

УДК 519.6

## МЕТОД РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СЕТКАХ

С. С. Соколов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается методика расчета двумерных нестационарных упругопластических задач на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках. Методика базируется на лагранжевой газодинамической методике ДМК, используется нерегулярная численная сетка, состоящая из выпуклых многоугольников с произвольным числом вершин, которые остаются выпуклыми в процессе решения всей задачи. Для аппроксимации уравнений используется явная конечно-разностная схема. Методика предназначена для решения задач механики сплошных сред с большими деформациями в областях со сложной геометрией.

### Введение

При решении нестационарных задач механики сплошных сред широкое распространение получили численные методы. Единого, универсального, подхода к численному моделированию многомерных нестационарных упругопластических течений для широкого класса практически важных задач нет. Это объясняется некоторыми проблемами, связанными с пространственной аппроксимацией определяющих уравнений, которые являются нелинейными, с поддержанием приемлемой счетной сетки, введением сложных моделей сред, адекватно описывающих реологические зависимости для моделируемых материалов и т. д. Для решения указанных задач создано много достаточно хороших методик, но класс задач слишком широк, и это требует как постоянного усовершенствования существующих методик, так и разработки новых. Наибольшее распространение получили методы конечных разностей и методы конечных элементов. Для расчета нестационарных упругопластических течений с двумя и тремя пространственными переменными широкое применение получили разностные методы типа метода Уилкинса [1]. В литературе описано большое количество методик для решения двумерных нестационарных задач механики сплошных сред, как в газодинамическом, так и в упругопластическом приближении, например [2–5]. Под руководством И. Д. Софронова в начале 70-х годов во ВНИИЭФ стали разрабатываться двумерные методики на нерегулярных многоугольных сетках ДМК и МЕДУЗА [6, 7], которые в дальнейшем активно развивались и совершенствовались.

Методика ДМК-УП — явная двумерная конечно-разностная методика, предназначенная для численного решения двумерных нестационарных задач газовой динамики с учетом упругопластических свойств веществ для адиабатических течений в областях достаточно сложной структуры на нерегулярных многоугольных и регулярных четырехугольных лагранжевых сетках. Использование счетной сетки в виде многоугольников произвольной конфигурации значительно упрощает возможность ее построения в областях произвольной формы. Методика ДМК-УП базируется на методике ДМК, предназначенной для расчета двумерных газодинамических задач [6–8] и использует все ее основные принципы.

Практика проведения расчетов показала, что совместное использование регулярных и нерегулярных сеток дает ряд преимуществ по сравнению с расчетами на однотипных сетках. В этом случае вся начальная область моделируемой задачи разбивается на счетные области. В каждой счетной

области строится независимая от других областей нерегулярная выпуклая многоугольная или регулярная четырехугольная пространственная сетка [6–8]. Выбор счетной сетки для каждой области зависит от характера предполагаемого движения системы. В тех областях, где движения не сопровождаются большими сдвиговыми деформациями или вихревыми течениями, используется обычно регулярная четырехугольная лагранжева сетка. В остальных областях используется нерегулярная многоугольная сетка. Такое разделение по сетке в основном продиктовано требованием экономичности счета. Расчет на регулярной четырехугольной сетке примерно в полтора раза более экономичен по затратам времени ЦП ЭВМ по сравнению с расчетами на нерегулярной многоугольной сетке. Расчет на нерегулярной многоугольной сетке является более дорогостоящим из-за способа хранения и развертывания информации о связях между узлами и ячейками.

Как известно, при расчете задач с большими сдвиговыми деформациями и вихревыми течениями для лагранжевых методик существует проблема поддержания выпуклости ячеек. В рассматриваемой методике эта проблема решается с помощью механизма *упругого удара* [6]. Нерегулярные сетки позволяют вводить аппарат локальных дроблений и объединений счетных ячеек [9] при сильных сдвиговых или вихревых течениях или при уменьшении счетного шага. Это позволяет проводить расчеты в лагранжевой постановке для движений с большими сдвиговыми деформациями, струйными и вихревыми течениями. По методике можно проводить расчеты задач как с осесимметричными, так и с плоскими деформациями.

Разностная схема строится аналогично схеме Неймана. В вершинах ячеек, двигающихся вместе со средой, определяются массы узлов, ускорения и скорости. К центрам ячеек относятся внутренняя энергия, плотность вещества, давление, значения компонент дивергента тензора напряжений, тензора скоростей деформаций, тензора деформаций, меры поврежденности среды и ряд других величин, которые характеризуют те или иные реализованные кинетические процессы. Массы ячеек и узлов в процессе счета остаются постоянными. В каждом внутреннем узле нерегулярной многоугольной сетки сходятся три ячейки, для регулярной четырехугольной сетки таких ячеек четыре. Численная методика решения уравнений движения в упругопластическом приближении основана на методе Уилкинса [1], отличия в основном касаются аппроксимации производных по пространству. Расчет контактного взаимодействия осуществляется как на согласованных, так и несогласованных разностных сетках, что позволяет описывать процессы деформирования среды при достаточно больших относительных смещениях контактных границ (КГ).

Методика ДМК-УП оснащена моделями для описания упругопластических материалов с учетом их упрочнения и разупрочнения, моделями разрушения, определяемого как предельными состояниями веществ, так и кинетическими соотношениями. В методике ДМК-УП реализовано несколько моделей для расчета кинетических процессов взрывчатого превращения ВВ. Методика позволяет рассчитывать задачи как газодинамики, так и упругопластичности в различных счетных областях. Для этого в ней реализован метод расчета движения вещества вдоль выделенных КГ.

### Конечно-разностная схема

При рассмотрении упругопластических течений будем ограничиваться классом задач в рамках сплошной сжимаемой нетеплопроводной среды. Уравнения, описывающие движения сплошной сжимаемой среды, отражают основные законы сохранения механики [10, 11] (массы, количества энергии, количества движения и его момента). Дифференциальные уравнения движения сплошной изотропной среды, моделируемой в упругопластическом приближении, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \vec{U}; \\ \rho \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\operatorname{grad}(P + q) + \operatorname{div} S + \rho \vec{g}; \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -(P + q) \frac{\operatorname{div} \vec{U}}{\rho} + \frac{1}{\rho} S_p(SD); \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{U}, \end{aligned}$$

где  $S$  — девиатор тензора напряжений;  $D$  — тензор скоростей деформации;  $S_p(SD)$  — первый инвариант тензора  $(SD)$ ;  $\rho$  — плотность вещества;  $\varepsilon$  — внутренняя энергия;  $\vec{U} = (u, v)$  — вектор скорости;  $\vec{r}(x, y)$  — радиус-вектор;  $\vec{g}(x, y)$  — ускорение силы тяжести;  $P = P(\rho, \varepsilon)$  — давление;  $t$  — время;  $q$  — искусственная вязкость.

Для замыкания системы дифференциальных уравнений сплошной сжимаемой среды используются уравнение состояния среды и уравнения физических и кинематических соотношений между компонентами тензора напряжений, компонентами тензора деформаций и скоростей деформаций.

Если для описания среды задается газодинамическая модель, то  $S = 0$ . Если для описания среды используется упругопластическая модель, то  $S = S^{yn}$ .

Компоненты тензора скоростей деформаций для осесимметричных деформаций вычисляются следующим образом:  $\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{v}{y}$ ;  $\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ .

Для плоских деформаций  $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0$ ;  $\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ .

Идеальная упругопластическая модель является одной из простейших моделей среды, но она наиболее часто применяется при численном моделировании нестационарных упругопластических течений. Для ее использования необходимо всего две константы — предел текучести и модуль сдвига (либо коэффициент Пуассона).

Для определения девиаторной составляющей тензора напряжения в области упругих деформаций используется закон Гука в дифференциальной форме:  $\frac{\delta S^{yn}}{\delta t} = 2G \left( D - \frac{1}{3} S_p D \right)$ , где  $G$  — модуль сдвига;  $\frac{\delta}{\delta t}$  — производная (Яумана) по времени вдоль направления движения. В области пластических деформаций для корректировки девиатора тензора напряжений используется условие текучести Мизеса:  $\frac{3}{2} S_{ij}^{yn} S_{ij}^{yn} = Y^2$ , где  $Y$  — предел текучести, который может быть как константой (для идеально-пластических сред), так и некоторой функцией (для материалов с упрочнением и разупрочнением).

Если для описания материала используется упруговязкопластическая модель, то

$$P = P(\rho, \varepsilon) + P^B; \quad S = S^{yn} + S^B; \quad P^B = \frac{1}{3} \mu_1 S_p D; \quad S^B = \mu_2 \left( D - \frac{1}{3} S_p D \right),$$

где  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты первой и второй динамической вязкости.

Для *размазывания* ударных волн используется искусственная вязкость. В качестве искусственной вязкости рассмотрим комбинацию линейной и квадратичной вязкостей:  $q = q_L + q_{KB}$ ,

$$q_L = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} \geq 0; \\ c_{зв} h \left| \operatorname{div} \vec{U} \right| \rho a_L & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} < 0; \end{cases} \quad q_{KB} = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} \geq 0; \\ a_{KB} h^2 \rho \left( \left| \operatorname{div} \vec{U} \right| \right)^2 & \text{при } \operatorname{div} U < 0, \end{cases}$$

где  $h$  — характерный размер ячеек;  $a_L$  — коэффициент линейной вязкости;  $a_{KB}$  — коэффициент квадратичной вязкости;  $c_{зв}$  — скорость звука.

Разностная схема, используемая в методике для аппроксимации дифференциальных уравнений законов сохранения, строится аналогично схеме Неймана. Каждый узел разностной сетки (расположен в вершине многоугольника-ячейки) описывается координатами и имеет скорость, которая считается постоянной в окрестности узла. Масса ячейки, удельная внутренняя энергия, плотность вещества, тензор напряжений, тензор скоростей деформаций, искусственная вязкость относятся к ячейкам сетки и считаются постоянными внутри. Конечно-разностная схема для системы получается путем интегрирования дифференциальных уравнений по объему  $V$  (ячейки или относящемуся к узлу), ограниченному поверхностью  $\Omega$ , с применением формулы Гаусса—Остроградского.

Для расчета компонент тензора скоростей деформаций рассмотрим  $N$ -угольную ячейку (рис. 1) и четырехугольную ячейку (рис. 2). В узлах ячейки (вершинах многоугольника) определены скорости.

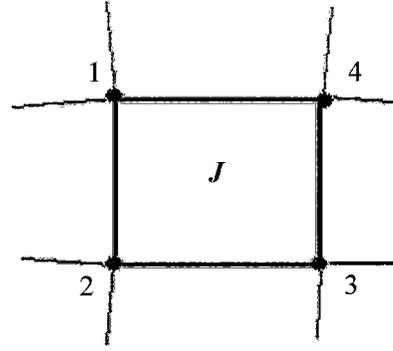
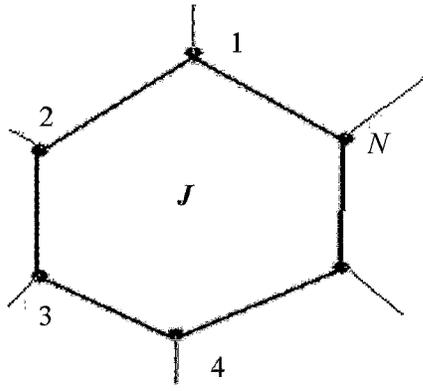


Рис. 1. Нерегулярная многоугольная ( $N$ -угольная) ячейка      Рис. 2. Регулярная четырехугольная ячейка

Для определения компонент тензора скоростей деформации в осесимметричном случае можно получить следующие конечно-разностные уравнения:

$$\begin{aligned} (\dot{\epsilon}_{xx}^n)^\alpha &= \frac{1}{4V^n} \sum_{i=1}^N (u_i + u_{i+1})^\alpha (y_i^2 - y_{i+1}^2)^n; \\ (\dot{\epsilon}_{yy}^n)^\alpha &= -\frac{1}{4V^n} \sum_{i=1}^N \left[ (v_i + v_{i+1})^\alpha (y_i + y_{i+1})^n (x_i - x_{i+1})^n + \frac{4}{K} B^n v_i^\alpha \right]; \\ (\dot{\epsilon}_{yx}^n)^\alpha &= \frac{1}{8V^n} \sum_{i=1}^N \left[ (v_i + v_{i+1})^\alpha (y_i^2 - y_{i+1}^2)^n - (u_i + u_{i+1})^\alpha (y_i + y_{i+1})^n (x_i - x_{i+1})^n - \frac{4}{K} B^n u_i^\alpha \right]; \\ (\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^n)^\alpha &= \frac{B^n}{KV^n} \sum_{i=1}^N v_i^\alpha, \end{aligned}$$

где  $N$  — количество узлов ячейки, в частности, для регулярной четырехугольной сетки  $N = 4$ ;  $B$  — площадь ячейки;  $V$  — объем ячейки. В формулах принято, что  $N + 1 \equiv 1$ . Индекс  $n$  означает, что оператор  $\text{div}$  относится к моменту времени  $t^n$ , т. е. в этот момент производится интегрирование по пространственным переменным. Индексом  $\alpha$  обозначен момент времени, к которому отнесены подынтегральные функции. Для того чтобы схема была консервативной, необходимо положить  $\alpha = n + 1/2$ .

В случае задачи с плоской деформацией компоненты тензора скоростей деформаций определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{\epsilon}_{xx}^n)^\alpha &= \frac{1}{2B^n} \sum_{i=1}^N (u_i + u_{i+1})^\alpha (y_i - y_{i+1})^n; & (\dot{\epsilon}_{yy}^n)^\alpha &= \frac{1}{2B^n} \sum_{i=1}^N (v_i + v_{i+1})^\alpha (x_i - x_{i+1})^n; \\ (\dot{\epsilon}_{yx}^n)^\alpha &= \frac{1}{4B^n} \sum_{i=1}^N (v_i + v_{i+1})^\alpha (y_i - y_{i+1})^n + (u_i + u_{i+1})^\alpha (x_i - x_{i+1})^n; & (\dot{\epsilon}_{zz}^n)^\alpha &= 0; \end{aligned}$$

По аналогии с тензором скоростей деформации рассматривается тензор скоростей вращения:  $\omega_{x_i x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_{x_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial U_{x_j}}{\partial x_i} \right)$ , где каждый из индексов  $x_i, x_j$  может иметь значения  $x$  или  $y$ .

Для аппроксимации уравнения движения рассмотрим отдельно случаи плоской и осесимметричной деформации. Для этого рассмотрим два фрагмента разностных сеток — нерегулярной многоугольной (рис. 3) и регулярной четырехугольной (рис. 4) — в окрестности узла  $i_0$ , для которого будет определен вектор ускорения. Точки  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_K$  являются вершинами многоугольных ячеек, прилегающих к узлу  $i_0$ . Для внутренних узлов регулярных четырехугольных сеток  $K = 4$ ,

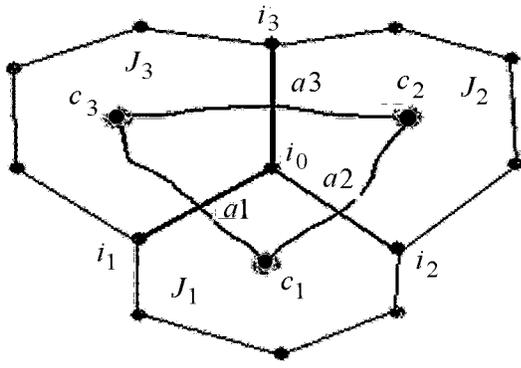


Рис. 3. Фрагмент нерегулярной многоугольной сетки

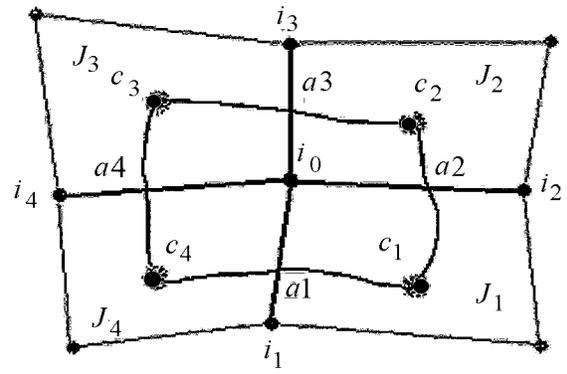


Рис. 4. Фрагмент регулярной четырехугольной сетки

для нерегулярных многоугольных сеток  $K = 3$ . Точки  $a_1, a_2, \dots, a_K$  являются серединами соответственно отрезков  $i_0 i_1, i_0 i_2, \dots, i_0 i_K$  для случая плоской деформации и серединами поверхностей вращения для случая осесимметричных деформаций. Узлу  $i_0$  со стороны каждой прилегающей к нему ячейки  $c_j$  приписывается масса вещества  $\frac{1}{2N_{c_j}} m_{c_j}$ . Объем вещества, приписываемый узлу со стороны всех соседних ячеек, ограничен поверхностью  $\Omega$ .

В результате интегрирования уравнения движения по объему получим следующие конечно-разностные уравнения для вычисления ускорения в узлах сетки в случае осесимметричной деформации:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i_0}^n &= \frac{1}{4m_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xx}^{c_j} - \sigma_{xx}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_j}^2 - y_{i_0}^2)^n - (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_0} + y_{i_j})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{c_j}^n}{N_{c_j}} (\sigma_{xy}^{c_j})^{n+1/2} \right] + g_x; \\ \dot{v}_{i_0}^n &= \frac{1}{4m_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_j}^2 - y_{i_0}^2)^n - (\sigma_{yy}^{c_j} - \sigma_{yy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_0} + y_{i_j})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{c_j}^n}{N_{c_j}} (2\sigma_{yy}^{c_j} + \sigma_{xx}^{c_j})^{n+1/2} \right] + g_r, \end{aligned}$$

где  $m_{i_0}$  — масса узла  $i_0$ ;  $\sigma_{x_i x_j}^{c_j}$  — значения компонент тензора напряжений с учетом вязкости в ячейке  $c_j$ , прилегающей к узлу  $i_0$ ;  $\tau^n$  — счетный шаг по времени.

В случае задач с плоской деформацией получим следующие конечно-разностные уравнения для вычисления ускорения в узлах сетки:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i_0}^n &= \frac{1}{2\bar{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left( (\sigma_{xx}^{c_j} - \sigma_{xx}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_j} - y_{i_0})^n - (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (x_{i_j} - x_{i_0})^n \right) + g_x; \\ \dot{v}_{i_0}^n &= \frac{1}{2\bar{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left( (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_j} - y_{i_0})^n - (\sigma_{yy}^{c_j} - \sigma_{yy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (x_{i_j} - x_{i_0})^n \right) + g_y, \end{aligned}$$

где  $\bar{m}_{i_0}$  — масса узла  $i_0$  в плоском случае.

После вычисления ускорений находятся скорости на новый момент времени, затем — новые координаты узлов сетки:

$$u_{i_0}^{n+1/2} = u_{i_0}^{n-1/2} + \dot{u}_{i_0}^n \tau^n, \quad v_{i_0}^{n+1/2} = v_{i_0}^{n-1/2} + \dot{v}_{i_0}^n \tau^n; \quad x_{i_0}^{n+1} = x_{i_0}^n + u_{i_0}^{n+1/2} \tau^n, \quad y_{i_0}^{n+1} = y_{i_0}^n + v_{i_0}^{n+1/2} \tau^n.$$

Согласованные (по временному шагу) операторы дивергенции напряжений и скоростей позволяют получить консервативную конечно-разностную схему. Но стоит отметить, что в осесимметричном

случае полученная таким образом конечно-разностная схема не дает сохранения одномерности движения для сферического схождения оболочек. Нарушение одномерности движения в сферическом тесте связано со смещением фактической точки приложения равнодействующей сил к поверхности вращения в узел  $i_0$ . В результате этого направление ускорения движения вещества, приписываемого узлу, определяется в другой точке поверхности.

Для сохранения сферической симметрии в одномерном движении рассмотренная выше конечно-разностная схема была модифицирована. Модификация коснулась только определения направлений вектора ускорения в узле с сохранением его величины (для осесимметричного случая). В модифицированной схеме дополнительно вычисляются направления ускорения движения вещества в узле сетки по схеме

$$\begin{aligned} d\dot{u}_{i_0}^n &= \frac{1}{2\bar{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left( (\sigma_{xx}^{c_j} - \sigma_{xx}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_j} - y_{i_0})^n - (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{c_j}^n}{N_{c_j}} \frac{B_{c_j}^n}{V_{c_j}} (\sigma_{xy}^{c_j})^{n+1/2} \right) + g_x; \\ d\dot{v}_{i_0}^n &= \frac{1}{2\bar{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left( (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (y_{i_j} - y_{i_0})^n - (\sigma_{yy}^{c_j} - \sigma_{yy}^{c_{j+1}})^{n+1/2} (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_{c_j}^n}{N_{c_j}} \frac{B_{c_j}^n}{V_{c_j}} (2\sigma_{yy}^{c_j} + \sigma_{xx}^{c_j})^{n+1/2} \right) + g_y. \end{aligned}$$

Тогда ускорение в узле будет определяться следующим образом:

$$uu = \sqrt{\dot{u}_{i_0}^n \dot{u}_{i_0}^n + \dot{v}_{i_0}^n \dot{v}_{i_0}^n}; \quad dd = \sqrt{d\dot{u}_{i_0}^n d\dot{u}_{i_0}^n + d\dot{v}_{i_0}^n d\dot{v}_{i_0}^n}; \quad \dot{u}_{i_0}^n = d\dot{u}_{i_0}^n \frac{uu}{dd}; \quad \dot{v}_{i_0}^n = d\dot{v}_{i_0}^n \frac{uu}{dd}.$$

Такая модификация конечно-разностной схемы для уравнения движения позволяет сохранять одномерность движения в сферически-симметричных течениях и обладает хорошими консервативными свойствами.

Для вычисления компонент девиатора тензора напряжений на новый момент времени после интегрирования по объему ячейки получим следующие конечно-разностные формулы:

$$\left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^{yp} = \left( S_{x_i x_j}^n \right)^{yp} + 2G^n \tau^n \left( \dot{\varepsilon}_{x_i x_j} - \frac{1}{3} \dot{V} \delta_{ij} \right)^{n+1/2} + R_{x_i x_j}^{n+1/2} \tau^n,$$

где  $R_{x_i x_j} = (\omega_{x_j x_i} S_{x_i x_j}^{yp} - \omega_{x_i x_k} S_{x_i x_k}^{yp})$  — поправки на поворот среды как твердого тела [1];  $\omega_{x_i x_j}$  — тензор скоростей вращения;  $\dot{\varepsilon}_{x_i x_j}$  — тензор скоростей деформации;  $G^n$  — модуль сдвига.

Если  $J^2 = \frac{3}{2} \left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^{yp} \left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^{yp} > (Y^n)^2$ , то в соответствии с законом Мизеса осуществляем корректировку компонент девиатора тензора напряжений:  $\left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^{yp} = \left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^{yp} Y^n / J$ .

Затем вычисляем компоненты тензора вязких напряжений:  $S_{x_i x_j}^B = \mu \left( \dot{\varepsilon}_{x_i x_j} - \frac{1}{3} \dot{V} \delta_{ij} \right)$ ,  $P^B = \frac{1}{3} \mu_1 \dot{V}$  и находим компоненты девиатора тензора напряжений на  $(n+1)$ -й момент времени:  $S_{x_i x_j}^{n+1} = \left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^{yp} + \left( S_{x_i x_j}^{n+1} \right)^B$ . После этого вычисляем приращение энергии сдвиговых деформаций и энергию упругих сдвиговых деформаций:

$$\Delta E_{сд}^n = \frac{1}{\rho^n} \left( S_{xx}^n \dot{\varepsilon}_{xx}^{n+1/2} + S_{yy}^n \dot{\varepsilon}_{yy}^{n+1/2} + S_{\theta\theta}^n \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{n+1/2} + 2S_{xy}^n \dot{\varepsilon}_{xy}^{n+1/2} \right) \tau^n; \quad E_{yp}^n = \frac{1}{4\rho^n G^n} S_{x_i x_j}^{yp} S_{x_i x_j}^{yp}.$$

Для вычисления давления на  $(n + 1)$ -й момент времени необходимо определить плотность и внутреннюю энергию на этот момент времени:

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} &= \frac{m^n}{V^{n+1}}; & E^{n+1} &= E^n - \frac{P^n + q^n}{\rho^n} \operatorname{div} \left( u^{n+1/2} \right) \tau + 0,5 \Delta E_{\text{сд}}^n; & E_{\Gamma}^{n+1} &= E^{n+1} - E_{\text{уп}}^n; \\ P^\alpha &= P \left( \rho^{n+1}, E_{\Gamma}^{n+1} \right); & E^\alpha &= E^{n+1} - \frac{P^\alpha + q^{n+1}}{2\rho^{n+1}} \operatorname{div} \left( u^{n+1} \right) \tau + \frac{P^n + q^n}{2\rho^n} \operatorname{div} \left( u^{n+1/2} \right) \tau + 0,5 \Delta E_{\text{сд}}^{n+1}; \\ E_{\Gamma}^\alpha &= E^\alpha - E_{\text{уп}}^{n+1}; & P^{n+1} &= P \left( \rho^{n+1}, E_{\Gamma}^\alpha \right) + P^B. \end{aligned}$$

Шаг по времени  $\tau$  определяется в соответствии с условием устойчивости Куранта [1]:

$$c_{\text{зв}} = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{dS=0}, \quad \tau = \frac{a_{\text{квп}} h}{c^*} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \mu_1^2 / (c^{*2} \rho^2 a_{\text{квп}}^2 h^2)}, \quad c^* = \sqrt{c_{\text{зв}}^2 + \frac{4G}{3\rho} + 2\sqrt{\frac{q}{\rho}}}.$$

### Расчет движения КГ

Контактная поверхность, разделяющая две счетные области, является лагранжевой поверхностью скольжения двух веществ. На этой границе может терпеть разрыв тангенциальная составляющая вектора скорости. Тангенциальные разрывы могут образовываться при прохождении ударных, упругих и пластических волн через границу раздела двух сред. Вследствие этого возникает разрыв в касательной составляющей вектора скорости движения двух веществ по разные стороны от границы их раздела. Методика расчета движения КГ основана на численном интегрировании уравнения движения вдоль поверхности границ счетных областей (так же, как для внутренних точек). На согласованных по массе граничных ячейках счетных областей, расположенных по разные стороны от КГ, такой способ расчета дает второй порядок точности по времени и пространству.

Рассмотрим фрагмент КГ Т1-Т2 между счетными областями МО1 и МО2 (рис. 5). В каждой математической области имеется своя счетная сетка (либо нерегулярная многоугольная, либо регулярная четырехугольная). Граничные ячейки имеют по два узла, лежащих на КГ. Узлы, лежащие на поверхности контакта областей, разделены на *основные* и *вспомогательные*. Между основными узлами могут находиться вспомогательные узлы соседней счетной области. В каждой ячейке, прилегающей к границе, известны компоненты тензора напряжения, плотности, массы, координаты граничных и приграничных узлов, их скорости на момент времени  $t^n$ . Для определения положения границы на момент времени  $t^{n+1}$  сначала вычисляются ускорения граничных узлов со стороны каждой счетной области в предположении наличия между ними вакуумного зазора (на границе задан нулевой тензор напряжения). Ускорения граничных узлов вычисляются по согласованной с внутренними узлами конечно-разностной схеме.

Рассмотрим на рис. 5 три соседних узла  $k_1, k_0, k_3$ , лежащих на границе, и внутренний узел  $k_2$ , являющийся соседом узла  $k_0$ . Точки  $J_1, J_2$  обозначают центры масс приграничных ячеек. То-

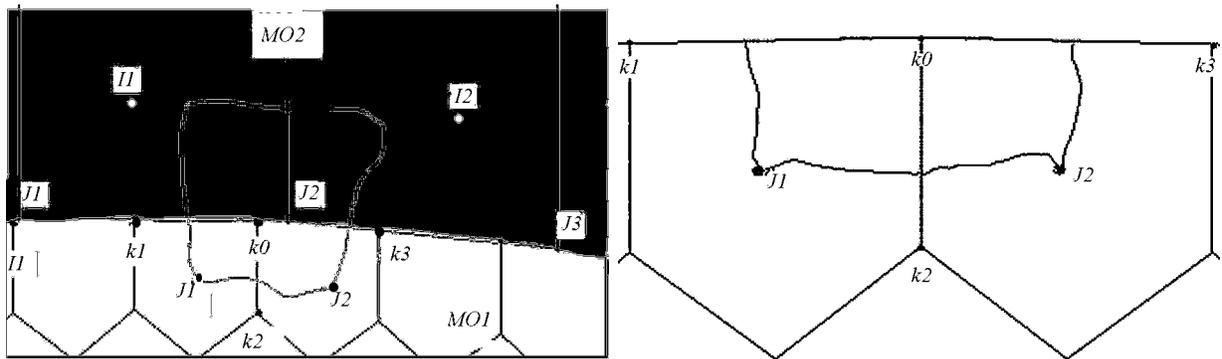


Рис. 5. Фрагмент границы для интегрирования уравнения движения (слева) и фрагмент КГ (справа)

где ускорение узла  $k_0$  для осесимметричного случая ( $Oy$  — ось вращения) определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (a_x)_{k_0} &= \frac{1}{4m_{k_0}} \left[ (\sigma_{xx}^{J1} - \sigma_{xx}^{J2}) (y_{k_0}^2 - y_{k_2}^2) + \sigma_{xx}^{J1} (y_{k_1}^2 - y_{k_0}^2) + \sigma_{xx}^{J2} (y_{k_0}^2 - y_{k_3}^2) + (\sigma_{xy}^{J1} - \sigma_{xy}^{J2}) (x_{k_2} - x_{k_0}) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (y_{k_2} + y_{k_0}) + \sigma_{xy}^{J1} (x_{k_0} - x_{k_1}) (y_{k_0} + y_{k_1}) + \sigma_{xy}^{J2} (x_{k_3} - x_{k_0}) (y_{k_3} + y_{k_0}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \sigma_{xy}^{Jn} B_{J_n} \frac{1}{\overline{M}_{J_n}}; \\
 (a_y)_{k_0} &= \frac{1}{4m_{k_0}} \left[ (\sigma_{xy}^{J1} - \sigma_{xy}^{J2}) (y_{k_0}^2 - y_{k_2}^2) + \sigma_{xy}^{J1} (y_{k_1}^2 - y_{k_0}^2) + \sigma_{xy}^{J2} (y_{k_0}^2 - y_{k_3}^2) + \right. \\
 &\quad \left. + (\sigma_{yy}^{J1} - \sigma_{yy}^{J2}) (x_{k_2} - x_{k_0}) (y_{k_2} + y_{k_0}) + \sigma_{yy}^{J1} (x_{k_0} - x_{k_1}) (y_{k_0} + y_{k_1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_{yy}^{J2} (x_{k_3} - x_{k_0}) (y_{k_3} + y_{k_0}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (\sigma_{xx}^{Jn} + 2\sigma_{yy}^{Jn} - 3p^{Jn}) B_{J_n} \frac{1}{\overline{M}_{J_n}},
 \end{aligned}$$

где  $B_{J_n}$  — площадь многоугольника  $J_n$ ;  $\overline{M}_{J_n}$  — масса вещества, относящаяся к ячейке  $J_n$ ;  $m_{k_0} = \sum_{n=1}^2 \frac{\overline{M}_{J_n}}{N_{J_n}}$  — масса узла  $k_0$ ,  $N_{J_n}$  — количество вершин многоугольника  $J_n$ ;  $a_x, a_y$  — ускорения узлов вдоль оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Скорость движения точек КГ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_{k_0}^{n+1} &= u_{k_0}^n + \left[ (a_x)_{k_0} m_{k_0} + (da_x)_{l_1} (dm)_{l_1} + (da_x)_{l_k} (dm)_{l_k} + \sum_{\xi=2}^{k-1} (da_x)_{l_\xi} m_{l_\xi} \right] \tau \frac{1}{\overline{M}_{k_0}}; \\
 v_{k_0}^{n+1} &= v_{k_0}^n + \left[ (a_y)_{k_0} m_{k_0} + (da_y)_{l_1} (dm)_{l_1} + (da_y)_{l_k} (dm)_{l_k} + \sum_{\xi=2}^{k-1} (da_y)_{l_\xi} m_{l_\xi} \right] \tau \frac{1}{\overline{M}_{k_0}}; \\
 \widetilde{M}_{k_0}^{n+1} &= m_{k_0} + (dm)_{l_1} + (dm)_{l_k} + \sum_{\xi=2}^{k-1} m_{l_\xi},
 \end{aligned}$$

где  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  — нормаль к поверхности в точке  $k_0$ ;  $k$  — количество узлов  $l_i$  вспомогательного слоя, попавших на поверхность основного слоя, ограниченного серединами поверхностей вращения ( $k_0 k_1$  и  $k_0 k_3$ );  $(da_x)_{l_i} = [(a_x)_{l_i} n_x + (a_y)_{l_i} n_y] n_x$  — проекция нормальной (в точке  $k_0$ ) составляющей вектора ускорения узла  $l_i$  вспомогательного слоя на ось  $Ox$ ;  $(da_y)_{l_i} = [(a_x)_{l_i} n_x + (a_y)_{l_i} n_y] n_y$  — проекция нормальной (в точке  $k_0$ ) составляющей вектора ускорения узла  $l_i$  вспомогательного слоя на ось  $Oy$  ( $Or$  в осесимметричном случае);  $(dm)_{l_1}, (dm)_{l_k}$  — доли масс узлов  $l_1, l_k$  вспомогательного слоя, попавших на поверхность, относящуюся к основному узлу  $k_0$ .

После вычисления скорости движения КГ определяется ее положение на новый момент времени, по известным координатам на  $n$ -й момент времени:

$$x_{k_0}^{n+1} = x_{k_0}^n + u_{k_0}^{n+1} \tau; \quad y_{k_0}^{n+1} = y_{k_0}^n + v_{k_0}^{n+1} \tau.$$

При расчете граничных узлов счетной области со стороны основного слоя используются координаты и скорости с КГ. При расчете граничных узлов счетной области со стороны вспомогательного слоя КГ выступает как поверхность скольжения граничных узлов (как жесткая поверхность скольжения на данный момент времени).

## Алгоритмы локальной структурной перестройки

Одной из проблем в случае использования лагранжева подхода для численного моделирования задач является поддержание приемлемой счетной сетки в процессе их численного решения. Особенно актуальна эта проблема при проведении расчетов газодинамических или упругопластических задач с большими сдвиговыми деформациями, струйных и вихревых течений на лагранжевых сетках.

Существуют различные способы для поддержания выпуклости счетных ячеек в процессе численного моделирования двумерных задач, широко используемые в двумерных счетных методиках: введение различного типа искусственных вязкостей (угловых, контурных в методике Д) [3]; глобальные и локальные перестройки счетных сеток с последующими пересчетами счетных величин. В методике ДМК-УП для поддержания выпуклости ячеек в процессе счета на регулярных четырехугольных и нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках используется методика *упругого удара* [6] и методика локального дробления и объединения счетных ячеек [9].

Другой дополнительный алгоритм поддержания приемлемых нерегулярных многоугольных ячеек в процессе численного решения двумерных задач основан на локальных структурных перестройках счетной сетки. Нерегулярные многоугольные сетки позволяют вводить аппарат таких перестроек — менять количество узлов в ячейках и условия прямого контакта между ячейками. В процессе численного решения иногда возникают ситуации, когда две соседние ячейки, разделенные общим ребром, становятся перехлестнутыми, с выворачиванием разделяющего их ребра. В этом случае образуется тенденция к потере прямого контактного взаимодействия между этими ячейками и возникновению контакта между двумя другими близлежащими ячейками, так что необходимо разрешить сетке локально структурно перестроиться. Осуществляется также "приход" внутренних точек на границы и "уход" граничных точек с границ внутрь счетной области.

Рассмотрим алгоритм, который обеспечивает структурные перестройки нерегулярной многоугольной сетки, когда две соседние счетные ячейки "выворачиваются" по общему ребру, — в этом случае происходит потеря прямого контакта между этими ячейками и устанавливается прямое взаимодействие двух других соседних ячеек, прилегающих к ним. На рис. 6 приведена стандартная ситуация, когда происходит смена соседства между внутренними ячейками по данному алгоритму. Схема слева соответствует моменту времени  $t^n$ , когда ячейки с номерами  $JU2$  и  $JU4$  имели непосредственный контакт друг с другом по ребру  $IK-IU2$ . В результате движения в момент времени  $t^{n+1}$  узлы  $IK$  и  $IU2$  взаимно перехлестнулись. Узел  $IK$  из ячейки  $JU3$  попадает в ячейку  $JU4$ , а узел  $IU2$  — из ячейки  $JU4$  в ячейку  $JU3$ . Происходит прямое столкновение между ячейками  $JU4$ ,  $JU3$ , а контакт между ячейками  $JU1$ ,  $JU2$  исчезает. В этом случае осуществляется структурная локальная перестройка сетки, как это показано на рис. 6 справа: убирается контакт между ячейками  $JU1$ ,  $JU2$  и вводится контакт между ячейками  $JU4$ ,  $JU3$  через ребро  $K-I2$ . Точка  $K$  определяется из условия пересечения ребер  $IK-IU1$  и  $IU2-IU4$ , точка  $I2$  — из условия пересечения ребер  $IK-IU3$  и  $IU2-IU5$ . Производится переопределение масс узлов  $K$  и  $I2$  за счет перераспределения масс узлов  $IK-IU2$

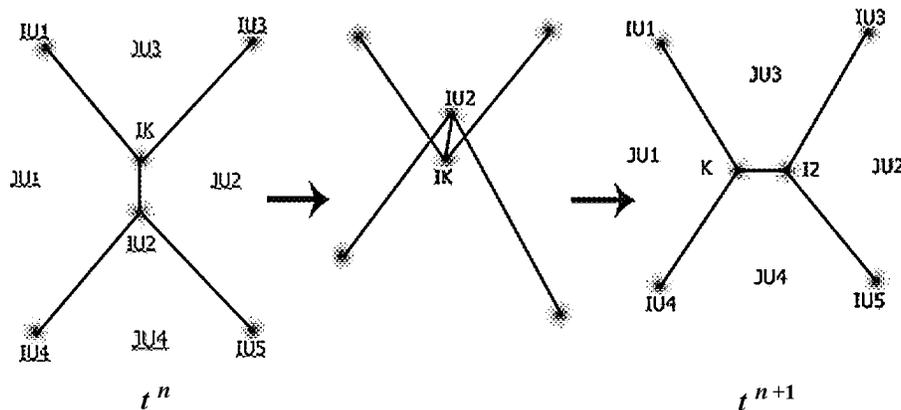


Рис. 6. Схема структурной перестройки внутренних узлов

по их долям, приходящимся со стороны каждой ячейки, что обеспечивает сохранение масс узлов рассмотренных ячеек:  $m_K = \frac{M_{JU3}}{2N_{JU3}} + 2\frac{M_{JU1}}{N_{JU1}} + \frac{M_{JU4}}{2N_{JU4}}$ ;  $m_{I2} = \frac{M_{JU3}}{2N_{JU3}} + 2\frac{M_{JU2}}{N_{JU2}} + \frac{M_{JU4}}{2N_{JU4}}$ , где  $M$  — масса соответствующей ячейки,  $N$  — количество узлов в ячейке на момент времени  $t^n$ .

После расчета точек пересечения производится их корректировка с учетом плотностей в ячейках  $JU3$  и  $JU4$ . Если  $\rho_{JU3} \geq \rho_{JU4}$ , то корректировка делается по формулам

$$\begin{aligned} x_K &= x_K + \frac{(\rho_{JU3} - \rho_{JU4})(x_{IK} - x_K)}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}; & x_{I2} &= x_{I2} + \frac{(\rho_{JU3} - \rho_{JU4})(x_{IK} - x_{I2})}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}; \\ y_K &= y_K + \frac{(\rho_{JU3} - \rho_{JU4})(y_{IK} - y_K)}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}; & y_{I2} &= y_{I2} + \frac{(\rho_{JU3} - \rho_{JU4})(y_{IK} - y_{I2})}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}. \end{aligned}$$

Если  $\rho_{JU4} \geq \rho_{JU3}$ ,

$$\begin{aligned} x_K &= x_K + \frac{(\rho_{JU4} - \rho_{JU3})(x_{IU2} - x_K)}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}; & x_{I2} &= x_{I2} + \frac{(\rho_{JU4} - \rho_{JU3})(x_{IU2} - x_{I2})}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}; \\ y_K &= y_K + \frac{(\rho_{JU4} - \rho_{JU3})(y_{IU2} - y_K)}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}; & y_{I2} &= y_{I2} + \frac{(\rho_{JU4} - \rho_{JU3})(y_{IU2} - y_{I2})}{\rho_{JU3} + \rho_{JU4}}. \end{aligned}$$

Новые скорости в точках  $K$  и  $I2$  определяются из закона сохранения импульса на момент времени  $t^{n+1}$  следующим образом:

$$u_K^{n+1} = u_{I2}^{n+1} = \frac{m_{IK}u_{IK}^{n+1} + m_{IU2}u_{IU2}^{n+1}}{m_K + m_{I2}}; \quad v_K^{n+1} = v_{I2}^{n+1} = \frac{m_{IK}v_{IK}^{n+1} + m_{IU2}v_{IU2}^{n+1}}{m_K + m_{I2}}.$$

Иногда во время численного решения задач (например задач с натеканием вещества на ось или проникания) ячейки, которые были внутренними, выходят на границы счетных областей. На рис. 7 схематично изображено столкновение внутренней ячейки с КГ. В этом случае ячейки  $JU1$  и  $JU2$ , которые на момент времени  $t^n$  имели контакт между собой по ребру  $IK-IU2$ , теряют свое соседство и происходит взаимодействие внутренней ячейки  $JU3$  с КГ. Точки  $K$  и  $I$  определяются из пересечения ребер  $IK-IU1$  и  $IK-IU3$  с КГ, проходящей через точки  $IU4$ ,  $IU2$ ,  $IU5$ , как это показано на центральной схеме рис. 7. Данный алгоритм позволяет внутренним ячейкам становиться граничными.

Аналогично приходу внутренних ячеек на границу могут возникать случаи (например при столкновении двух встречных потоков вдоль оси симметрии), когда граничные ячейки стремятся уйти внутрь области. На рис. 8 схематично изображено столкновение вдоль КГ двух граничных ячеек  $JU3$  и  $JU4$ , между которыми на момент времени  $t^n$  находилась ячейка  $JU1$ . В этом случае ячейки  $JU3$  и  $JU4$ , которые на момент времени  $t^n$  не имели контакта между собой, начинают взаимодействовать через ребро  $K-I2$ . Граничная ячейка  $JU1$  теряет свое взаимодействие с КГ и становится

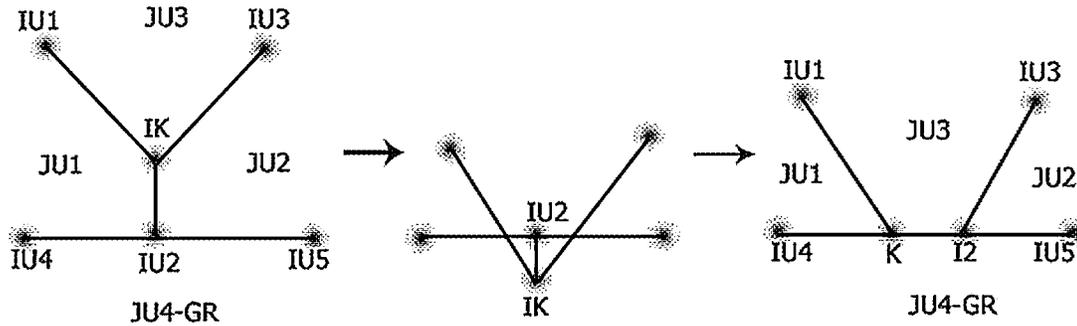


Рис. 7. Схема структурной перестройки при выходе внутренней ячейки на контактную границу

внутренней ячейкой. Точка  $K$  определяется из пересечения ребер  $IU2-IU4$  и  $IK-IU1$ , точка  $I2$  определяется как среднее между узлами  $IK$  и  $IU2$  с КГ (проходящей через точки  $IU5$ ,  $IU2$ ,  $IK$ ,  $IU3$ ), как это показано на центральной схеме рис. 8. Данный алгоритм позволяет граничным ячейкам становиться внутренними. Скорости и массы узлов  $K$  и  $I2$  определяются по вышеописанным алгоритмам.

Другой алгоритм локальных структурных перестроек связан со скольжением внутри счетной области одного фрагмента задачи относительно другого. На рис. 9 слева приведен фрагмент сетки на момент времени  $t^n$ , в центре — ситуация, которая возникает в следующий момент, до работы блока поддержания приемлемой счетной сетки, справа — фрагмент сетки, исправленной с помощью структурной перестройки.

Структурная перестройка в узле  $IK$  осуществляется следующим образом. Находится перпендикуляр к отрезку  $IU1-IK$  из точки  $IU2$ , длина этого перпендикуляра должна быть в  $n$  раз меньше, чем длина отрезка  $IU2-IK$ . Если выполняется это условие, то находится точка пересечения перпендикуляра с отрезком  $IU1-IK$ . В эту точку помещается узел  $IU2$ , меняются связи узлов и ячеек. Скорости узлов остаются прежними, массы узлов пересчитываются по описанным выше алгоритмам.

Действенность алгоритмов локальной структурной перестройки была проверена на серии тестовых и методических расчетов. Рассмотрим простейший тест на скольжение в однообластной постановке. Геометрия задачи в начальный момент времени показана на рис. 10. Счетная область представляет собой односвязную область, состоящую из двух физических областей. Область 1 (сверху) имеет скорость 1 км/с.

На рис. 11, *a* показана конечная стадия расчета модельной задачи с использованием программ локальной структурной перестройки счетной сетки. На рис. 11, *б* приведен результат расчета этой же задачи с использованием программ локального дробления и объединения счетных ячеек. Из представленных результатов видно, что стандартные, ранее реализованные программы комплекса ДМК не могли обеспечить "чистого" скольжения внутри одной счетной области на лагранжевых ячейках. Это связано с тем, что при использовании алгоритмов локального дробления и объеди-

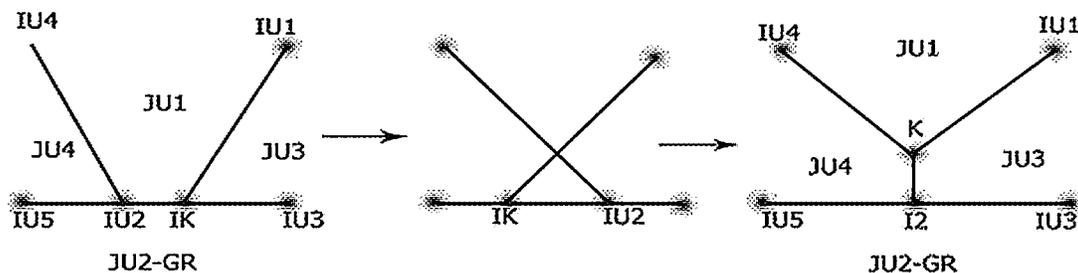


Рис. 8. Схема перестройки при столкновении двух граничных ячеек

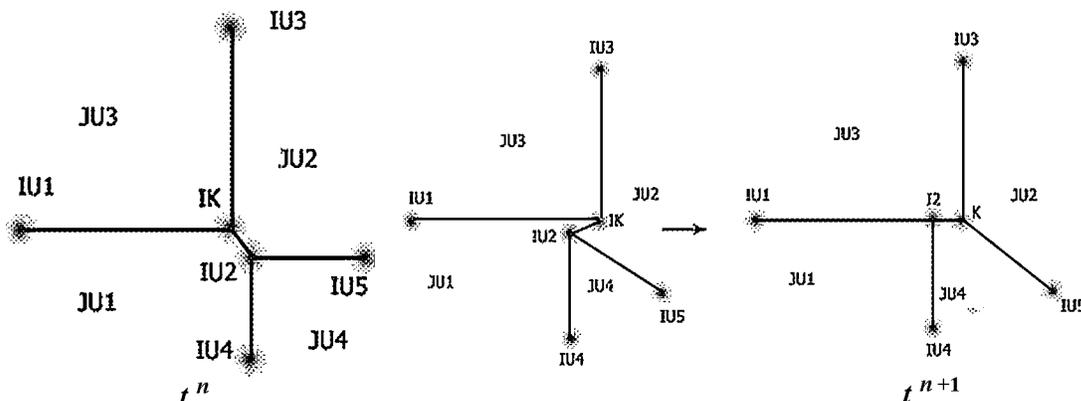


Рис. 9. Ситуация в узле  $IK$  на момент времени  $t^n$  и исправление ситуации, образовавшейся на момент времени  $t^{n+1}$

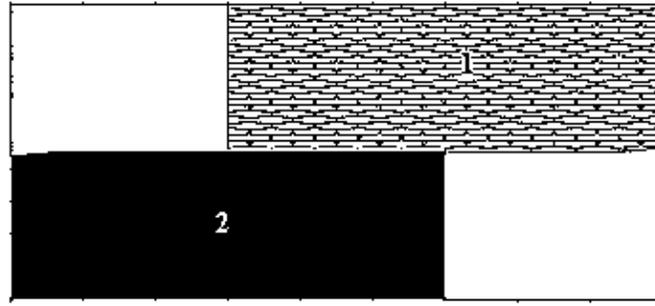


Рис. 10. Начальная геометрия тестовой задачи

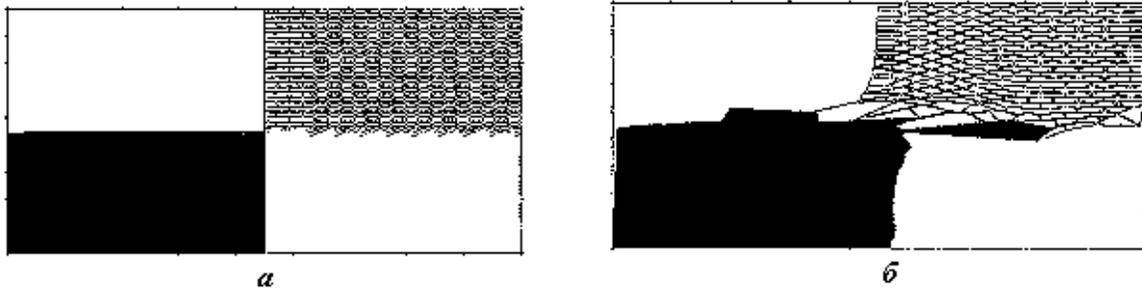


Рис. 11. Поле скоростей в веществе на конечной стадии расчета тестовой задачи,  $t = 5$  мкс: *a* — с использованием алгоритмов структурной перестройки; *b* — с использованием методики локального дробления и объединения счетных ячеек

нения счетных ячеек в локальной области происходит усреднение (за счет объединения соседних ячеек) газодинамических величин, что приводит к внесению возмущения вдоль формирующегося тангенциального разрыва. Результаты расчета этой задачи в двухобластной постановке (области 1 и 2 были выделены в отдельные счетные области) с заданием поверхности скольжения между счетными областями совпадают с результатами расчета в однообластной постановке с использованием программ локальных структурных перестроек счетной сетки.

### Тестирование расчетной методики

Тестирование методики ДМК-УП проводилось на задачах как газодинамики, так и упругопластичности, имеющих точное решение. Для решения конкретных задач в методике реализованы различные модели упругопластических сред с учетом процессов разрушения материалов [12–15]. Достоверность получаемых результатов с помощью методики ДМК-УП подтверждена как многочисленными сравнениями с аналитическими решениями, так и при помощи сопоставления с экспериментальными данными и результатами расчетов по другим двумерным методикам. В частности, это отражено в работах [15–19].

**Задача Свидинского о плоской волне.** Рассмотрим плоскую упругопластическую задачу с точным решением о деформации полупространства. Имеется цилиндр, образованный вращением плоской области  $ABCD$  вокруг оси  $Ox$ . Область содержит идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 3$  и уравнением состояния  $P = (\gamma - 1)\rho E$ . Начальные условия:  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ;  $\vec{U} = 0$ ;  $E_0 = P_0 = S_{ij} = 0$  с параметрами  $G = 15 \text{ ГПа}$ ;  $Y_0 = 1 \text{ ГПа}$ . К основанию цилиндра приложено постоянное по времени давление  $P_{\text{гр}} = 5 \text{ ГПа}$ , все другие границы — жесткие стенки. Размеры области:  $|AB| = |CD| = 0,5 \text{ см}$ ;  $|AD| = 1,5 \text{ см}$ . Число точек по осям:  $Ox \rightarrow M = 51$ ,  $Oy \rightarrow N = 15$ . Расчеты проводились на нерегулярной многоугольной и регулярной четырехугольной лагранжевых сетках.

На рис. 12 приведены результаты численного расчета (на нерегулярной многоугольной лагранжевой сетке) и аналитическое решение на момент времени  $t = 2,4$  мкс. Как и в аналитическом решении, в расчете получены две волны: впереди распространяется упругая волна,  $D_{\text{упр}} = 4,56$  км/с, а за ней — пластическая волна,  $D_{\text{пл}} = 3,21$  км/с. Результаты расчетов хорошо согласуются с аналитическим решением ( $D_{\text{упр}} = 4,5$  км/с;  $D_{\text{пл}} = 3,25$  км/с).

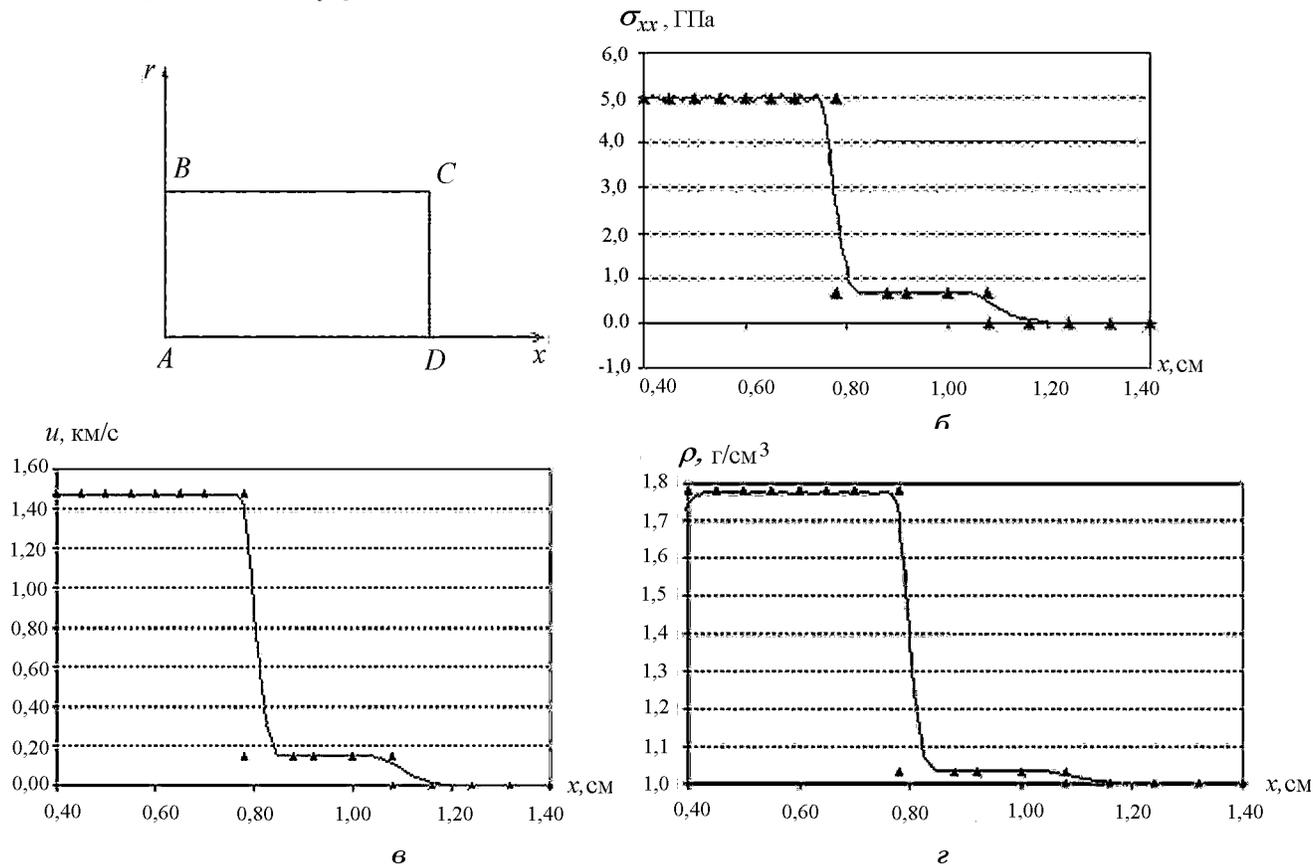


Рис. 12. Начальная геометрия задачи Свидинского (а); профиль напряжения  $\sigma_{xx}$  (б), скорости (в) и плотности (г) на момент времени  $t = 2,4$  мкс:  $\blacktriangle$  — аналитическое решение; — — численное решение

"Стержень Тейлора". Данный тест [20] является уже "традиционной" задачей для тестирования методик, предназначенных для описания упругопластических течений. Рассматривается нормальный удар сплошного цилиндра (*стержня Тейлора*) по жесткой стенке (рис. 13). Задача имеет осевую симметрию ( $Ox$  — ось симметрии) и решается в приближении упругопластической сплошной среды. Цель теста: проверка описания свободных и контактных границ при скоростном нагружении, проверка описания свойств материала при больших деформациях.

Результаты расчетов сравнивались с результатами серии экспериментов исследования удара цилиндров из стали по плите из броневой стали. В расчетах использовалась сжимаемая идеальнопластическая модель вещества без учета разрушения с уравнением состояния в форме Ми—Грюнайзена. Плита из броневой стали в расчетах моделировалась жесткой стенкой. Параметры модели материала:  $\rho_0 = 7,85$  г/см<sup>3</sup>;  $c_0 = 4,67$  км/с;  $n = 5$ ;  $\Gamma = 2$ ;  $Y_0 = 0,7$  ГПа;  $\nu = 0,28$ . Начальные длина и диаметр стержня  $L_0 = 10$  см,  $d = 2,0$  см; имеются две конструктивные кольцевые проточки шириной 0,5 и глубиной 0,25 см, расположенные на расстоянии 0,5 см друг от друга. Скорость удара  $v_0$  и конечная длина стержня  $L_f$  приведены в таблице.

Расчеты по методике ДМК-УП проводились на нерегулярной шестиугольной расчетной сетке  $120 \times 12$  ячеек, расчеты по методике МИМОЗА — на равномерной прямоугольной расчетной сетке [21]. Сравнение с экспериментом проводилось по конечной длине стержня  $L_f$  (традиционный параметр, см., например, [22]) (см. таблицу) и конечной форме стержня (рис. 14).

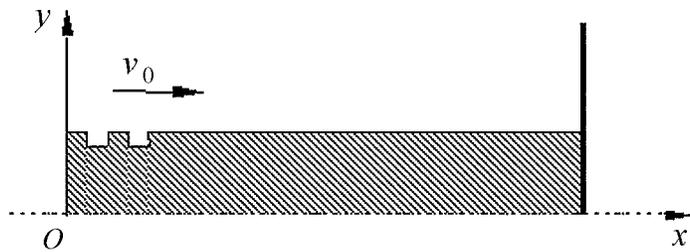


Рис. 13. Геометрия задачи о стержне Тейлора

Сравнение расчетных данных по конечной длине стержня

$v_0$ , км/с	$L_f$ , см		
	Эксперимент	МИМОЗА	ДМК-УП
0,120	9,35	—	9,36
0,140	9,1	—	9,14
0,170	8,8	—	8,83
0,185	8,7	—	8,68
0,235	8,0	7,99	7,99
0,310	7,0	—	6,95

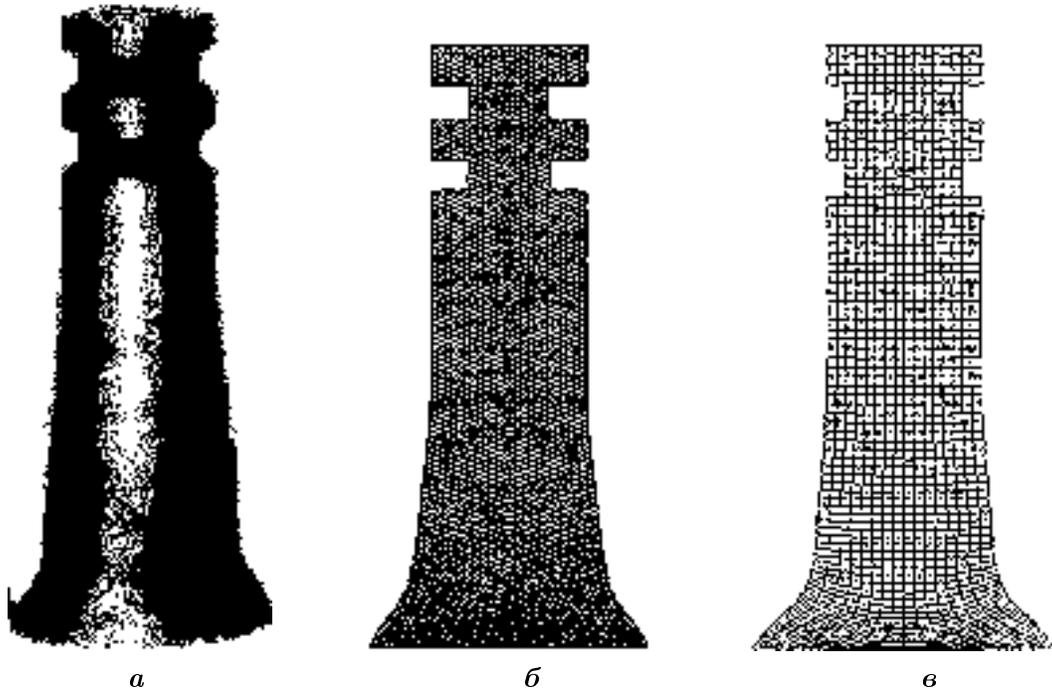


Рис. 14. Конечная форма стержня (сталь,  $v_0 = 0,235$  км/с): *a* — эксперимент; *b* — расчет по методике ДМК-УП; *в* — расчет по методике МИМОЗА

Видно хорошее согласие результатов расчетов (в пределах 1%) по конечной длине и форме стержня как с экспериментальными данными, так и между собой.

**Задача о деформации сферического купола** Рассматривается деформирование защемленного по контуру тонкостенного купола (сферический сегмент на рис. 15, *a*) под действием внезапно приложенного внешнего давления (рис. 15, *б*). Задача имеет осевую симметрию ( $z$  — ось симметрии) и решается в оболочечном приближении и в упругопластическом приближении сплошной среды. Геометрия купола: толщина  $h = 1,04$  см, радиус  $R = 56,6$  см, угол сегмента  $\alpha = 26,67^\circ$ . Цель теста: проверка описания свободных границ и расчета тонких слоев при колебаниях в упругопластической области.

В расчетах использовалась сжимаемая идеальнопластическая модель вещества без учета разрушения по уравнению состояния в форме Ми—Грюнайзена. Параметры модели материала (алюминиевый сплав):  $\rho_0 = 2,62$  г/см<sup>3</sup>;  $c_0 = 4,8$  км/с;  $n = 3,5$ ;  $\Gamma = 2,14$ ;  $\sigma_s = 0,1655$  ГПа;  $\nu = 0,3$  ( $E = 72,4$  ГПа). Результаты расчетов сравнивались с приведенными в [23, 24] ( $P_0 = 4,14$  МПа). Сравнение результатов расчетов проводилось по временной зависимости  $d(t)$  смещения полюса купола (рис. 16). Видно, что результаты расчета по методике ДМК-УП удовлетворительно согласуются с результатами расчета по другим методикам.

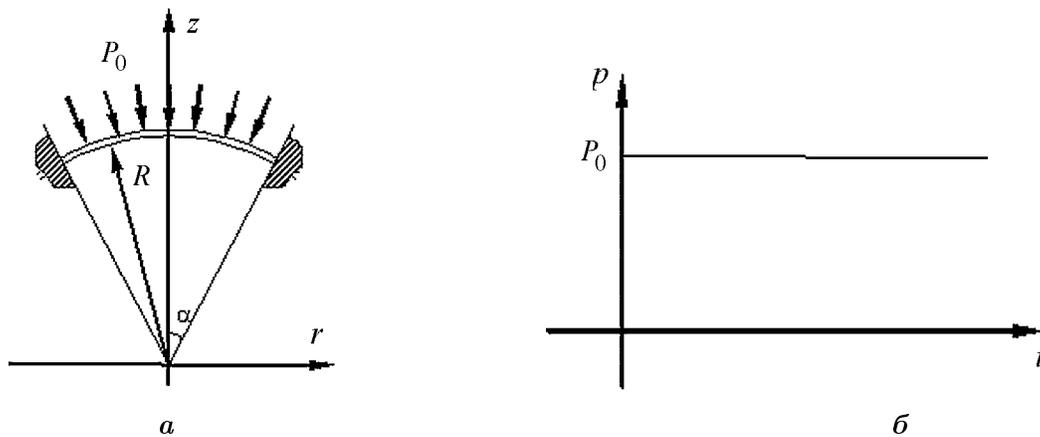


Рис. 15. Геометрия задачи о сферическом куполе (а) под действием приложенного внешнего давления (б)

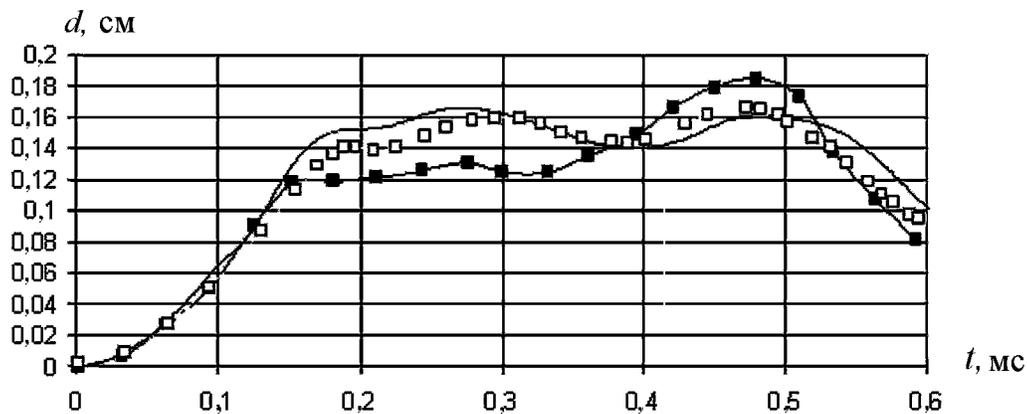


Рис. 16. Смещение полюса купола: -■- — расчет [23]; -□- — расчет [24]; — — ДМК

**Задача о движении заземленной по краям тонкостенной пластины.** Рассматривается движение заземленной по краям тонкостенной узкой пластины (рис. 17) при импульсной нагрузке (в ее центральной части задана начальная скорость  $v_z$ , нормальная к плоскости пластины). Задача имеет плоскость симметрии  $(x, z)$  и решается в упругопластическом приближении сплошной среды.

Геометрия пластины: длина  $L = 25,4$  см, ширина  $b = 3,05$  см, толщина  $h = 0,3175$  см. На поверхности длиной  $l = 0,2L = 5,08$  см по всей ширине пластины  $b$  задавалась  $v_z = -132$  м/с и  $v_z = -127$  м/с. Цель теста: проверка описания свободных границ и расчета тонких слоев при колебаниях в упругопластической области.

Расчеты по методике ДМК-УП в приближении упругопластической среды проводились на равномерной расчетной сетке размером  $120 \times 5$ . В расчетах использовалась сжимаемая идеальнопластическая модель вещества без учета разрушения с уравнением состояния в форме Ми–Грюнайзена. Параметры модели материала (алюминиевый сплав):  $\rho_0 = 2,79$  г/см<sup>3</sup>;  $c_0 = 4,63$  км/с;  $n = 3,5$ ;  $\Gamma = 2,14$ ;  $\sigma_s = 0,285$  ГПа;  $\nu = 0,3$  ( $E = 71,7$  ГПа).

Результаты расчетов сравнивались с результатами экспериментов, приведенных в [25], и с результатами расчетов, приведенных в [24, 26]. Сравнение результатов расчетов проводилось по временной зависимости вертикального смещения  $d(t)$  центра пластины (рис. 18). Видно хорошее согласие результатов расчетов как с экспериментальными данными, так и между собой: максимальное различие не превышает различия в экспериментальных данных и расчетах авторов [24], [26] и [25].

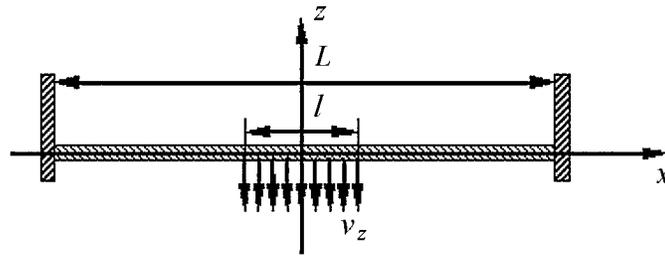


Рис. 17. Геометрия задачи о пластине

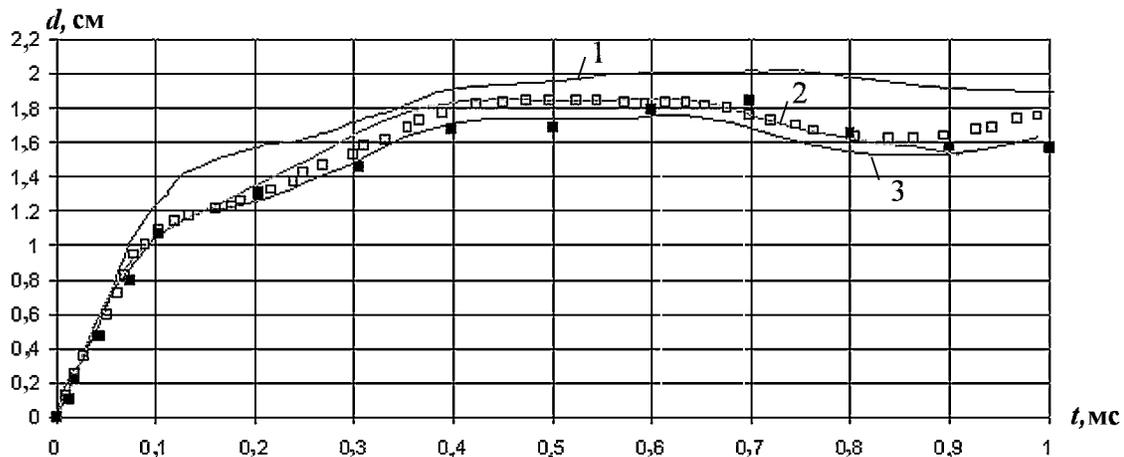


Рис. 18. Вертикальное смещение центра пластины: ■, □ — экспериментальные данные [25], взятые соответственно из [26] ( $v_z = 132$  м/с) и [24] ( $v_z = 127$  м/с); 1, 3 — результаты расчетов, взятые соответственно из [26] ( $v_z = 132$  м/с) и [24] ( $v_z = 127$  м/с); 2 — ДМК-УП ( $v_z = 127$  м/с)

**Задача об образовании струи и ее взаимодействии с преградой.** Рассматривается модельная задача об образовании струи и взаимодействии ее с двухслойной преградой [27, 28]. На рис. 19, *a–г* приведены счетная сетка и поле плотностей на различные моменты времени. Справа изображено кумулятивное устройство, слева — двухслойная преграда. При одноточечном инициировании на внешней границе ВВ на оси формируется детонационная волна. Под действием продуктов взрыва происходит разгон медной облицовки. При движении оболочки происходит схождение ее на ось симметрии и формируется струйное течение в направлении преграды (рис. 19, *a*). Слои преграды из алюминия разделены между собой вакуумным зазором.

Данная задача является демонстрационным расчетом, подтверждающим возможность применения методики ДМК-УП для моделирования сложных двумерных течений на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках. Расчеты проводились с учетом упругопластических свойств материалов для алюминия и меди. Расчет детонации осуществлялся по модели Чепмена—Жуге с контролем над скоростью распространения фронта детонации. Рис. 19, *б* соответствует моменту пробития кумулятивной струей из меди первого, более тонкого, слоя алюминия. На стадии пробивания преграды в расчете использовалась методика локальных перестроек нерегулярной многоугольной счетной сетки [9], которая была адаптирована и для расчетов задач с учетом упругопластических свойств материалов. На рис. 19, *в* изображен результат расчета на этапе пробивания второго, толстого, слоя преграды, на рис. 19, *д* — после его пробивания.

В результате численного моделирования было получено, что струя обладает достаточной энергией для пробивания двухслойной преграды. Произошло незначительное растекание головной части струи. В алюминиевой двухслойной преграде образовались цилиндрические отверстия, куда и устремляется основная часть струйного течения.

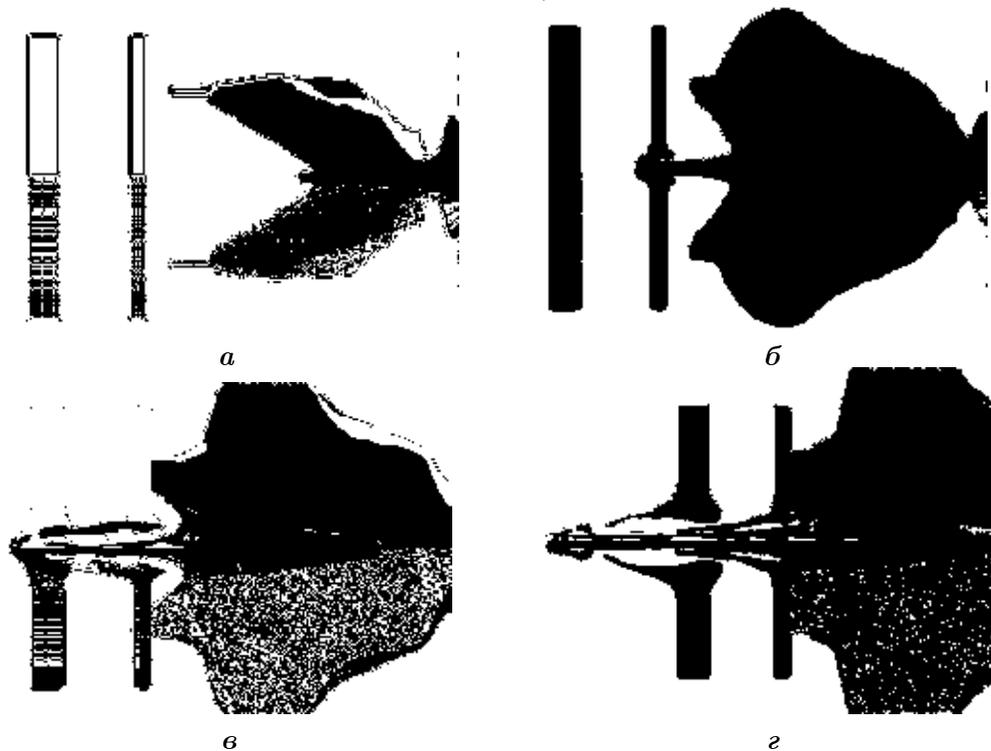


Рис. 19. Сетка (снизу) и поле плотностей (сверху) расчета на различных стадиях: *а* — формирования струи; *б* — пробивания первой преграды; *в* — пробивания второй преграды; *г* — движения струи после пробивания преград

### Заключение

Данная работа отражает основные результаты создания нерегулярной методики ДМК-УП, предназначенной для расчета двумерных нестационарных упругопластических задач на нерегулярных многоугольных и регулярных четырехугольных лагранжевых сетках. Представленная в работе методика является дальнейшим развитием двумерной методики ДМК, предназначенной для расчета двумерных задач газодинамики на нерегулярных многоугольных и регулярных четырехугольных лагранжевых сетках. Рассмотренная методика позволяет проводить расчеты двумерных упругопластических течений в многообластной постановке с выделенными контактными поверхностями, вдоль которых может терпеть разрыв тангенциальная составляющая вектора скорости. Для моделирования задач с большими сдвиговыми деформациями, струйных и вихревых течений используется методика локальных дроблений и объединений счетных ячеек и методика локальных структурных перестроек счетной сетки.

Для подтверждения правильности двумерной методики для расчета упругопластических течений был проведен цикл численных исследований на расчетах задач, имеющих аналитическое решение, и на сравнительных расчетах по одномерным и двумерным программам. Некоторые результаты сравнительных расчетов представлены в работе. Анализ результатов расчетов по новой методике позволяет сделать вывод о правильности двумерной методики и ее корректной программной реализации.

### Список литературы

1. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1976.

2. *Афанасьева Е. А., Винокуров О. А., Воронинов А. И. и др.* Комплекс программ МИМОЗА для решения двумерных и трехмерных задач газовой динамики // Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики / Под ред. Г. П. Воскресенского, А. В. Забродина. М.: ИПМ АН СССР, 1989.
3. *Софронов И. Д., Делов В. И., Дмитриева Л. В. и др.* Методика "Д" для расчета многомерных задач механики сплошной среды в переменных Лагранжа на регулярной сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4.
4. *Воронин Б. Л., Скрипник С. И., Софронов И. Д.* Эйлерово-лагранжева методика численного решения трехмерных задач газовой динамики с учетом теплопроводности // Там же. 1988. Вып. 3.
5. *Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. и др.* Комплекс программ ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // Там же. 1993. Вып. 4.
6. *Sofronov I. D., Rasskazova V. V., Nesterenko L. V.* The use of nonregular nest for solving two-dimension nonstationary problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. by N. N. Janenko and Yu. I. Shokin. Mir Publisher, 1984.
7. *Софронов И. Д., Рассказова В. В., Нестеренко Л. В.* Нерегулярные сетки в методах расчета двумерных нестационарных задач газовой динамики // Вопросы математического моделирования, вычислительной математики и информатики. М.—Арзамас-16, 1994.
8. *Мотлохов В. Н., Рассказова В. В., Софронов И. Д.* Об опыте распараллеливания счета задач газовой динамики по программе ДМК на мультипроцессорных системах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1996. Вып. 3.
9. *Рассказова В. В., Шапоренко А. Н.* Методы перестройки связей для произвольной многогранной счетной сетки // Там же. 1997. Вып. 2.
10. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1970.
11. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990.
12. *Вершинин В. Б., Михайлов С. В., Соколов С. С.* Бинарный критерий разрушения упругопластических материалов // II науч. конф. по механике и прочности конструкций, посвященная 80-летию академика Е. А. Негина. Сб. докладов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2002.
13. *Садовой А. А., Соколов С. С.* Кинетическая модель динамического разрушения, включающая пластический рост пор и поврежденность при сдвиговой деформации // III науч. конф. "Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения". Сб. докладов. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
14. *Ioilev A. D., Glushak B. L., Sadovoi A. A. et al.* Numerical model of ductile fracture kinetics // Int. J. of Imp. Eng. 2003. Vol. 29.
15. *Морозов В. Г., Карпенко И. И., Соколов С. С. и др.* Теоретическое и расчетное обоснование феноменологической модели с ударно-волновой чувствительностью гетерогенного ВВ типа ТАТБ при однократном и двукратном ударно-волновом нагружении, в том числе с промежуточной разгрузкой // Хим. физика. 1995. Т. 3.
16. *Артемьев Ю. А., Асеева В. В., Горев И. В. и др.* Комплекс программ для численного моделирования безопасности подземных атомных станций // Мат. межд. конф. "Использование подземного пространства для повышения безопасности ядерной энергетики". Апатиты, октябрь 1992 г.
17. *Асеева В. В., Бебенин Г. В., Мотлохов В. Н. и др.* Разработка средств локализации аварий на АЭС с использованием опыта проведения подземных ядерных взрывов // Тр. российско-американского симпозиума "Оценка риска и поведение инженерных систем в аномальных условиях". Челябинск, 1993.

18. Савельева О. А., Соколов С. С., Садовой А. А. Математическое моделирование разрушения цилиндрических оболочек с макроскопическими дефектами // Сб. докладов науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
  19. Глушак Б. Л., Иоилев А. Г., Садовой А. А. и др. Расчетная модель изотропной кинетики пластического разрушения: сравнение двумерных расчетов и экспериментальных данных // Тр. межд. конф. "V Харитоновские тематические научные чтения: Вещества, материалы и конструкции при интенсивных динамических нагрузках". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
  20. Новиков А. Б., Глушак С. А. Сопротивление металлов пластической деформации при высокоскоростном сжатии // Хим. физика. 2000. Т. 19, № 2. С. 65—69.
  21. Бабанов А. В., Змушко В. В., Рыбаченко П. В. Применение адаптивных сеток для решения задач механики сплошной среды (детонация, упругопластика) // Сб. докладов науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
  22. Jones S. E., Drinkard J. A., Rule W. K., Wilson L. L. An elementary theory for the Taylor impact test // Int. J. Imp. Eng. 1998. Vol. 21, No 1—2.
  23. Bathe K. J., Ramm E., Wilson E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis // Int. J. Numer. Meths. Eng. 1975. Vol. 9.
  24. Belytschko T., Lin J. I., Tsay Chen-Shyh. Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells // Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 1984. Vol. 42.
  25. Witmer E. A., Balmer H. A., Leech J. W., Pian Th. H. H. Large dynamic deformations of beams, rings, plates, and shells // AIAA J. 1963. Vol. 1, No 3.
  26. MSC/DYTRAN. Example Problem Manual, Version 2.3. The MacNeal-Schwendler Corporation, 1995.
  27. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. Физика взрыва. М.: Наука, 1975.
  28. Колпаков В. И., Ладов С. В., Рубцов А. А. Математическое моделирование функционирования кумулятивных зарядов. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998.
-