

УДК 519.6

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ОДНОМЕРНЫХ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В. В. Завьялов, М. Ю. Козманов, В. Н. Селезнев, В. Е. Черняков, А. А. Шестаков  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматриваются результаты численных расчетов трех тестовых задач переноса излучения, одна из которых — широко используемый тест — не имеет точного решения, а две другие основаны на аналитических решениях. Решение задач находилось по различным конечно-разностным схемам. Приводятся некоторые результаты сравнения схем между собой.

### Введение

Проблема тестирования является одним из необходимых аспектов при создании численных методик. При тестировании методик в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. При отсутствии аналитических решений для тестирования методик обычно привлекают задачи, сосчитанные на очень подробной сетке до сходимости. Эти данные и используются вместо точных решений.

В настоящей работе рассматриваются результаты численных расчетов трех одномерных тестовых задач переноса излучения, в качестве которых взяты:

1. Задача Флека с учетом спектра излучения [1].
2. Точное решение системы уравнений переноса излучения и энергии с учетом спектра излучения (многогрупповое приближение) [2].
3. Точное решение системы уравнений переноса излучения и энергии для системы, состоящей из двух веществ (приближение *серой материи*) [3].

Первая задача является широко используемым тестом для переноса излучения. Однако она не имеет точного решения, поэтому при исследовании разностных методик приходится использовать численные расчеты на очень подробных разностных сетках. Остальные задачи основаны на аналитических решениях, что значительно упрощает процесс тестирования программ.

Решение данных задач исследовалось по следующим конечно-разностным схемам:

1. St-схема (схема 1-го порядка  $DS_n$ -метода [4]).
2.  $MDS_n$ -схема (монотонизированный вариант  $DS_n$ -метода [5]).
3. DD-схема (схема 2-го порядка  $DS_n$ -метода) и  $DD\backslash St$ -схема (DD-схема с пересчетом отрицательных величин по St-схеме).
4. REED-схема (комбинированная схема Рунда [6, 7]).
5. DDAD-схема ( $DS_n$ -метод с диссипативной поправкой [8, 9]).

Схемы St, DD и  $DD\backslash St$  — это хорошо известные схемы  $DS_n$ -метода Карлсона. Они сравниваются с более новыми схемами  $MDS_n$ , REED, DDAD. Эти схемы основаны на  $DS_n$ -методе, обладают практически всюду вторым порядком аппроксимации и гарантируют положительное решение.  $MDS_n$ -схема принадлежит классу нелинейных схем, остальные схемы — линейные. DD и DDAD-схемы с переключением на St-схему также становятся нелинейными схемами.

### Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений переноса и энергии в плоском случае в многогрупповом приближении (без учета движения среды и рассеяния):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J_g}{\partial t} + \mu \frac{\partial J_g}{\partial x} + \alpha_g J_g = \alpha_g B_g; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{g=1}^G \alpha_g \left( \int_{-1}^1 J_g d\mu - 2B_g \right). \quad (2)$$

Здесь  $c$  — скорость света;  $x$  — пространственная координата;  $t$  — время;  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона и осью  $x$ ;  $J_g(x, \mu, t, \varepsilon)$  — интенсивность излучения ( $g$  — индекс группы),  $\varepsilon$  — энергия фотона;  $\alpha_g(\varepsilon, T) > 0$  — коэффициент поглощения с учетом переизлучения,  $T(x, t)$  — температура среды;  $E(T)$  — удельная внутренняя энергия вещества;  $B_g(\varepsilon, T) = \frac{\eta \varepsilon_g^3}{(e^{\varepsilon_g/T} - 1)}$  — интенсивность равновесного излучения (функция Планка),  $B(T) = \sigma T^4$  в приближении серой материи,  $\sigma, \eta$  — положительные константы.

Система (1), (2) решается в прямоугольнике  $D = \{x_0 \leq x \leq x_N; -1 \leq \mu \leq 1\}$  с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} J_g(x, \mu, t, \varepsilon) \Big|_{t=t^0} &= J_g^0(\mu, t, \varepsilon); & T(x, t) \Big|_{t=t^0} &= T^0(x); \\ J_g(x_0, \mu, t, \varepsilon) \Big|_{\mu > 0} &= \varphi_1(\mu, t, \varepsilon); & J_g(x_N, \mu, t, \varepsilon) \Big|_{\mu \leq 0} &= \varphi_2(\mu, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

### St-, DD- и DD\St-схемы

Введем разностную сетку с шагами  $\Delta x, \Delta \mu, \Delta t = \tau$  соответственно по пространственной (индекс  $i$ ), угловой (индекс  $j$ ) и временной (индекс  $n$ ) переменным. При разностной аппроксимации предполагаем температуру  $T_{i+1/2}$  и зависящие от нее величины кусочно-постоянными в ячейке, а интенсивность излучения относим к узлам и серединам ячеек разностной сетки.

Уравнение (1) будем решать DS<sub>n</sub>-методом [4], соответствующая разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{J_{i+1/2,j}^{n+1} - J_{i+1/2,j}^n}{c\tau} + \mu_j \frac{J_{i+1,j}^{n+1} - J_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_i} + \alpha_{i+1/2}^{n+1} J_{i+1/2,j}^{n+1} = \alpha_{i+1/2}^{n+1} B_{i+1/2}^{n+1}. \quad (3)$$

Здесь для упрощения записи индексы  $g$  опущены. Далее будем опускать индексы  $g, i, j, n$ , оставляя их там, где это необходимо по смыслу. В уравнении (3) интенсивность излучения  $J$  определена в узлах и серединах ячеек, поэтому необходимо ввести дополнительные соотношения, связывающие ее значения с целыми и полуцелыми индексами:

$$J_{i+1/2,j} = \begin{cases} pJ_{i+1,j} + (1-p)J_{i,j} & \text{для } \mu_j > 0; \\ pJ_{i,j} + (1-p)J_{i+1,j} & \text{для } \mu_j \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где весовой параметр  $p$  меняется в пределах  $0,5 \leq p \leq 1$ . При  $p = 0,5$  имеем DD-схему 2-го порядка аппроксимации, при  $p = 1$  — St-схему 1-го порядка. Схема (3), (4) — это известная ромбовидная разностная схема с весом  $p$  [4].

Классическая St-схема 1-го порядка монотонна и положительна, однако достаточно грубо аппроксимирует решение в ячейке разностной сетки, особенно для больших величин  $\alpha$ . DD-схема обладает вторым порядком точности, но она немонотонна и неположительна. Одним из распространенных методов коррекции неположительности решения является переключение на схему 1-го порядка при получении отрицательных значений. Такая схема называется DD\St.

Уравнение энергии (2) во всех схемах считаем с первым порядком точности по времени и с линеаризацией функции Планка по температуре. При линеаризации уравнения энергии по температуре строится итерационный процесс для совместного решения системы (1), (2).

### MDS<sub>n</sub>-схема

MDS<sub>n</sub>-схема, основанная на "подправке" коэффициента поглощения, рассмотрена в работе [5]. Из условия неотрицательности решения в классической DD-схеме получаем достаточно жесткое, зависящее от  $\alpha$  ограничение на  $\tau$  и  $\Delta x$ :

$$C \geq (1 - p)(1 + \sigma\tau\alpha). \quad (5)$$

Здесь  $C = \sigma\tau\mu_j/\Delta x_i$  — число Куранта. Для переноса теплового излучения, где коэффициент поглощения может изменяться в десятки тысяч раз и более, такое условие неприемлемо. Сохраняя идеологию DS<sub>n</sub>-метода, попытаемся ослабить данное ограничение. Для этого изменим  $\alpha$  в члене  $\alpha J$  по формуле

$$\tilde{\alpha}_{i+1/2}^{n+1} = \frac{(1 - p) J_{i,j}^n + p J_{i+1,j}^n}{J_{i+1,j}^n} \alpha_{i+1/2}^{n+1}.$$

Вместо уравнения (3) рассмотрим следующую аппроксимацию:

$$\frac{J_{i+1/2,j}^{n+1} - J_{i+1/2,j}^n}{\sigma\tau} + \mu_j \frac{J_{i+1,j}^{n+1} - J_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_i} + \tilde{\alpha}_{i+1/2}^{n+1} J_{i+1,j}^{n+1} = \alpha_{i+1/2}^{n+1} B_{i+1/2}^{n+1}.$$

Тогда с учетом соотношений (4) для  $\mu_j > 0$  получаем

$$J_{i+1,j}^{n+1} = \frac{[C - (1 - p)] J_{i,j}^{n+1} + (1 - p) J_{i,j}^n + p J_{i+1,j}^n + \sigma\tau \alpha_{i+1/2}^{n+1} B_{i+1/2}^{n+1}}{p + \sigma\tau \tilde{\alpha}_{i+1/2}^{n+1} + C}.$$

Таким приемом удалось свести схему к консервативной нелинейной двухточечной схеме и получить условие положительности  $C \geq 0,5$ . При  $p = 0,5$  получим схему, имеющую второй порядок точности по пространственной переменной. В случае нарушения условия  $C \geq 0,5$  полагаем  $p = 1$  и переходим к схеме 1-го порядка.

При расчетах необходимо следить за тем, чтобы коэффициент  $\tilde{\alpha}$  не принимал очень больших или очень малых значений. В приведенных ниже расчетах ставилось условие  $0,1\alpha \leq \tilde{\alpha} \leq 10\alpha$ .

### REED-схема

Схема REED — комбинированная разностная неявная схема, рассмотренная в работе [6]. Она близка к схеме, описанной в работе [7], сочетает в себе неотрицательность решения и второй порядок аппроксимации по пространственной переменной почти во всех узлах сетки. Это достигается комбинированием двух схем 2-го порядка, одна из которых хорошо работает в оптически плотных средах, другая — в оптически прозрачных.

Для описания схемы наряду с уравнением (3) рассмотрим трехточечную аппроксимацию уравнения переноса, имеющую второй порядок аппроксимации:

$$\frac{J_{i,j}^{n+1} - J_{i,j}^n}{\sigma\tau} + \mu_j \frac{J_{i+1,j}^{n+1} - J_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x_i} + \alpha_i^{n+1} J_{i,j}^{n+1} = \alpha_i^{n+1} B_i^{n+1}. \quad (6)$$

Так как функции  $\alpha$  и  $B$  заданы в узлах сетки с полуцелыми индексами, то в (6) для получения  $\alpha_i$ ,  $B_i$  используется интерполяция. Перепишем (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} -X_i J_{i+1} + Y_i J_i - Z_i J_{i-1} &= W_i, & i = 1, 2, \dots, N - 1; \\ J_0 &= \chi_1 J_1 + \psi_1, & i = 0; \\ J_N &= \chi_2 J_{N-1} + \psi_2, & i = N, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$X_i = -\frac{\mu_j}{2\Delta x_i}; \quad Y_i = \frac{1}{c\tau} + \alpha_i; \quad Z_i = \frac{\mu_j}{2\Delta x_i}; \quad W_i = \alpha_i B_i^{n+1} + \frac{1}{c\tau} J_i^n.$$

Система уравнений (7) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, для решения которой используется метод прогонки. Достаточными условиями устойчивости прогонки являются неравенства

$$|\chi_1| \leq 1, \quad |Y_i| \geq |X_i| + |Z_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Подставив выражения коэффициентов (7) в (8), получим условия устойчивости для трехточечной схемы (6):

$$\frac{1}{c\tau} + \alpha_i \geq \frac{|\mu_j|}{\Delta x_i}. \quad (9)$$

Из неравенства (5) следует, что в схеме (3) в областях с большими значениями  $\alpha$  для неотрицательности решения требуется подробная сетка по  $x$  или приходится брать значение  $p$ , близкое к единице, что фактически означает переход на схему 1-го порядка. Схема (6), наоборот, как показано в [7] и видно из (9), может быть использована при больших значениях  $\alpha$ .

В узлах сетки в схеме (3) для  $\mu_j > 0$  или  $\mu_j \leq 0$  соответственно один из коэффициентов  $X_i$  или  $Z_i$  равен нулю. Критерием выбора схемы служит выполнение неравенства (5) при  $p = 0,5$ . Если (5) выполнено, то коэффициенты системы (7) вычисляются из уравнений (3), в противном случае — из уравнения (6).

Для решения системы (7) необходимо задавать два граничных условия. Так как в случае схемы (3) дополнительного граничного условия не требуется, то при построении комбинированной схемы на левой границе для  $\mu_j \leq 0$  и правой для  $\mu_j > 0$  всегда используется схема (3). Тем самым снимается вопрос о втором граничном условии для системы (7). При этом требование неотрицательности решения в граничных точках может привести к использованию схемы (3) с  $p = 1$ . Это обстоятельство имелось в виду, когда говорилось о втором порядке аппроксимации комбинированной схемы почти во всех узлах сетки. Выбранное направление прогонки для схемы (3) диктуется поведением характеристик исходного дифференциального уравнения, а для схемы (6) обеспечивает положительность первого прогоночного коэффициента. В случае, если первый прогоночный коэффициент станет отрицательным, осуществляется переход на схему 1-го порядка.

Из изложенного выше следует, что построенная схема является комбинированной по структуре и схемой сквозного счета по алгоритму. Анализ разностных уравнений и практика расчетов показывают, что в описанной схеме узлы, в которых приходится использовать аппроксимацию первого порядка, встречаются очень редко.

### DDAD-схема

С позиции метода дифференциальных приближений нефизические осцилляции DD-схемы в оптически плотной системе можно объяснить наличием антидиссипативных членов в первом дифференциальном приближении. Суть DDAD-схемы состоит во введении в DD-схему специально подобранной диссипации, зависящей от оптической толщины. Построенная таким способом схема получила название DDAD-схемы (Diamond Difference with the Artificial Dissipation). Схема обобщается на многомерные криволинейные геометрии, что является важным достоинством нового подхода.

Запишем уравнение (3) в виде

$$\frac{J_{i+1/2,j}^{n+1}}{c\tau} + \mu_j \frac{J_{i+1,j}^{n+1} - J_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_i} + \alpha_{i+1/2}^{n+1} J_{i+1/2,j}^{n+1} = \alpha_{i+1/2}^{n+1} B_{i+1/2}^{n+1} + \frac{J_{i+1/2,j}^n}{c\tau} = Q_{i+1/2,j}^{n+1}.$$

Для замыкания уравнений введем соотношения, связывающие значения интенсивности энергии излучения  $J$  с целыми и полуцелыми индексами:

$$J_{i+1/2,j}^{n+1} = \frac{J_{i+1,j}^{n+1} + J_{i,j}^{n+1}}{2} + \delta h \mu_j \frac{J_{i+1,j}^{n+1} - J_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_i} - \theta h \mu_j \frac{Q_{i+1,j}^{n+1} - Q_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_i},$$

где  $\delta, \theta$  — диссипативные параметры схемы,  $h = \Delta x_i / |\mu_j|$ .

Заметим, что искусственная диссипация в DDAD-схеме вводится через соотношения связи. В зависимости от значений параметров  $\delta$ ,  $\theta$  можно получить разные схемы решения уравнения переноса:

- 1)  $\delta = 0,5$ ;  $\theta = 0$  — St-схема (шаговая схема, имеющая 1-й порядок точности);
- 2)  $\delta = 0$ ;  $\theta = 0$  — DD-схема (алмазная схема, имеющая 2-й порядок точности);
- 3)  $\delta = \tilde{\alpha}h/8$ ;  $\theta = \delta/\tilde{\alpha}$  — DDAD-схема (диссипативная схема, имеющая 2-й порядок точности);
- 4)  $\delta = \tilde{\alpha}h/12$ ;  $\theta = \delta/\tilde{\alpha}$  — LM-вариант DDAD-схемы (имеющий 2-й порядок точности);
- 5)  $\delta = \frac{1 + \exp(-\tilde{\alpha}h)}{2} - \frac{1}{\tilde{\alpha}h}$ ;  $\theta = \delta/\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha} = \frac{1}{ct} + \alpha$  — LC-вариант DDAD-схемы (имеющий 2-й порядок точности).

В отличие от LM-схемы, где параметр  $\delta$  не ограничен ( $0 \leq \delta < \infty$ ), в LC-схеме параметр  $\delta$  ограничен ( $0 \leq \delta \leq 0,5$ ). При численных расчетах будем использовать LC-вариант DDAD-схемы. При получении отрицательного решения переходим на схему 1-го порядка.

### Численные расчеты тестовых задач

Для тестирования были взяты три одномерные тестовые задачи переноса излучения: вторая задача Флека для неоднородной среды, состоящей из трех областей, предложенная в работе [1] (используется как тест многими авторами, см., например, [10, 11]), точное спектральное решение для одной области [2] и точное решение в сером приближении для двух областей с разрывом температуры на границе [3].

Все разностные схемы исследовались на сходимость при измельчении сеток по  $\Delta x$ ,  $\Delta \mu$ ,  $\tau$ . Приводятся некоторые результаты исследований на сходимость и сравнение схем между собой. В пределе, при измельчении сеток, все схемы дают одинаковый результат.

По угловой переменной  $\mu$  во всех задачах используется равномерная сетка. Сетка по энергетической переменной в спектральных задачах:  $\epsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0,0$  (число групп 28). Интегралы по  $\mu$ ,  $\epsilon$  аппроксимировались по формуле прямоугольников. Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью, определяемой соотношением  $|T^{s+1} - T^s| \leq \epsilon_T (1 + T^{s+1})$ , где  $\epsilon_T$  — константа сходимости. Константы для функции Планка:  $\sigma = 327,0634$ ,  $\eta = 50,3645$ . Далее для удобства изложения будем обозначать  $x \times \mu =$  количество интервалов по  $x \times$  количество интервалов по  $\mu$ .

**Тест 1.** Решение системы уравнений нестационарного многогруппового переноса излучения в неоднородной среде (вторая задача Флека). На поверхность плоского слоя толщиной 4 см падает изотропный планковский источник излучения, соответствующий температуре вещества  $T = 1$ . Слой состоит из трех физических областей: область 1 —  $0 \leq x \leq 2$ ; область 2 —  $2 \leq x \leq 2,4$ ; область 3 —  $2,4 \leq x \leq 4$ . Коэффициент поглощения вычисляется по формуле  $\alpha_g = \frac{\chi(1 - e^{-\epsilon_g/T})}{\epsilon_g^3}$ ;  $\chi = 27$  в областях 1, 3,  $\chi = 10000$  в области 2. Уравнение состояния вещества —  $E = 0,81T^9$ .

Исходная пространственная сетка по  $x$  — неравномерная, сгущающаяся у границ в каждой области. Число интервалов в областях 1, 2, 3 — соответственно 24, 14, 18 (всего 56). Разбиение на интервалы следующее:  $x_0 = 0; 0,004; 0,04; x_3 = 0,1; \dots; x_{21} = 1,9$  (18 интервалов,  $h = 0,1$ );  $x_{22} = 1,987; 1,999; 2; 2,001; 2,004; 2,013; x_{28} = 2,04; \dots; x_{36} = 2,36$  (8 интервалов,  $h = 0,04$ );  $x_{37} = 2,396; 2,4; 2,404; 2,44; x_{41} = 2,5; \dots; x_{56} = 4$  (15 интервалов,  $h = 0,1$ ).

В данной задаче решение слабо зависит от угловой переменной, поэтому по  $\mu$  выбиралась равномерная сетка из 12 интервалов и измельчение производилось только по  $x$ .

Шаг по времени  $\tau = 0,00002$ . Константа сходимости  $\epsilon_T = 0,00001$ .

На рис. 1 приведены профили температуры вещества, полученные по разным схемам на момент времени  $ct = 9$ . Результаты сравниваются с "точным решением", полученным из разностного при наступлении сходимости на очень подробной сетке ( $4400 \times 20$ ,  $\tau = 0,00001$ ). Дальнейшее измельчение сетки практически не приводило к изменениям результатов. Из рис. 1 видно, что схемы MDS<sub>n</sub>

REED и DDAD, в отличие от схемы 1-го порядка и схемы DD\St, дают более высокий пик на границе раздела двух сред и меньше "размазывают" фронт тепловой волны в оптически плотной среде (область 2). Более того, даже на многократно измельченной сетке использование схем St и DD\St показывает худший результат. Для достижения сопоставимого результата схемы St и DD\St требуют на порядок более подробной сетки по пространству, чем схемы MDS<sub>n</sub>, REED и DDAD.

На рис. 2 приведены профили температуры вещества, полученные на момент времени счета  $ct = 400$ . К этому моменту решение выходит на стационарный режим. Видно, что схемы St и DD\St значительно завышают результат.

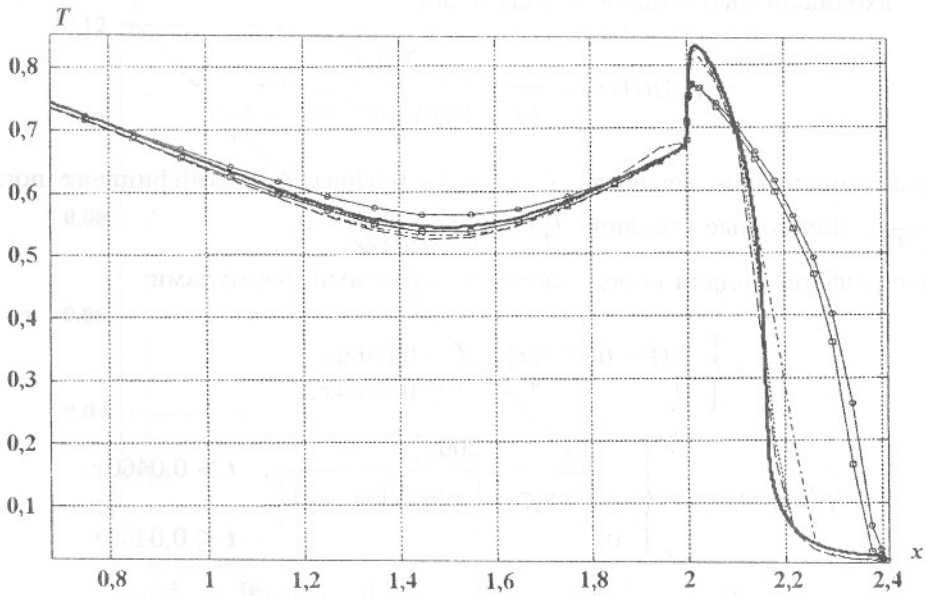


Рис. 1. Тест 1. Профиль  $T(x)$  на момент времени  $ct = 9$  на сетке  $56 \times 12$ :  $\circ$ — St-схема;  $\dots$  — MDS<sub>n</sub>-схема;  $\square$  — DD\St-схема;  $---$  REED-схема;  $- \cdot -$  DDAD-схема;  $---$  точное решение

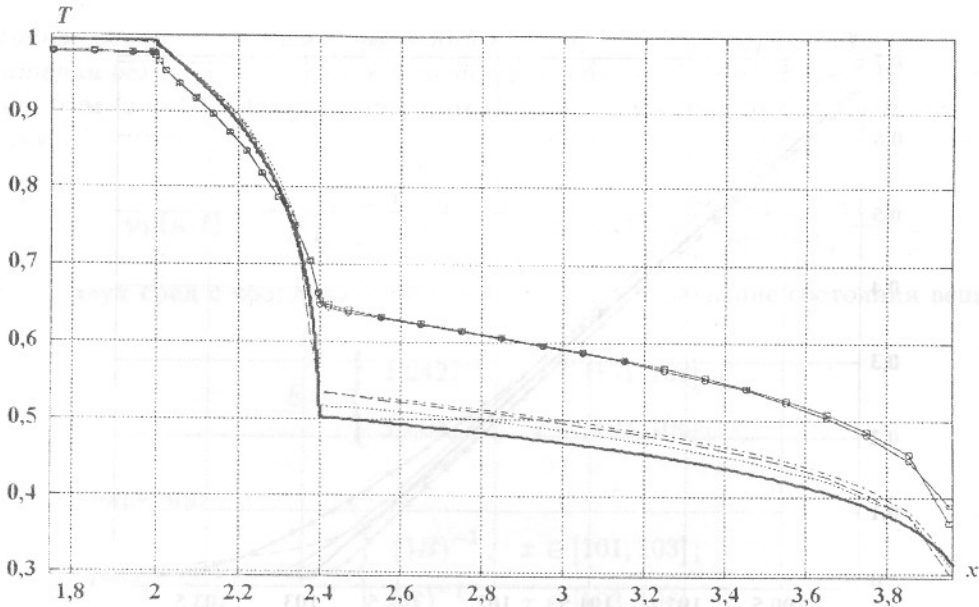


Рис. 2. Тест 1. Профиль  $T(x)$  на момент времени  $ct = 400$  на сетке  $56 \times 12$  (области 2 и 3):  $\circ$ — St-схема;  $\dots$  — MDS<sub>n</sub>-схема;  $\square$  — DD\St-схема;  $---$  REED-схема;  $- \cdot -$  DDAD-схема;  $---$  точное решение

Из рис. 1, 2 следует, что на второй задаче Флека схемы  $MDS_n$ , REED и DDAD показывают заметное преимущество по сравнению с классическими схемами St и DD\St. Результаты, полученные по схеме DD\St, практически полностью совпадают с результатами по St-схеме, что объясняется частым переключением на St-схему при больших значениях коэффициентов поглощения в оптически плотной области.

**Тест 2.** Точное решение системы уравнений нестационарного многогруппового переноса излучения без учета рассеяния в однородной среде. Задача решается на отрезке  $x \in [100, 104]$ . Уравнение состояния вещества —  $E = 152,73 T^4$ . На правой границе задано условие свободной поверхности, на левой границе — входящая интенсивность излучения

$$\psi_1(\mu, t, \varepsilon) = \frac{200\varepsilon_g^3}{(4 - 3,7\mu) \left[ e^{\frac{\varepsilon_g}{5(t-4,66)}} - 1 \right]},$$

соответствующая температуре вещества  $T = 5(t - 0,0466x)$ . Коэффициент поглощения  $\alpha_g = \frac{\varepsilon_g}{4T^2(1 - e^{-\varepsilon_g/T})}$ . Начальные условия:  $J_g^0(x, \mu, \varepsilon)|_{t^0=4,66} = 0$ .

Окончательное решение задачи определяется следующими формулами:

$$T(x, t) = \begin{cases} 5(t - 0,0466x), & t > 0,0466x; \\ 0, & t \leq 0,0466x; \end{cases}$$

$$J_g(x, \mu, t, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{200\varepsilon_g^3}{(4 - 3,7\mu) \left[ e^{\frac{\varepsilon_g}{5(t-0,0466x)}} - 1 \right]}, & t > 0,0466x; \\ 0, & t \leq 0,0466x. \end{cases}$$

Поскольку входящее излучение неизотропно, то при сравнении двух вышеприведенных схем измельчались равномерные сетки по  $x$  и по  $\mu$ . Шаг по времени  $\tau = 0,0002$ . Константа сходимости  $\varepsilon_T = 0,0001$ .

На рис. 3 приведены графики температуры, полученные на момент времени  $ct = 14400$ . На результатах, полученных по схемам  $MDS_n$ , REED и DDAD, наблюдается минимальный эффект

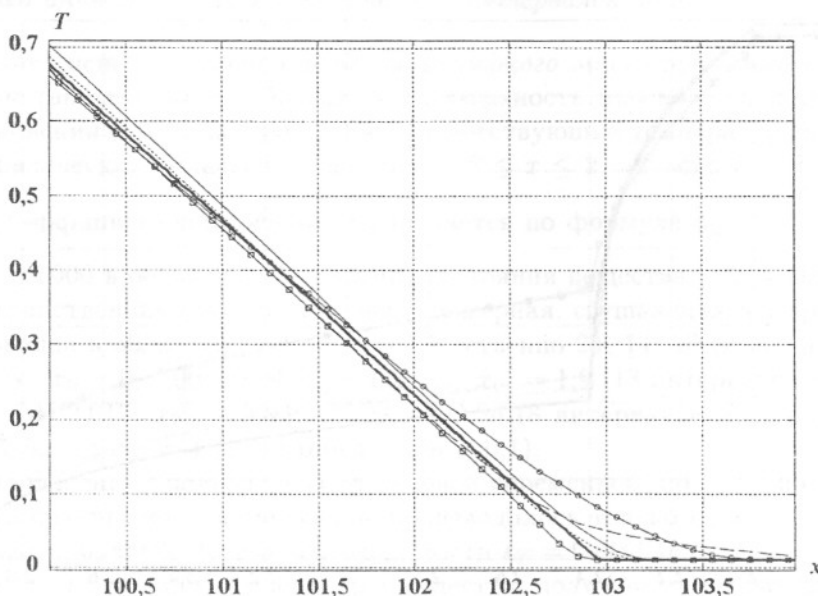


Рис. 3. Тест 2. Профиль  $T(x)$  на момент времени  $ct = 14400$  на сетке  $40 \times 12$ : —○— St-схема; ..... DDAD-схема; —□—  $MDS_n$ -схема; - - - DD\St-схема; — REED схема; — — — точное решение

размазывания теплового фронта. Схема DD\St также показала себя лучше схемы St; хотя на грубой сетке профиль температурной волны несколько опережает полученный по St-схеме, однако данный эффект очень быстро исчезает при дроблении сеток.

В данной задаче проявляется существенная зависимость решения от сетки по  $\mu$ . На рис. 4 приводятся фрагменты решения по St-схеме в увеличенном масштабе для различных вариантов сеток. Наглядно видна очень медленная сходимость к точному решению схемы 1-го порядка. Схемы MDS<sub>n</sub>, REED и DDAD требуют примерно в 5 раз меньше точек, чем схема 1-го порядка при сопоставимых результатах.

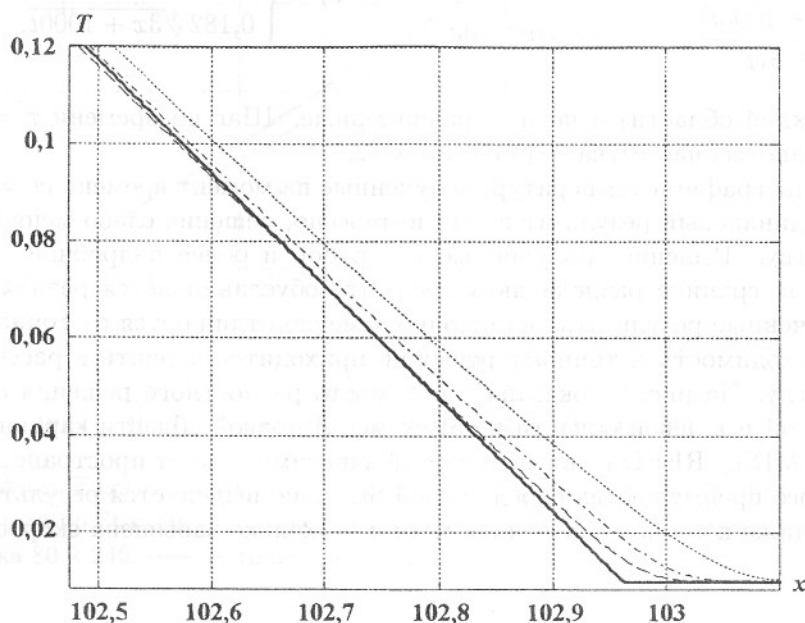


Рис. 4. Тест 2. Профиль  $T(x)$  на момент времени  $ct = 14\,400$  (в окрестности фронта температурной волны в укрупненном масштабе), рассчитанный по St-схеме, в сравнении с точным решением:  $\cdots$  — сетка  $360 \times 24$ ;  $\cdots\cdots$  — сетка  $720 \times 24$ ;  $-\cdots-$  — сетка  $1440 \times 24$ ;  $—$  — точное решение

**Тест 3.** Точное решение системы уравнений нестационарного переноса излучения в приближении серой материи без учета рассеяния в области, состоящей из двух сред. На границах плоского слоя толщиной 5 см ( $x \in [101, 106]$ ) заданы потоки монохроматического анизотропного излучения с интенсивностью

$$\psi_1(\mu, t) = \frac{29(307 + 1000t)}{90 + 87\mu}; \quad \psi_2(\mu, t) = \frac{58(159 + 500t)}{90 - 87\mu}.$$

Слой состоит из двух сред с координатой раздела  $x = 103$ . Уравнение состояния вещества:

$$E = \begin{cases} 1,242T^4, & x \in [101, 103]; \\ 10,047T^4, & x \in [103, 106]. \end{cases}$$

Коэффициент поглощения:

$$\alpha = \begin{cases} (3B)^{-1}, & x \in [101, 103]; \\ (B)^{-1}, & x \in [103, 106]. \end{cases}$$

Начальные условия: при  $t^0 = 0$  заданы непрерывная функция  $J^0(x, \mu)$  и кусочно-непрерывная  $T^0(x)$ :



$$J^0(x, \mu) = \begin{cases} \frac{29(x+206)}{90+87\mu}, & x \in [101, 103]; \\ \frac{87x}{90+87\mu}, & x \in [103, 106]; \end{cases} \quad T^0(x) = \begin{cases} 0,195\sqrt[4]{x+206}, & x \in [101, 103]; \\ 0,24\sqrt[4]{x}, & x \in (103, 106]. \end{cases}$$

Окончательное решение задачи определяется следующими формулами:

$$J(x, \mu, t) = \begin{cases} \frac{29(x+1000t+206)}{90+87\mu}, & x \in [101, 103]; \\ \frac{29(3x+1000t)}{90+87\mu}, & x \in [103, 106]; \end{cases} \quad T(t, x) = \begin{cases} 0,195\sqrt[4]{x+1000t+206}, & x \in [101, 103]; \\ 0,182\sqrt[4]{3x+1000t}, & x \in (103, 106]. \end{cases}$$

Сетки по  $x$  (в каждой области) и по  $\mu$  — равномерные. Шаг по времени  $\tau = 0,0002$ , константа  $\varepsilon_T = 0,0001$ . Пространственная сетка —  $(40 + 40) \times 12$ .

На рис. 5 приведены графики температур, полученные на момент времени  $ct = 30$ . Видно, что все схемы дают почти одинаковый результат и, что интересно, решение слабо меняется при дроблении сетки по пространству. Решения, полученные на грубой и более подробной сетках, фактически отличаются только на границе раздела двух сред, что обуславливается разной шириной счетных ячеек. Однако полученные результаты достаточно заметно отличаются от точного решения.

Для достижения сходимости к точному решению приходится вводить в рассмотрение очень подробную сетку по углу. На рис. 6 показана зависимость разностного решения от изменения сетки по угловой переменной  $\mu$  в левой области по St-схеме. В правой области картина аналогичная. На данном тесте схемы  $MDS_n$ , REED в связи со слабой зависимостью от пространственной переменной не показали заметного преимущества перед схемой St. Явно выделяется результат по DDAD-схеме, который оказался ближе к точному решению, хотя и несколько завышена скорость температурного фронта.

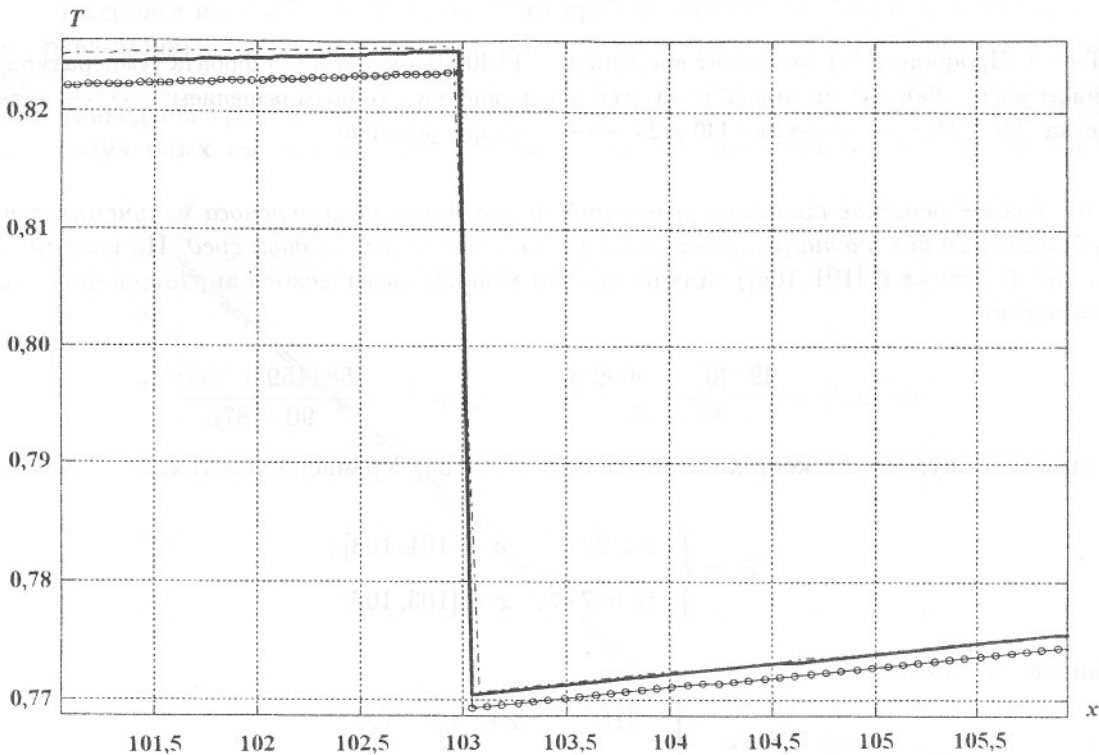


Рис. 5. Тест 3. Профиль  $T(x)$  на момент времени  $ct = 30$  (результаты по схемам St, DD\St, REED,  $MDS_n$  практически совпадают): - · - - DDAD-схема, сетка  $80 \times 12$ ; - o - DD\St-схема, сетка  $80 \times 12$ ; — — точное решение

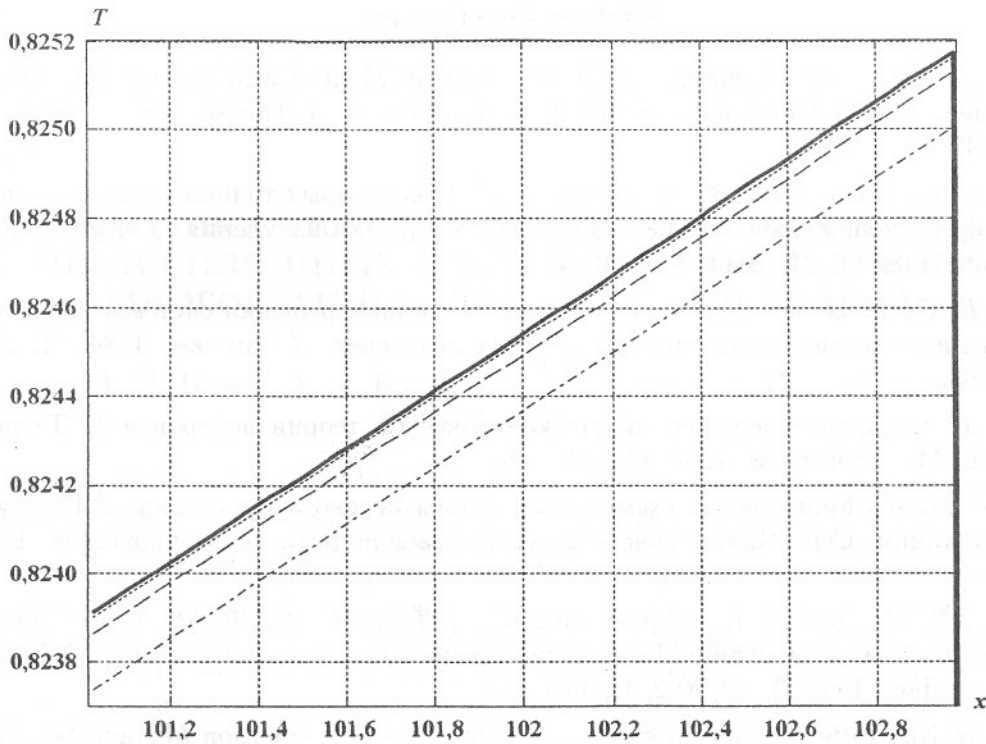


Рис. 6. Тест 3. Профиль  $T(x)$  слева от разрыва в области 1 на момент времени  $ct = 30$  (в укрупненном масштабе), рассчитанный по St-схеме, в сравнении с точным решением:  $\cdots$  — сетка  $80 \times 60$ ;  $---$  — сетка  $80 \times 120$ ;  $\cdots\cdots$  — сетка  $80 \times 240$ ;  $—$  — точное решение

### Заключение

В результате проведенных численных расчетов трех тестовых задач переноса излучения можно сделать следующие выводы.

Первая задача слабо зависит от сетки по  $\mu$ , но достаточно сильно зависит от пространственной сетки и шага по времени. Численные расчеты показали, что для правильного описания прохождения фронтом тепловой волны оптически плотной области приходится вводить очень подробную разностную сетку и выбирать шаг по времени достаточно мелким ( $\tau = 0,00002$ ). Пространственная сетка выбирается неравномерной, с измельчением размеров ячеек у границ областей в 100 раз ( $\Delta x = 0,001$  у границы между областями 1 и 2). При выходе на стационарный режим ( $ct = 400$ ) для достижения точного решения по схемам  $MDS_n$ , REED, DDAD приходится вводить в рассмотрение пространственную сетку в 10 раз мельче исходной во всей системе. Схемы  $MDS_n$ , REED и DDAD требуют примерно в 10 раз меньше точек, чем схема 1-го порядка при сопоставимых результатах.

Вторая и третья задачи основаны на аналитических решениях, что значительно упрощает процесс сравнительных расчетов.

Вторая задача достаточно сильно зависит от сеток по пространству и по углу. Значительная зависимость от пространственной сетки особенно проявляется на фронте волны. Наглядно видна очень медленная сходимость к точному решению схемы 1-го порядка. Схемы 2-го порядка требуют примерно в 5 раз меньше точек, чем схема 1-го порядка при сопоставимых результатах.

Третья задача сильно зависит от сетки по  $\mu$  и слабо зависит от пространственной сетки и шага по времени, поэтому на данном тесте схемы 2-го порядка не дают заметного преимущества перед схемой 1-го порядка. Для достижения сходимости к точному решению приходится вводить в рассмотрение очень подробную сетку по углу.

Анализ проведенных численных расчетов показывает, что использование схем  $MDS_n$ , REED и DDAD дает близкие результаты. Численные расчеты подтверждают положительность и второй порядок аппроксимации у данных схем.

Список литературы

1. Fleck J. A., Jr. and Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.
2. Андреев Е. С., Думкина Г. В., Козманов М. Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и спектрального нестационарного переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1981. Т. 21. Вып. 4. С. 1054–1055.
3. Андреев Е. С., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Точные решения системы уравнений переноса излучения с разрывом на границе раздела двух сред // Там же. 1984. Т. 24. Вып. 1. С. 161–163.
4. Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243–258.
5. Козманов М. Ю. Монотонные схемы для системы переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 2. С. 51–55.
6. Барышева Н. М., Зуев А. И., Карлыханов Н. Г., Лыков В. А., Черняков В. Е. Неявная схема для численного моделирования физических процессов в лазерной плазме // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 401–410.
7. Reed W. H. New difference schemes for the neutron transport equation // Nucl. Sci. Eng. Vol. 46, No 2. P. 309–314.
8. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
9. Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.  $DS_n$ -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. С. 33–46.
10. Дибиров О. А., Елесин В. А., Троциев В. Е., Юдинцев В. Ф. Метод численного решения сферически-симметричных спектральных задач переноса теплового излучения // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 1(1). С. 10–17.
11. Федотова Л. П., Шагалиев Р. М. Конечно-разностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 6. С. 29–41.

Статья поступила в редакцию 27.06.05.