

УДК 519.6

## ЯВНО-НЕЯВНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В МЕТОДИКЕ ЛЭГАК-3D

С. М. Бахрах, С. В. Величко, С. С. Косарим, О. Н. Кулыгина, М. В. Лучинин,  
А. О. Наумов, В. Ф. Спиридонов, И. Ю. Тарадай, К. В. Циберев  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Описывается реализованный в методике ЛЭГАК-3D явно- неявный алгоритм расчета трехмерных газодинамических течений, позволяющий сокращать время проведения расчетов. Идея алгоритма состоит в увеличении счетного временного шага благодаря использованию в условии устойчивости увеличенного в заданное количество раз числа Куранта. При этом группы "плохих" ячеек, которые "держат" шаг, рассчитываются по неявной схеме. Остальные ячейки рассчитываются явно. Реализация метода заключается в решении диффузионного уравнения для давления. Представлены две неявные разностные схемы, аппроксимирующие данное уравнение.

Алгоритм распараллелен. В качестве демонстрации его дееспособности приводятся примеры расчетов некоторых тестовых задач.

### Введение

Как известно, использование явных разностных схем для численного решения задач газовой динамики приводит к ограничениям на шаг по времени, которые связаны с устойчивостью разностной схемы. От этого недостатка свободны безусловно устойчивые неявные схемы. Однако объем вычислений в таких схемах существенно больше, нежели в явных. Вместе с тем хорошо известны ситуации, когда применение неявных схем дает положительный эффект экономии времени, например при решении задач, где имеются вещества с большой скоростью звука: "квазиинерционный" полет оболочек и т. д.

Отметим особо ситуации, когда шаг по времени ограничивается сравнительно небольшой (относительно общего числа) группой точек либо за счет геометрических факторов, либо из-за физического состояния веществ в ячейке. В этих случаях привлекательной явилась бы возможность рассчитывать группы "плохих" точек вместе с некоторой окрестностью по неявной схеме (и за счет этого увеличивать счетный шаг), а остальные точки — по явной. На этом пути можно добиться оптимизации объема вычислений за счет выбора тактики сочетания явной и неявной схем. Такой подход используется уже достаточно давно [1], например, в методике ЛЭГАК [2].

При численном моделировании трехмерных нестационарных газодинамических течений указанный подход является еще более актуальным. Данная работа посвящена реализации явно-неявного алгоритма и обеспечению его функционирования на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью в рамках методики ЛЭГАК-3D [3].

Задача сводится к определению давления из уравнения диффузионного типа

$$\frac{dP}{dt} = \tau c^2 \rho \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \right).$$

Найденное значение давления используется далее в уравнениях движения и энергии. Эффективность такой схемы расчетов зависит от того, насколько экономично по числу операций решается соответствующее разностное уравнение. В двумерной методике ЛЭГАК с этой целью использовался алгоритм расщепления по направлениям при организации прогонок [1].

В методике ЛЭГАК-3D для решения диффузионного уравнения для давления также применяется метод расщепления по направлениям. При этом для построения разностной схемы рассмотрено и реализовано два подхода, которые будут представлены ниже.

### Общий вид уравнений

Система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\text{grad } P; & \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{U}; \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \text{div } \vec{U}; & \frac{de}{dt} &= -\frac{P}{\rho} \text{div } \vec{U}; & P &= P(e, \rho). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $e$  — удельная внутренняя энергия;  $P$  — давление;  $\vec{r} = (x, y, z)$  — координатный вектор.

Путем несложной комбинации из уравнений системы (1) можно вывести уравнение для давления

$$\frac{dP}{dt} = \tau c^2 \rho \text{div} \frac{1}{\rho} \text{grad } P - \alpha c^2 \rho \text{div } \vec{U},$$

которое для повышения устойчивости будем решать неявно по давлению. Здесь  $\alpha$  — коэффициент *предвычисленного* давления.

Принцип включения неявного алгоритма состоит в следующем.

В программе расчета лагранжевой газодинамики введен параметр  $k_{incr}$  — коэффициент увеличения числа Куранта. Если он равен единице, расчет всей области производится по явной схеме [4]. Если задано значение параметра, большее единицы, включается явно-неявный алгоритм. При этом перед счетом шага вычисляется допустимый временной шаг с увеличенным числом Куранта  $\tau_{incr}^n$ , но с учетом условия на ударной волне. Именно с этим временным шагом будет производиться интегрирование уравнений газовой динамики.

Затем в цикле в каждой ячейке счетной области вычисляется локальный допустимый временной шаг по обычному условию Куранта  $\tau_{k,i,s}^n$  и сравнивается с  $\tau_{incr}^n$ . Если  $\tau_{k,i,s}^n \geq \tau_{incr}^n$ , давление в ячейке будет рассчитываться по явной схеме. Если же  $\tau_{k,i,s}^n < \tau_{incr}^n$ , то давление в ячейке вместе со всеми прилегающими ячейками (это необходимо для применения метода прогонок) будет рассчитываться по неявной схеме.

### Решение диффузионного уравнение для давления

Будем решать диффузионное уравнение для давления:

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \tau c^2 \rho \text{div} \frac{1}{\rho} \text{grad } \hat{P}. \quad (2)$$

Здесь  $\hat{P} = P^n - \alpha \tau c^2 \rho (\text{div } \vec{U})^n$  — *предвычисленное* давление.

После решения уравнения (2) система (1) разрешается явным образом.

**Разностная схема на основе аппроксимационных формул трехмерной лагранжевой газодинамики.** Рассмотрим первый способ разностного решения уравнения (2). Данный подход основан на использовании аппроксимационных формул трехмерной лагранжевой газодинамики комплекса ЛЭГАК-3D [4].

Введем обозначение  $\vec{G} = \frac{1}{\rho} \text{grad } \hat{P}$ . Проинтегрируем уравнение (2) по объему счетной ячейки (рис. 1):

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} dV = \iiint_V \tau c^2 \rho \text{div } \vec{G} dV.$$

Считая давление внутри ячейки постоянным и применяя к правой части формулу Гаусса—Остроградского, получаем

$$V \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = \tau c^2 \rho \sum_{l=1}^6 (\vec{G}_l \cdot \vec{n}_l) S_l, \quad (3)$$

где  $V$  — объем ячейки;  $l$  — номер грани;  $\vec{G}_l = 0,25 (\vec{G}_l^1 + \vec{G}_l^2 + \vec{G}_l^3 + \vec{G}_l^4)$  — усредненный по всем замыкающим к грани  $l$  узлам вектор  $\vec{G}$ ;  $n_l$  — вектор нормали к грани  $l$ ;  $S_l$  — площадь грани  $l$ . Вычисление градиента давления в узлах подробно изложено в работе [4], поэтому выписывать соотношения для векторов  $\vec{G}_l^i$  не будем.

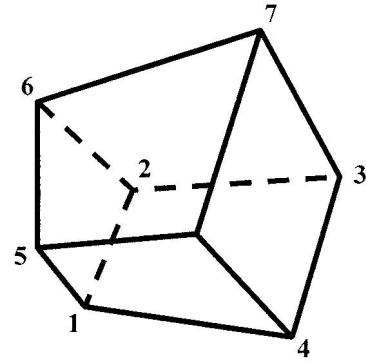


Рис. 1. Счетная ячейка

Если полностью расписать уравнение (3) и привести подобные члены относительно давлений, входящих в правую часть, получится следующее конечно-разностное уравнение:

$$\begin{aligned} P_{222}^{n+1} = & P_{222}^n + \frac{\tau^2 c^2 \rho_{222}}{4V_{222}} (P_{111}k_{111} + P_{112}k_{112} + P_{113}k_{113} + P_{121}k_{121} + P_{122}k_{122} + P_{123}k_{123} + \\ & + P_{131}k_{131} + P_{132}k_{132} + P_{133}k_{133} + P_{211}k_{211} + P_{212}k_{212} + P_{213}k_{213} + P_{221}k_{221} + P_{222}k_{222} + \\ & + P_{223}k_{223} + P_{231}k_{231} + P_{232}k_{232} + P_{233}k_{233} + P_{311}k_{311} + P_{312}k_{312} + P_{313}k_{313} + P_{321}k_{321} + \\ & + P_{322}k_{322} + P_{323}k_{323} + P_{331}k_{331} + P_{332}k_{332} + P_{333}k_{333}). \end{aligned} \quad (4)$$

В формуле (4) каждый нижний индекс состоит из трех цифр. Первая цифра соответствует номеру столбца, вторая — номеру строки, третья — номеру листа. При этом цифра 2 соответствует номеру столбца  $k$ , если стоит первой, строки  $i$ , если стоит второй, и листа  $s$ , если стоит третьей. Цифра 1 соответствует уменьшенному на единицу номеру столбца, строки или листа, а цифра 3 — увеличенному на единицу номеру столбца, строки или листа. Например,  $P_{123}$  обозначает давление в ячейке с координатами  $(k-1, i, s+1)$ . Также в формуле (4) над давлением опущен значок  $\wedge$  — подразумевается, что используется предвычисленное давление.

К уравнению (4) применим метод расщепления по направлениям. В результате получится следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} P_{222}^{n+1/3} = & P_{222}^n + \frac{\tau^2 c^2 \rho_{222}}{4V_{222}} \left( P_{111}^n k_{111}^1 + P_{112}^n k_{112}^1 + P_{113}^n k_{113}^1 + P_{121}^n k_{121}^1 + P_{122}^{n+1/3} k_{122}^1 + P_{123}^n k_{123}^1 + \right. \\ & + P_{131}^n k_{131}^1 + P_{132}^n k_{132}^1 + P_{133}^n k_{133}^1 + P_{211}^n k_{211}^1 + P_{212}^n k_{212}^1 + P_{213}^n k_{213}^1 + P_{221}^n k_{221}^1 + \\ & + P_{222}^{n+1/3} k_{222}^1 + P_{223}^n k_{223}^1 + P_{231}^n k_{231}^1 + P_{232}^n k_{232}^1 + P_{233}^n k_{233}^1 + P_{311}^n k_{311}^1 + P_{312}^n k_{312}^1 + \\ & \left. + P_{313}^n k_{313}^1 + P_{321}^n k_{321}^1 + P_{322}^{n+1/3} k_{322}^1 + P_{323}^n k_{323}^1 + P_{331}^n k_{331}^1 + P_{332}^n k_{332}^1 + P_{333}^n k_{333}^1 \right); \\ P_{222}^{n+2/3} = & P_{222}^{n+1/3} + \frac{\tau^2 c^2 \rho_{222}}{4V_{222}} \left( P_{111}^{n+1/3} k_{111}^2 + P_{112}^{n+1/3} k_{112}^2 + P_{113}^{n+1/3} k_{113}^2 + P_{121}^{n+1/3} k_{121}^2 + \right. \\ & + P_{122}^{n+1/3} k_{122}^2 + P_{123}^{n+1/3} k_{123}^2 + P_{131}^{n+1/3} k_{131}^2 + P_{132}^{n+1/3} k_{132}^2 + P_{133}^{n+1/3} k_{133}^2 + P_{211}^{n+1/3} k_{211}^2 + \\ & + P_{212}^{n+2/3} k_{212}^2 + P_{213}^{n+1/3} k_{213}^2 + P_{221}^{n+1/3} k_{221}^2 + P_{222}^{n+2/3} k_{222}^2 + P_{223}^{n+1/3} k_{223}^2 + P_{231}^{n+1/3} k_{231}^2 + \\ & + P_{232}^{n+2/3} k_{232}^2 + P_{233}^{n+1/3} k_{233}^2 + P_{311}^{n+1/3} k_{311}^2 + P_{312}^{n+1/3} k_{312}^2 + P_{313}^{n+1/3} k_{313}^2 + P_{321}^{n+1/3} k_{321}^2 + \\ & \left. + P_{322}^{n+1/3} k_{322}^2 + P_{323}^{n+1/3} k_{323}^2 + P_{331}^{n+1/3} k_{331}^2 + P_{332}^{n+1/3} k_{332}^2 + P_{333}^{n+1/3} k_{333}^2 \right); \\ P_{222}^{n+1} = & P_{222}^{n+2/3} + \frac{\tau^2 c^2 \rho_{222}}{4V_{222}} \left( P_{111}^{n+2/3} k_{111}^3 + P_{112}^{n+2/3} k_{112}^3 + P_{113}^{n+2/3} k_{113}^3 + P_{121}^{n+2/3} k_{121}^3 + P_{122}^{n+2/3} k_{122}^3 + \right. \\ & + P_{123}^{n+2/3} k_{123}^3 + P_{131}^{n+2/3} k_{131}^3 + P_{132}^{n+2/3} k_{132}^3 + P_{133}^{n+1/3} k_{133}^3 + P_{211}^{n+2/3} k_{211}^3 + P_{212}^{n+2/3} k_{212}^3 + \\ & \left. + P_{213}^{n+2/3} k_{213}^3 + P_{221}^{n+1} k_{221}^3 + P_{222}^{n+1} k_{222}^3 + P_{223}^{n+1} k_{223}^3 + P_{231}^{n+2/3} k_{231}^3 + P_{232}^{n+2/3} k_{232}^3 + \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 &+ P_{233}^{n+1/3} k_{233}^3 + P_{311}^{n+2/3} k_{311}^3 + P_{312}^{n+2/3} k_{312}^3 + P_{313}^{n+2/3} k_{313}^3 + P_{321}^{n+2/3} k_{321}^3 + \\
 &+ P_{322}^{n+2/3} k_{322}^3 + P_{323}^{n+2/3} k_{323}^3 + P_{331}^{n+2/3} k_{331}^3 + P_{332}^{n+2/3} k_{332}^3 + P_{333}^{n+1/3} k_{333}^3 \Big).
 \end{aligned}$$

Здесь  $k^j$  — соответствующие коэффициенты расщепления, которые в сумме дают коэффициент из формулы (4) без верхнего индекса.

Каждое уравнение системы решается методом прогонки.

Построенную разностную схему назовем *схемой 1*.

**Разностная схема с использованием в листах двумерного алгоритма.** Второй способ аппроксимации диффузионного уравнения (??) основан на использовании в листах двумерного алгоритма [1]. Такой подход будет применяться для задач, имеющих в своей геометрии ось (цилиндрическая или сферическая геометрия).

Рассмотрим фрагмент счетной сетки в листе (рис. 2). При этом в качестве координат счетной сетки берутся следующие соотношения:  $x_{i,k} = x_{k,i,s}$ ;  $y_{i,k} = \sqrt{y_{k,i,s}^2 + z_{k,i,s}^2}$ . В работе [1] дифференциальное уравнение (2) аппроксимируется следующим конечно-разностным уравнением:

$$\left[ \frac{P^{n+1} - P^n}{\tau} = \left( \frac{\tau c^2 \rho}{V} \right)^n \sum_{l=1}^4 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} S \right)_l \right]_{(i,k)} \quad (6)$$

Здесь  $V_{i,k}$  — объем вращения ячейки  $(i, k)$  при повороте на 1 радиан вокруг оси;  $l$  — номер прилегающего к ячейке ребра (на рис. 2 номер ребра соответствует номеру прилегающей ячейки);  $S_l$  — площадь поверхности вращения ребра с номером  $l$  при повороте на 1 радиан;  $\left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_l$  — производная от давления по направлению нормали к ребру  $l$ .

Распишем одно из слагаемых, входящих в сумму в правой части. Остальные слагаемые вычисляются аналогично.

Рассмотрим первое ребро и примыкающие к нему шесть ячеек (рис. 3). Цифрами на рис. 3 обозначены геометрические центры соответствующих ячеек;  $C_1$  — середина первого ребра. Проведем срединный перпендикуляр к первому ребру и найдем точки пересечения  $A_1$  и  $B_1$  данного перпендикуляра с отрезками, соединяющими центры нижних и верхних ячеек соответственно. При этом, если точка 1 лежит справа от срединного перпендикуляра, точка  $A_1$  будет принадлежать отрезку, соединяющему центры ячеек 1 и 6. В противном случае точка  $A_1$  будет принадлежать отрезку, соединяющему центры ячеек 1 и 7. Аналогичные рассуждения проводятся при нахождении точки  $B_1$ .

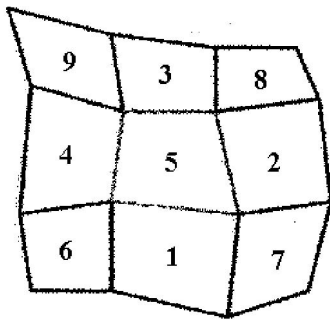


Рис. 2. Фрагмент счетной сетки в листе

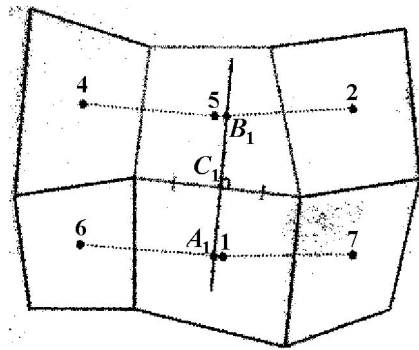


Рис. 3. Фрагмент счетной сетки, содержащей первое ребро

Теперь можно выписать конечно-разностное соотношение для первого слагаемого суммы в правой части выражения (6):

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} S\right)_{l=1} = \frac{P(A_1) - P(B_1)}{\rho_1 r_{A_1 C_1} + \rho_5 r_{B_1 C_1}} S_1. \quad (7)$$

Здесь  $P(A_1)$ ,  $P(B_1)$  — интерполяционное давление соответственно в точках  $A_1$  и  $B_1$ , вычисление которого будет описано ниже;  $\rho_1$  и  $\rho_5$  — плотность ячеек 1 и 5;  $r_{A_1 C_1}$  — расстояние от середины ребра  $C_1$  до точки  $A_1$ ;  $r_{B_1 C_1}$  — расстояние от середины ребра  $C_1$  до точки  $B_1$ .

Остановимся на вычислении интерполяционного давления в точках  $A_1$  и  $B_1$  (см. рис. 3). Точка  $A_1$  получается при пересечении срединного перпендикуляра с отрезком 61 (соединяющим точки 6 и 1), точка  $B_1$  получается при пересечении срединного перпендикуляра с отрезком 52. Введем следующие обозначения:  $\alpha_{A_1}$  — расстояние между точками 1 и  $A_1$ , деленное на расстояние между точками 1 и 6;  $\alpha_{B_1}$  — расстояние между точками 5 и  $B_1$ , деленное на расстояние между точками 5 и 2. Тогда соответствующее интерполяционное давление будем вычислять по следующим соотношениям:

$$P(A_1) = \alpha_{A_1} P_{6(7)} + (1 - \alpha_{A_1}) P_1, \quad P(B_1) = \alpha_{B_1} P_{2(4)} + (1 - \alpha_{B_1}) P_5. \quad (8)$$

Здесь  $P_i$  — давление в  $i$ -й ячейке, а запись  $P_{j(k)}$  означает, что в интерполяционной формуле в зависимости от положения точек пересечения  $A_1$  и  $B_1$  может использоваться как давление  $P_j$ , так и давление  $P_k$ .

Подставив интерполяционное давление (8) в выражение (7), получим

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} S\right)_{l=1} = \frac{P_1 - P_5 + \alpha_{A_1} (P_{6(7)} - P_1) - \alpha_{B_1} (P_{2(4)} - P_5)}{\rho_1 r_{A_1 C_1} + \rho_5 r_{B_1 C_1}} S_1.$$

Аппроксимацию по времени запишем следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} S\right)_{l=1} = \frac{(P_1 - P_5)^{n+2/3}}{\rho_{-r}(A_1 B_1)} S_1 + R_1^n, \quad (9)$$

где  $\rho_{-r}(A_1 B_1) = \rho_1 r_{A_1 C_1} + \rho_5 r_{B_1 C_1}$ ;  $R_1^n = \frac{\alpha_{A_1} (P_{6(7)} - P_1)^n - \alpha_{B_1} (P_{2(4)} - P_5)^n}{\rho_{-r}(A_1 B_1)} S_1$ . Выражение (9) аппроксимирует соотношение (7) с первым порядком по времени.

Аналогичным способом аппроксимируются остальные три слагаемых суммы в выражении (6). Запишем общую формулу для этих слагаемых, пропустив промежуточные выкладки:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} dS\right)_{l=i} = \frac{(P_i - P_5)^{n+2/3}}{\rho_{-r}(A_i B_i)} S_i + R_i^n.$$

Выпишем окончательное разностное уравнение, аппроксимирующее выражение (6):

$$\begin{aligned} \frac{P_5^{n+2/3} - P_5^n}{\tau} = & \left(\frac{\tau c^2 \rho}{V}\right)_5 \left( \frac{S_1}{\rho_{-r}(A_1 B_1)} (P_1 - P_5)^{n+2/3} + R_1^n + \frac{S_2}{\rho_{-r}(A_2 B_2)} (P_2 - P_5)^{n+2/3} + R_2^n + \right. \\ & \left. + \frac{S_3}{\rho_{-r}(A_3 B_3)} (P_3 - P_5)^{n+2/3} + R_3^n + \frac{S_4}{\rho_{-r}(A_4 B_4)} (P_4 - P_5)^{n+2/3} + R_4^n \right). \end{aligned}$$

Это уравнение будем решать методом расщепления по направлениям. В результате получим следующую систему конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{P_5^{n+1/3} - P_5^n}{\tau} = & \left(\frac{\tau c^2 \rho}{V}\right)_5 \left( \frac{S_1}{\rho_{-r}(A_1 B_1)} (P_1 - P_5)^{n+1/3} + R_1^n + \frac{S_3}{\rho_{-r}(A_3 B_3)} (P_3 - P_5)^{n+1/3} + R_3^n \right); \\ \frac{P_5^{n+2/3} - P_5^{n+1/3}}{\tau} = & \left(\frac{\tau c^2 \rho}{V}\right)_5 \left( \frac{S_2}{\rho_{-r}(A_2 B_2)} (P_2 - P_5)^{n+2/3} + R_2^{n+1/3} + \frac{S_4}{\rho_{-r}(A_4 B_4)} (P_4 - P_5)^{n+2/3} + R_4^{n+1/3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Каждое уравнение системы (10) будем решать методом прогонки. После того как будет рассчитано поле давлений  $P^{n+2/3}$ , применим разностную схему расщепления вдоль листов из системы (5). Построенную разностную схему назовем *схемой 2*.

### Распараллеливание алгоритма

При распараллеливании явно-неявного алгоритма (здесь употребляется единственное число, так как принципы распараллеливания схем совершенно идентичны) расчета газодинамики был использован тот факт, что решение по используемой неявной схеме при выбранном направлении прогонки на каждой из групп точек не зависит от результатов прогонки для других групп точек. Это позволяет упорядочить группы точек таким образом, чтобы как можно раньше запустить прогонку для тех групп, которые требуют передачи коэффициентов прогонки с одного процесса на другой.

Каждую группу точек при выбранном направлении прогонки можно отнести к одной из четырех групп со следующими свойствами:

- 1) начало группы точек принадлежит текущему процессу, но конец группы точек текущему процессу не принадлежит;
- 2) начало и конец группы точек не принадлежат текущему процессу;
- 3) начало группы точек не принадлежит текущему процессу, а конец принадлежит;
- 4) группа точек целиком принадлежит текущему процессу.

Работа программы при выбранном направлении реорганизована так, что на первом этапе производится анализ групп точек и занесение каждой из них в один из четырех списков в соответствии с описанными типами. Для каждой группы точек заполняется специально разработанная структура данных. Процесс нахождения решения для каждой группы точек разбит на три части: вычисления для нахождения коэффициентов прогонки, прямую прогонку и обратную прогонку.

Второй этап работы программы организован так, чтобы максимально совместить ожидание получения коэффициентов прогонки с соседних процессов с предварительными вычислениями коэффициентов для точек текущего процесса и расчетом прогонок для групп точек 4-го типа, полностью принадлежащих текущему процессу.

### Демонстрационные расчеты

**Задача об обжатии газа сферической оболочкой.** В области  $8 \leq r \leq 10$ ;  $0 \leq \theta \leq 15^\circ$  ( $\theta$  — угол между граничными плоскостями) находится идеальный газ ( $\gamma = 5/3$ ) с начальной плотностью  $\rho_0^1 = 25$  и нулевыми значениями скорости и давления. В области  $0 \leq r \leq 8$ ;  $0 \leq \theta \leq 15^\circ$  также заключен идеальный газ ( $\gamma = 5/3$ ) с нулевыми значениями скорости и давления, его начальная плотность  $\rho_0^2 = 1$  (рис. 4).

Граничные условия: на внешней границе задано постоянное давление  $P = 1$ ; граничные плоскости  $\theta = 0$  и  $\theta = 15^\circ$  являются *жесткими стенками*.

Две области равномерно разбивались на 37 столбцов, 21 строку, 4 листа. Угол между листами такой же, как между столбцами. Задача считалась в скалярном режиме в лагранжевой постановке до момента максимального сжатия газа в центре при варьировании коэффициента увеличения шага от 2 до 5.

Результаты, полученные при использовании явно-неявного алгоритма отличаются от результатов по явной схеме не более чем на 0,15%. Порядок максимального коэффициента ускорения счета составил  $\sim 3$  при увеличении счетного шага в 5 раз.

В рамках исследования эффективности распараллеливания алгоритма была проведена серия расчетов с коэффициентом увеличения шага, равным 5. Использовались 2, 4 и 6 процессоров. В табл. 1 приведены полученные значения эффективности распараллеливания.

Как видно из таблицы, эффективность распараллеливания второй схемы выше. При этом минимальное значение эффективности не падает ниже 70%.

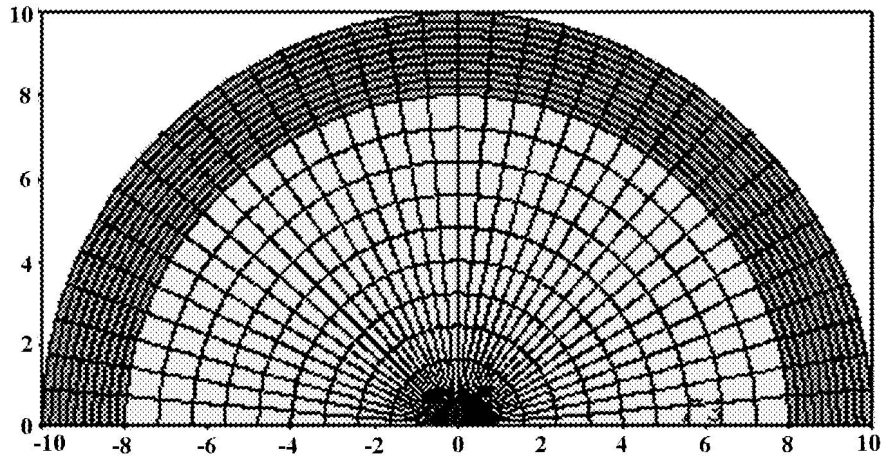


Рис. 4. Начальная геометрия задачи об обжатии газа сферической оболочкой и начальная расчетная сетка (первый лист)

Таблица 1

**Показатели эффективности распараллеливания алгоритма**

$k_{incr}$	Число используемых процессоров, $n_p$	Схема	Время счета, с	Эффективность, $E = \frac{t_1}{n_p t_{n_p}} \cdot 100\%$
5	1	1	101,8	–
		2	92,3	–
	2	1	58,5	87
		2	50,0	92
	4	1	30,4	84
		2	26,4	87
	6	1	23,5	72
		2	19,4	79

**Задача об адиабатическом разлете в вакуум трехосного эллипсоида [5].** Исходная геометрия представляет собой 1/8 часть от трехосного эллипсоида ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) с полуосями  $a_x = 3, a_y = 2, a_z = 1$ . Область заполнена идеальным газом ( $\gamma = 7/5$ ).

Начальное распределение плотности и давления задается соотношениями  $P_0 = (1 - \eta^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$ ;  $\rho_0 = (1 - \eta^2)^{1/(\gamma-1)}$ . Здесь  $\eta^2 = \frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2}$ .

Границы, лежащие на координатных плоскостях, являются жесткими стенками. На внешней границе задано нулевое давление.

Разбиение задачи состоит из 16 столбцов, 30 строк и 16 листов.

Результаты расчетов с разными коэффициентами увеличения шага в скалярном режиме приведены в табл. 2. Видно, что результаты практически совпадают, при этом по второй схеме счет выполняется несколько быстрее.

В табл. 3 приведены результаты замеров эффективности распараллеливания при увеличении счетного шага втрое. Исследования проводились на 2, 4 и 8 процессорах.

Таблица 2

Результаты расчетов задачи об адиабатическом разлете в вакуум трехосного газового эллипсоида

$k_{incr}$	Схема	$U_x$	$U_y$	$U_z$	$S_1 = \frac{a_y}{a_x}$	$S_2 = \frac{a_z}{a_y}$	$S_3 = \frac{a_z}{a_x}$	Время счета, с	Число шагов	Ускорение счета
1	1,2	2,47	3,07	3,96	1,24	1,3	1,6	819,7	13 561	—
2	1	2,47	3,07	3,96	1,24	1,3	1,6	557,2	7 876	1,47
	2	2,46	3,07	3,95	1,24	1,3	1,6	543,2	7 875	1,51
3	1	2,47	3,07	3,95	1,24	1,3	1,6	428,9	6 072	1,91
	2	2,47	3,07	3,95	1,24	1,3	1,6	419,6	6 075	1,95
Асимп.	решение	2,56	3,17	4,27	1,23	1,35	1,66	—	—	—

Таблица 3

Показатели эффективности распараллеливания алгоритма

$k_{incr}$	Число используемых процессоров, $n_p$	Схема	Время счета, с	Эффективность, $E = \frac{t_1}{n_p t_{n_p}} \cdot 100\%$	
3	1	1	318,9	—	
		2	313,6	—	
	2	1	177,5	90	
		2	169,7	92	
	4	1	1	102,4	78
			2	95,0	82
		8	1	64,8	62
			2	58,2	67

Из результатов этой задачи, как и предыдущей, видно, что эффективность распараллеливания второй схемы выше. При этом она падает с увеличением числа используемых процессоров. В данном случае это объясняется слишком малым количеством рассчитываемых точек, приходящихся на один процессор. Минимальная эффективность составила  $\sim 62\%$ .

### Заключение

Представленные в статье две неявные разностные схемы расчета газодинамики реализованы в рамках комплекса программ ЛЭГАК-3D. Демонстрационные расчеты показали дееспособность и практическую ценность явно-неявных алгоритмов.

Наибольшая практическая польза данных алгоритмов проявляется при решении задач, где число точек в тысячи раз больше, чем в представленных расчетах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02—01—00786 и 05—01—00083).



### Список литературы

1. *Бахрах С. М., Жарова Г. В., Спиридонов В. Ф.* Консервативная схема счета осесимметричных течений (явно-неявный алгоритм) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 3(11). С. 15–21.
2. *Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф. и др.* Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 14–18.
3. *Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф. и др.* Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Там же. 2004. Вып. 4. С. 41–50.
4. *Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Зайцева М. О., Наумов А. О., Тихонова А. П.* Разностная схема расчета трехмерной лагранжевой газодинамики в комплексе ЛЭГАК-3D // Сб. докл. III науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 2004. С. 77–83.
5. *Немчинов И. В.* Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме // ПММ. 1965. Вып. 1. С. 134–140.

Статья поступила в редакцию 26.12.05.

---