P. R.* The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54, No 1. P. 174—201.
 10. *Остапенко В. В.* О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 10. С. 1201—1212.
 11. *Остапенко В. В.* О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Там же. 2000. Т. 40, № 12. С. 1857—1874.
 12. *Turkel E.* Phase error and stability of second order methods for hyperbolic problems. I // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 15. P. 226—250.
 13. *Макаренко А. С., Москальков М. И.* Точность и дисперсия разностных схем // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 999—1003.
 14. *Куропатенко В. Ф.* О разностных схемах для уравнений гидродинамики // Тр. Матем. института АН СССР. Т. 74. Разностные методы решения задач математической физики. Ч. 1. М., 1966. С. 107—137.
 15. *Christensen R. B.* High resolution hydrodynamics using artificial viscosity // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1996. Вып. 4. С. 89—93.
-