

УДК 517.958:536.2

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ ПО СХЕМЕ РОМБ

А. Д. Гаджиев, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается метод выделения диагональной матрицы для ускорения итераций при численном решении уравнения переноса излучения в P_1 -приближении по схеме РОМБ. Суть метода состоит в задании одностороннего потока излучения с предыдущей итерации на границах разностных ячеек и получении диагональной матрицы для определения температуры.

Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляют собой нелинейную систему. Если линеаризовать функцию Планка и внутреннюю энергию по температуре и исключить температуру, получим уравнение переноса излучения с полной матрицей рассеяния [1]. Если использовать метод простой итерации или итерации Зейделя, то получается медленно сходящийся процесс при больших оптических толщинах.

В работе Фотрие [1] для решения линеаризованной системы предложено применять прямой метод матричной прогонки. Объем вычислений этого метода пропорционален IG^3 , где I — число узлов разностной сетки, G — число групп.

Если для решения линеаризованной системы для схем трехточечного типа использовать метод типа Якоби, получим метод из работы [2].

Другой подход для совместного решения уравнения энергии и многогруппового уравнения переноса излучения для схем трехточечного типа предложен Райбики [1] в 1971 г. В этом методе плотность излучения в данной точке выражается на основе прямого метода через функцию Планка во всех точках. Подставляя эту плотность излучения в уравнение энергии и линеаризуя по температуре, получаем систему уравнений с полной матрицей относительно температуры. Объем вычислений в этом методе пропорционален $GI^2 + I^3$.

Если в системе уравнений диффузии аналогично итерациям типа Якоби выразить плотность излучения через функцию Планка в той же точке и подставить это выражение в уравнение энергии, получим систему уравнений с диагональной матрицей относительно температуры. Используя полученную температуру, исходную систему можно решить либо прогонкой в одномерном случае, либо итерационными методами в двумерном случае. Такой метод итераций был предложен в работе [3].

Классические методы, используемые для решения задач спектральной диффузии, ориентированы на трехточечные разностные схемы с диагональным преобладанием, а схема РОМБ [4], используемая в данной работе, представляет собой двухточечную схему. Формально применить метод выделения диагонального элемента (ВДЭ) к двухточечным схемам не удастся, так как он ориентирован на трехточечный шаблон с выделением диагонального члена. В работах [5, 6] предложено применять метод ВДЭ к двухточечной схеме РОМБ, записанной в эквивалентной трехточечной форме. Рассмотрено два варианта метода, обладающих достаточно высокой скоростью сходимости как в оптически прозрачных, так и в оптически плотных средах. Однако в многомерном случае привести схему РОМБ к трехточечной форме не удастся. Приходится ограничиваться приближенными формулами

приведения к трехточечному виду. Кроме того, в методе ВДЭ, реализованном в [7], используются упрощенные параметры разностной схемы $\delta = 1/(4m)$, $\theta = 0$, что бывает обременительным для некоторых задач. Поэтому стала актуальной задача построения итерационных методов типа ВДЭ для схемы РОМБ с произвольными параметрами δ , θ .

Для многомерных задач переноса излучения неясно, как применять прямые методы типа Фортри или Райбики. Поэтому создание эффективных быстроходящихся итерационных методов в многомерном случае является актуальной задачей. В итерационном методе выделения диагональной матрицы (ВДМ), рассматриваемом в данной работе, предлагается использовать комбинацию плотности и потока излучения с предыдущей итерации на границах счетных ячеек. В качестве комбинации предлагается использовать либо односторонние потоки, либо инварианты Римана, либо счетные псевдоинварианты схемы РОМБ.

В разд. 1 рассмотрен метод ВДМ для схемы РОМБ в одномерном случае. В разд. 2 этот метод рассмотрен в двумерном случае. В разд. 3 рассмотрены численные расчеты модельной задачи.

1. Одномерный случай

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом P_1 -приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_g}{\rho} \right) + \frac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \beta \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{S_g}{\rho} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial U_g}{\partial x} + \alpha_g S_g &= 0; \\ \rho \frac{dE}{dt} &= \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g) + \rho Q. \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность вещества; c — скорость света; t — время; x — координата; $U_g = \int_{-1}^1 J_g d\mu$ — плотность излучения энергетической группы g ($g = 1, \dots, G$), умноженная на скорость света; $S_g = \int_{-1}^1 \mu J_g d\mu$ — поток излучения группы g ; J_g — интенсивность излучения группы g ; ε_g — энергия группы g ; Q — источник; B_g — функция Планка; α_{cg} — коэффициент поглощения фотонов; α_{sg} — коэффициент рассеяния фотонов; $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$ — коэффициент ослабления; $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$; E — внутренняя энергия вещества; $\beta = 0$ в случае диффузионного приближения, $\beta = 1$ в P_1 -приближении.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_{0,g} U_g + \beta_{0,g} S_g = \varphi_{0,g}; \quad \alpha_{1,g} U_g + \beta_{1,g} S_g = \varphi_{1,g},$$

где $\alpha_{0,g}$, $\beta_{0,g}$, $\varphi_{0,g}$, $\alpha_{1,g}$, $\beta_{1,g}$, $\varphi_{1,g}$ — параметры для задания граничных условий.

Разностная аппроксимация по схеме РОМБ. Сначала рассмотрим метод ВДМ для одномерного случая без учета движения среды. Система разностных P_1 -уравнений имеет следующий вид (для упрощения записи здесь опущены индексы g и $i + 1/2$) [5]:

$$\begin{aligned} qU^{n+1} + \frac{1}{h} \Delta_i S^{n+1} &= \frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1}; \\ q_2 S^{n+1} + \frac{1}{3h} \Delta_i U^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau} S^n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c$; $q_2 = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha_c + \alpha_s$; $h = x_{i+1} - x_i$.

Систему разностных уравнений (1) дополняем соотношениями, связывающими U и S с целыми и полуцелыми индексами:

$$U_{i+1/2} = \frac{U_{i+1} + U_i}{2} + \delta_{i+1/2} \Delta_i S; \quad S_{i+1/2} = \frac{S_{i+1} + S_i}{2} + \theta_{i+1/2} \Delta_i U.$$

Параметры δ , θ определяются ниже.

Подставляя соотношения связи в систему (1), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} &= f_{i+1/2}^0; \\ a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} &= f_{i+1/2}^1, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^0 &= b_i^0 = c_i^1 = d_i^1 = 1; & c_i^0 &= -2a_{i+1/2}; & d_i^0 &= 2a_{i+1/2}; & a_{i+1/2} &= \left(\delta + \frac{1}{qh} \right)_{i+1/2}; \\ a_i^1 &= -2m_{i+1/2}; & b_i^1 &= 2m_{i+1/2}; & m &= \left(\theta + \frac{1}{3q_2h} \right)_{i+1/2}; & \delta &= \frac{1}{4m}; & \theta &= 0; \\ f_{i+1/2}^0 &= \frac{2}{q_{i+1/2}} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B \right)_{i+1/2}; & f_{i+1/2}^1 &= \frac{2}{q_{2,i+1/2}} \frac{\beta}{c\tau} S_{i+1/2}^n. \end{aligned}$$

Метод ВДМ. Будем обсчитывать ячейку разностной сетки независимо от соседних интервалов. В качестве граничного условия на левой границе ячейки в точке i будем рассматривать некоторую комбинацию искомых функций

$$\alpha_0^\nu U_i^{\nu+1/2} + \beta_0^\nu S_i^{\nu+1/2} = \varphi_0^\nu, \quad (3)$$

где $\varphi_0^\nu = \alpha_0^\nu U_i^\nu + \beta_0^\nu S_i^\nu$. В качестве граничного условия на правой границе ячейки в точке $i+1$ будем рассматривать аналогичную комбинацию

$$\alpha_1^\nu U_{i+1}^{\nu+1/2} - \beta_1^\nu S_{i+1}^{\nu+1/2} = \varphi_1^\nu, \quad (4)$$

где $\varphi_1^\nu = \alpha_1^\nu U_{i+1}^\nu - \beta_1^\nu S_{i+1}^\nu$.

Систему линейных уравнений (2) будем решать внутри данной ячейки методом встречной прогонки. Предполагаем связь между U_i и S_i в виде

$$X_i^+ U_i + Y_i^+ S_i = Z_i^+ \quad (5)$$

для прогонки вперед (в сторону роста i) и

$$X_i^- U_i - Y_i^- S_i = Z_i^- \quad (6)$$

для прогонки назад (в сторону убывания i).

Используя уравнения (5), (6), получаем рекуррентные соотношения для нахождения прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned} X_{i+1}^+ &= \langle cb \rangle_i X_i^+ + \langle ba \rangle_i Y_i^+; \\ Y_{i+1}^+ &= \langle cd \rangle_i X_i^+ + \langle da \rangle_i Y_i^+; \\ Z_{i+1}^+ &= \langle cf \rangle_i X_i^+ + \langle fa \rangle_i Y_i^+ + \langle ac \rangle_i Z_i^+ \end{aligned} \quad (7)$$

с нормировкой

$$X_{i+1}^+ = \frac{X_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad Y_{i+1}^+ = \frac{Y_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad Z_{i+1}^+ = \frac{Z_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad i = 0, 1, \dots, I-1,$$

где

$$\begin{aligned} \langle cb \rangle &= c^1 b^0 - c^0 b^1, \quad \langle ba \rangle = b^1 a^0 - b^0 a^1 \text{ и т. д.}; \\ a_i^0 &= b_i^0 = c_i^1 = d_i^1 = 1; \quad c_i^0 = -2a_{i+1/2}; \quad d_i^0 = 2a_{i+1/2}; \quad a_{i+1/2} = \left(\delta + \frac{1}{qh} \right)_{i+1/2}; \\ a_i^1 &= -2m_{i+1/2}; \quad b_i^1 = 2m_{i+1/2}; \quad m = \left(\theta + \frac{1}{3q_2 h} \right)_{i+1/2}; \quad \delta = \frac{1}{4m}; \quad \theta = 0; \\ f_{i+1/2}^0 &= \frac{2}{q_{i+1/2}} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B \right)_{i+1/2}; \quad f_{i+1/2}^1 = \frac{2}{q_{2,i+1/2}} \frac{\beta}{c\tau} S_{i+1/2}^n. \end{aligned}$$

В силу граничного условия на границе Γ_0 ($i = 0$) имеем $X_0^+ = \alpha_0$; $Y_0^+ = \beta_0$; $Z_0^+ = \varphi_0$.

Для прогонки назад

$$\begin{aligned} X_i^- &= \langle da \rangle_i X_{i+1}^- + \langle ba \rangle_i Y_{i+1}^-; \\ Y_i^- &= \langle cd \rangle_i X_{i+1}^- + \langle cb \rangle_i Y_{i+1}^-; \\ Z_i^- &= \langle df \rangle_i X_{i+1}^- + \langle bf \rangle_i Y_{i+1}^- + \langle bd \rangle_i Z_{i+1}^- \end{aligned} \quad (8)$$

с нормировкой

$$X_{i+1}^- = \frac{X_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad Y_{i+1}^- = \frac{Y_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad Z_{i+1}^- = \frac{Z_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad i = I-1, I-2, \dots, 1, 0.$$

В силу граничного условия на границе Γ_1 ($i = I$) имеем $X_I^- = \alpha_1$; $Y_I^- = \beta_1$; $Z_I^- = \varphi_1$.

После проведения встречных прогонок вычисляем U_i , S_i по формулам

$$U_i = \frac{Y_i^- Z_i^+ + Y_i^+ Z_i^-}{X_i^+ Y_i^- + X_i^- Y_i^+}; \quad S_i = \frac{X_i^- Z_i^+ - X_i^+ Z_i^-}{X_i^+ Y_i^- + X_i^- Y_i^+}.$$

Делая в разностной ячейке один шаг для прогонки вперед от точки i и один шаг для прогонки назад от точки $i+1$ по формулам (7), (8), получаем в этих точках уравнения

$$X_{i+1}^+ U_{i+1}^{\nu+1/2} + Y_{i+1}^+ S_{i+1}^{\nu+1/2} = (Z_{i+1}^+)^{\nu+1/2}; \quad (9)$$

$$X_i^- U_i^{\nu+1/2} - Y_i^- S_i^{\nu+1/2} = (Z_i^-)^{\nu+1/2}. \quad (10)$$

Из уравнений (3), (10) получаем

$$U_i = \frac{\varphi_0 Y_i^- + \beta_0 Z_i^-}{\alpha_0 Y_i^- + \beta_0 X_i^-}; \quad S_i = \frac{\varphi_0 X_i^- - \alpha_0 Z_i^-}{\alpha_0 Y_i^- + \beta_0 X_i^-}. \quad (11)$$

Из уравнений (4), (9) получаем

$$U_{i+1} = \frac{\varphi_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 Z_{i+1}^+}{\alpha_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 X_{i+1}^+}; \quad S_{i+1} = \frac{\alpha_1 Z_{i+1}^+ - \varphi_1 X_{i+1}^+}{\alpha_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 X_{i+1}^+}. \quad (12)$$

Из формул (11), (12) с учетом рекуррентных значений (7), (8) для Z_i^+ , Z_{i+1}^+ получаем

$$\Delta_i S = a_{11} B_{i+1/2} + a_{12}, \quad (13)$$

где

$$a_{11} = 2 \frac{\alpha_c}{q} a_1; \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{W_{i+1}} (X_{i+1}^+ + 2m Y_{i+1}^+) + \frac{\alpha_0}{W_i} (X_{i+1}^- + 2m Y_{i+1}^-);$$

$$W_i = \alpha_0 Y_i^- + \beta_0 X_i^-; \quad W_{i+1} = \alpha_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 X_{i+1}^+; \quad a = \delta + \frac{1}{qh}; \quad m = \theta + \frac{1}{3q_2 h};$$

$$a_{12} = \frac{2a_1}{c\tau q} U_{i+1/2}^n + \frac{2a_2 \beta}{c\tau q_2} S_{i+1/2}^n + (R_1)_{i+1/2}^\nu; \quad a_2 = \frac{\alpha_1}{W_{i+1}} (2a X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+) - \frac{\alpha_0}{W_i} (2a X_{i+1}^- + Y_{i+1}^-);$$

$$(R_1)_{i+1/2} = (4a_{i+1/2} m_{i+1/2} - 1) \left(\frac{\alpha_1}{W_{i+1}} Z_{i+1}^+ + \frac{\alpha_0}{W_i} Z_{i+1}^- \right) - \frac{\varphi_1}{W_{i+1}} X_{i+1}^+ - \frac{\varphi_0}{W_i} X_i^-.$$

Подставляя выражение (13) в первое уравнение системы (1), получаем явную формулу для плотности излучения:

$$U_{i+1/2}^{\nu+1/2} = \frac{1}{q_{i+1/2}} \left[\left(\alpha_c - \frac{a_{11}}{h} \right) B^{\nu+1/2} + \frac{1}{c\tau} U^n - \frac{a_{12}}{h} \right]_{i+1/2}. \quad (14)$$

Выражая аналогично $\Delta_i U$ и подставляя его во второе уравнение системы (1), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_i U^{\nu+1/2} &= a_{21} B_{i+1/2}^{\nu+1/2} + a_{22}; \\ S_{i+1/2}^{\nu+1/2} &= \frac{1}{q_{2,i+1/2}} \left[\frac{\beta}{c\tau} S^n - \frac{1}{3h} \left(a_{21} B^{\nu+1/2} + a_{22} \right) \right]_{i+1/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_{21} &= 2 \frac{\alpha_c}{q} b_1; \quad b_1 = \frac{\beta_1}{W_{i+1}} (X 1_i^+ + 2mY 1_i^+) - \frac{\beta_0}{W_i} (X 1_{i+1}^- + 2mY 1_{i+1}^-); \\ a_{22} &= \frac{2b_1}{c\tau q} U_{i+1/2}^n + \frac{2b_2\beta}{c\tau q_2} S_{i+1/2}^n + (R_2)_{i+1/2}^\nu; \quad b_2 = \frac{\beta_1}{W_{i+1}} (2aX 1_i^+ + Y 1_i^+) + \frac{\beta_0}{W_i} (2aX 1_{i+1}^- + Y 1_{i+1}^-); \\ (R_2)_{i+1} &= (4a_{i+1/2} m_{i+1/2} - 1) \left(\frac{\beta_1}{W_{i+1}} Z 1_i^+ - \frac{\beta_0}{W_i} Z 1_{i+1}^- \right) + \frac{\varphi_1}{W_{i+1}} Y_{i+1}^+ - \frac{\varphi_0}{W_i} Y_i^-. \end{aligned}$$

Если в формулу (15) подставить функцию B из формулы (14), то можно найти поток по формуле

$$S_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{q_{2,i+1/2}} \left[\frac{\beta}{c\tau} S^n - \frac{1}{3h} \left(a_{21} \frac{qU^{n+1} - \frac{1}{c\tau} U^n + \frac{a_{12}}{h}}{\alpha_c - \frac{a_{11}}{h}} + a_{22} \right) \right]_{i+1/2}. \quad (16)$$

Подставляя формулу (14) в уравнение энергии и линеаризуя его по температуре, получаем выражение для нахождения температуры:

$$T_{i+1/2}^{k+1} = T_{i+1/2}^k + \left[\frac{\rho (E^n - E^k) + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^\nu (U_g^k - B_g^k)}{\rho E_T^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{cg}^\nu b_g^\nu B_{g,T}^\nu} \right]_{i+1/2}, \quad (17)$$

где $U^k = \frac{1}{q} \left[\left(\alpha_c - \frac{a_{11}^\nu}{h} \right) B^k + \frac{1}{c\tau} U^n - \frac{a_{12}^\nu}{h} \right]$; $b = \frac{1}{c\tau q} + \frac{a_{11}}{qh}$.

При сходимости ньютоновских итераций по линеаризации $E(T)$ и $B_g(T)$ получаем температуру $T^{\nu+1/2}$, которая используется на втором этапе для вычисления комбинаций $\varphi_0^{\nu+1}$, $\varphi_1^{\nu+1}$ во всех точках разностной и энергетической сеток.

В данной работе рассматривалось три вида комбинаций:

1. Односторонний поток, т. е. функция φ выбиралась в виде

$$(\varphi_0)_{g,i} = \frac{1}{4} U_{g,i} + \frac{1}{2} S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \frac{1}{4} U_{g,i} - \frac{1}{2} S_{g,i}.$$

2. Инвариант Римана:

$$(\varphi_0)_{g,i} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{g,i} + S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{g,i} - S_{g,i}.$$

3. Счетный псевдоинвариант:

$$(\varphi_0)_{g,i} = (X^+ U)_{g,i} + (Y^+ S)_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = (X^- U)_{g,i} - (Y^- S)_{g,i}.$$

Наиболее простыми являются первые два варианта. В третьем варианте обязательно должна быть реализована встречная прогонка (в первом и втором достаточно потоковой прогонки), а также необходима большая оперативная память для хранения массивов X^+ , Y^+ , X^- , Y^- , a_i , b_i , c_i , d_i со второго этапа для всех групп ускоряющего этапа.

В вариантах 1 и 2 несложно показать, что коэффициент $\alpha_c - a_{11}/h$, входящий в знаменатель формулы (16), всегда больше нуля. Для одностороннего потока получаем

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha_1 = X_i^+ = X_{i+1}^- = \frac{1}{4}; \quad \beta_0 = \beta_1 = Y_i^+ = Y_{i+1}^- = \frac{1}{2}; \quad X1_i^+ = X1_{i+1}^- = \frac{1}{3}; \quad Y1_i^+ = Y1_{i+1}^- = \frac{2}{3}; \\ X_i^- = X_{i+1}^+ = \frac{1+8m+4am}{3}; \quad Y_i^- = Y_{i+1}^+ = \frac{2(1+2a+4am)}{3}; \quad W_i = W_{i+1} = \frac{(1+a)(1+4m)}{3}; \\ a_1 = \frac{1+4m}{12} \left(\frac{1}{W_i} + \frac{1}{W_{i+1}} \right) = \frac{1}{2(a+1)}; \quad a_{11} = \frac{\alpha_c}{q(a+1)}. \end{aligned}$$

Тогда $\alpha_c - \frac{a_{11}}{h} = \alpha_c \frac{1+\delta}{1+\delta+\frac{1}{qh}} > 0$ при $\delta \geq 0$, $\alpha_c > 0$.

Для инварианта Римана получаем

$$\begin{aligned} \alpha_0 = \alpha_1 = X_i^+ = X_{i+1}^- = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \beta_0 = \beta_1 = Y_i^+ = Y_{i+1}^- = 1; \\ X1_i^+ = X1_{i+1}^- = \frac{1}{\sqrt{3}+1}; \quad Y1_i^+ = Y1_{i+1}^- = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}; \\ X_i^- = X_{i+1}^+ = \frac{1+4am+4m\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}; \quad Y_i^- = Y_{i+1}^+ = \frac{4a+(1+4am)\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}; \\ W_i = W_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} \left(1 + \frac{2a}{\sqrt{3}} \right) (1+2m\sqrt{3}); \quad a_1 = \frac{1}{2a+\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Тогда $\alpha_c - \frac{a_{11}}{h} = \alpha_c \frac{\sqrt{3}+2\delta}{\sqrt{3}+2a} > 0$ при $\delta \geq 0$, $\alpha_c > 0$.

2. Двумерный случай

Постановка задачи. Рассмотрим двумерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом P_1 -приближении с учетом движения среды [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_g}{\rho} \right) + \operatorname{div} \left(\vec{\Phi}_g \right) + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g - \frac{1}{3c} U_g \operatorname{div} (\vec{u}); \\ \beta \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Phi}_g}{\rho} \right) + \frac{1}{3} \nabla U_g + \alpha_g \vec{\Phi}_g = 0; \\ \rho \frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g) + \rho Q. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $U_g = \int_{\Omega} J_g d\vec{\Omega}$ — плотность излучения группы g , умноженная на скорость света; $\vec{\Phi}_g = \int_{\Omega} \vec{\Omega} J_g d\vec{\Omega}$ — поток излучения группы g ($g = 1, \dots, G$); J_g — интенсивность излучения группы g ; \vec{u} — скорость движения среды.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_g U_g + \beta_g \left(\vec{\Phi}_g, \vec{n} \right) = \varphi_g,$$

где α_g , β_g , φ_g — параметры для задания граничных условий; \vec{n} — внешняя нормаль.

Разностная аппроксимация. Система разностных P_1 -уравнений относительно нормальных составляющих вектора потока излучения $(S_1)_{i+1/2}$, $(S_2)_{j+1/2}$ имеет вид (для упрощения записи здесь опущен индекс g)

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{c\tau} \Delta^n \left(\frac{U}{\rho} \right) + \frac{1}{\Delta v} \left(\Delta_i (rS_1) + \Delta_j (rS_2) \right)^{n+1} + \alpha_c U^{n+1} &= \alpha_c B^{n+1} - \frac{1}{3c} U^{n+1} \operatorname{div}_h \vec{u}; \\ \beta \frac{\rho}{c\tau} \Delta^n \left(\frac{S_1}{\rho} \right) + \frac{1}{\Delta s} (M_{i+1/2} \Delta_i U - M_{j+1/2} \Delta_j U)^{n+1} + (\alpha S_1)^{n+1} &= 0; \\ \beta \frac{\rho}{c\tau} \Delta^n \left(\frac{S_2}{\rho} \right) + \frac{1}{\Delta s} (L_{i+1/2} \Delta_i U - L_{j+1/2} \Delta_j U)^{n+1} + (\alpha S_2)^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где Δs — площадь разностной ячейки; Δv — объем разностной ячейки в цилиндрически-симметричной геометрии; остальные величины определены в работе [5].

Систему разностных уравнений (19) дополняем соотношениями, связывающими U и S с целыми и полуцелыми индексами:

$$\begin{aligned} U_{i+1/2} &= \frac{U_{i+1} + U_i}{2} + \delta_{i+1/2} \Delta_i S_1; & U_{j+1/2} &= \frac{U_{j+1} + U_j}{2} + \delta_{j+1/2} \Delta_j S_2; \\ S_{1,i+1/2} &= \frac{S_{1,i+1} + S_{1,i}}{2} + \theta_{i+1/2} \Delta_i U; & S_{2,j+1/2} &= \frac{S_{2,j+1} + S_{2,j}}{2} + \theta_{j+1/2} \Delta_j U. \end{aligned} \quad (20)$$

Параметры δ , θ определяются ниже.

Систему диффузионных уравнений будем решать итерационным методом стабилизирующей поправки (ИМСП) [8]:

$$\begin{aligned} qU^{\mu+1/2} + \frac{1}{\Delta v} \Delta_i (rS_1)^{\mu+1/2} &= \frac{1}{c\tau} \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} U^n + \alpha_c B^{\mu+1/2} - \frac{1}{\Delta v} \Delta_j (rS_2)^\mu; \\ q_2 S_1^{\mu+1/2} + \frac{M_{i+1/2}}{\Delta s} \Delta_i U^{\mu+1/2} &= \frac{\beta}{c\tau} \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} S_1^n + \frac{M_{j+1/2}}{\Delta s} \Delta_j U^\mu; \\ qU^{\mu+1} + \frac{1}{\Delta v} \Delta_j (rS_2)^{\mu+1} &= qU^{\mu+1/2} + \frac{1}{\Delta v} \Delta_j (rS_2)^\mu; \\ q_2 S_2^{\mu+1} - \frac{L_{j+1/2}}{\Delta s} \Delta_j U^{\mu+1} &= \frac{\beta}{c\tau} \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} S_2^n - \frac{L_{i+1/2}}{\Delta s} \Delta_i U^{\mu+1/2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $q = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c + \frac{1}{3c} \operatorname{div}_h \vec{u}$; $q_2 = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha_c + \alpha_s$.

Подставляя соотношения связи (20) в систему (21), получаем на первом этапе ИМСП следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_{1i} + d_i^0 S_{1i+1} &= f_{i+1/2}^0; \\ a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_{1i} + d_i^1 S_{1i+1} &= f_{i+1/2}^1, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^0 &= b_i^0 = c_i^1 = d_i^1 = 1; & c_i^0 &= -2 \left(\delta_{i+1/2} + \frac{r_i}{q\Delta v} \right); & d_i^0 &= 2 \left(\delta_{i+1/2} + \frac{r_{i+1}}{q\Delta v} \right); \\ a_i^1 &= -2m_{i+1/2}; & b_i^1 &= 2m_{i+1/2}; & m &= \left(\theta + \frac{M}{q_2 \Delta s} \right)_{i+1/2}; & \delta &= \frac{1}{4m}; & \theta &= 0; \\ f_{i+1/2}^0 &= \frac{2}{q_{i+1/2}} \left(\frac{1}{c\tau} \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} U^n + \alpha_c B^{\mu+1/2} - \frac{1}{\Delta v} \Delta_j (rS_2)^\mu \right); \\ f_{i+1/2}^1 &= \frac{2}{q_{2,i+1/2}} \left(\frac{\beta}{c\tau} \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} S_1^n + \frac{M_{j+1/2}}{\Delta s} \Delta_j U^\mu \right). \end{aligned} \quad (23)$$

На втором этапе получаем систему

$$\begin{aligned} a_j^0 U_j + b_j^0 U_{j+1} + c_j^0 S_{2j} + d_j^0 S_{2j+1} &= f_{j+1/2}^0; \\ a_j^1 U_j + b_j^1 U_{j+1} + c_j^1 S_{2j} + d_j^1 S_{2j+1} &= f_{j+1/2}^1, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} a_j^0 &= b_j^0 = c_j^1 = d_j^1 = 1; & c_j^0 &= -2 \left(\delta_{j+1/2} + \frac{r_j}{q\Delta v} \right); & d_j^0 &= 2 \left(\delta_{j+1/2} + \frac{r_{j+1}}{q\Delta v} \right); \\ a_j^1 &= -2m_{j+1/2}; & b_j^1 &= 2m_{j+1/2}; & m &= \left(\theta + \frac{M}{q_2\Delta s} \right)_{j+1/2}; & \delta &= \frac{1}{4m}; & \theta &= 0; \\ f_{j+1/2}^0 &= \frac{2}{q} \left(qU^{\mu+1/2} + \frac{1}{\Delta v} \Delta_j (rS_2)^\mu \right); & f_{j+1/2}^1 &= \frac{2}{q_2} \left(\frac{\beta}{c\tau} \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} S_2^n - \frac{L_{i+1/2}}{\Delta s} \Delta_j U^{\mu+1/2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Системы линейных уравнений (22)–(25) решаются методом встречной прогонки.

Метод ВДМ. В этом методе односторонние потоки φ на всех четырех гранях ячейки задаются с предыдущей итерации. Далее из системы разностных уравнений (20)–(23) выразим плотность излучения $U_{i+1/2, j+1/2}$ через функцию Планка $B_{i+1/2, j+1/2}$. Выписывая выражения U , S на гранях разностной ячейки аналогично формулам (11), (12) и составляя разности ΔU , ΔS , получаем систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta_i U &= a_{11} B - a_{12} \Delta_j (rS_2) + a_{13} \Delta_j U + a_{14}; \\ \Delta_i (rS_1) &= a_{21} B - a_{22} \Delta_j (rS_2) + a_{23} \Delta_j U + a_{24}; \\ \Delta_j U &= a_{31} B - a_{32} \Delta_i (rS_1) + a_{33} \Delta_i U + a_{34}; \\ \Delta_j (rS_2) &= a_{41} B - a_{42} \Delta_i (rS_1) + a_{43} \Delta_i U + a_{44}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2b_{11,i} \left(\frac{\alpha_c}{q} \right)_{i+1/2, j+1/2}; & b_{11,i} &= \frac{\beta_{1,i+1}}{W_{i+1}} M_i^+ - \frac{\beta_{0,i}}{W_i} M_{i+1}^-; \\ M_i^+ &= X 1_i^+ + 2m_{i+1/2, j+1/2} Y 1_i^+; & M_{i+1}^- &= X 1_{i+1}^- + 2m_{i+1/2, j+1/2} Y 1_{i+1}^-; \\ a_{12} &= \frac{2b_{11,i}}{(q\Delta V)_{i+1/2, j+1/2}}; & a_{13} &= \frac{2M_j b_{12,i}}{(q_2\Delta S)_{i+1/2, j+1/2}}; & b_{12,i} &= \frac{\beta_{1,i+1}}{W_{i+1}} A_i^+ + \frac{\beta_{0,i}}{W_i} A_{i+1}^-; \\ W_i &= \alpha_{0,i} Y_i^- + \beta_{0,i} X_i^-; & W_{i+1} &= \alpha_{1,i+1} Y_{1,i+1}^+ + \beta_{1,i+1} X_{1,i+1}^+; \\ A_i^+ &= 2a_i X 1_i^+ + Y 1_i^+; & A_{i+1}^- &= 2a_{i+1} X 1_{i+1}^- + Y 1_{i+1}^-; \\ a_i &= \delta_{i+1/2} + \frac{r_i}{(q\Delta V)_{i+1/2, j+1/2}}; & a_{i+1} &= \delta_{i+1/2} + \frac{r_{i+1}}{(q\Delta V)_{i+1/2, j+1/2}}; \\ a_{14} &= \frac{2}{c\tau} b_{11,i} \left(\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q} U^n \right)_{i+1/2, j+1/2} + \frac{2\beta}{c\tau} b_{12,i} \left(\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q_2} S_1^n \right)_{i+1/2, j+1/2} + R_1^\nu; \\ R_1^\nu &= \frac{\beta_{1,i+1}}{W_{i+1}} Z 1_i^+ (4a_i m_{i+1/2} - 1) - \frac{\beta_{0,i}}{W_i} Z 1_{i+1}^- (4a_{i+1} m_{i+1/2} - 1) + \frac{\varphi_{1,i+1}^\nu}{W_{i+1}} Y_{1,i+1}^+ - \frac{\varphi_{0,i}^\nu}{W_i} Y_{0,i}^-; \\ a_{21} &= 2b_{21,i} \left(\frac{\alpha_c}{q} \right)_{i+1/2, j+1/2}; & b_{21,i} &= \left(\frac{r\alpha_1}{W} \right)_{i+1} M_i^+ + \left(\frac{r\alpha_0}{W} \right)_i M_{i+1}^-; \\ a_{22} &= \frac{2b_{21,i}}{(q\Delta V)_{i+1/2, j+1/2}}; & a_{23} &= \frac{2M_j b_{22,i}}{(q_2\Delta S)_{i+1/2, j+1/2}}; & b_{22,i} &= \left(\frac{r\alpha_1}{W} \right)_{i+1} A_i^+ - \left(\frac{r\alpha_0}{W} \right)_i A_{i+1}^-; \end{aligned}$$

$$a_{24} = \frac{2}{c\tau} b_{21,i} \left(\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q} U^n \right)_{i+1/2,j+1/2} + \frac{2\beta}{c\tau} b_{22,i} \left(\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q_2} S^n \right)_{i+1/2,j+1/2} + R_2^\nu;$$

$$R_2^\nu = \left(\frac{r\alpha_1}{W} \right)_{i+1} Z_{1_i^+} (4a_i m_{i+1/2} - 1) + \left(\frac{r\alpha_0}{W} \right)_i Z_{1_{i+1}^-} (4a_{i+1} m_{i+1/2} - 1) - \left(\frac{r\varphi_1^\nu}{W} \right)_{i+1} X_{i+1}^+ - \left(\frac{r\varphi_0^\nu}{W} \right)_i X_i^-;$$

a_{31} и т. д. определяются аналогично, с заменой индексов i индексами j .

Из системы (26) можно получить соотношения

$$a_i \Delta_i (rS_1) = b_i B_{i+1/2,j+1/2} + f_i;$$

$$a_j \Delta_j (rS_2) = b_j B_{i+1/2,j+1/2} + f_j,$$
(27)

где

$$a_i = 1 - a_{22}a_{42} + a_{23}a_{32} - R_i(a_{12}a_{42} - a_{13}a_{32}); \quad b_i = a_{21} - a_{22}a_{41} + a_{23}a_{31} + R_i(a_{11} - a_{12}a_{41} + a_{13}a_{31});$$

$$f_i = a_{24} - a_{22}a_{44} + a_{23}a_{34} + R_i(a_{14} - a_{12}a_{44} + a_{13}a_{34}); \quad R_i = \frac{-a_{22}a_{43} + a_{23}a_{33}}{1 + a_{12}a_{43} - a_{13}a_{33}};$$

$$a_j = 1 - a_{42}a_{22} + a_{43}a_{12} - R_j(a_{32}a_{22} - a_{33}a_{12}); \quad b_j = a_{41} - a_{42}a_{21} + a_{43}a_{11} + R_j(a_{31} - a_{32}a_{21} + a_{33}a_{11});$$

$$f_j = a_{44} - a_{42}a_{24} + a_{43}a_{14} + R_j(a_{34} - a_{32}a_{24} + a_{33}a_{14}); \quad R_j = \frac{-a_{42}a_{23} + a_{43}a_{13}}{1 + a_{32}a_{23} - a_{33}a_{13}}.$$

Подставляя соотношения (27) в первое уравнение системы (18), получаем явную формулу для плотности излучения:

$$U^{n+1} = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{c\tau} U^n + \left(\alpha_c - \frac{b_i}{a_i \Delta V} - \frac{b_j}{a_j \Delta V} \right) B^{n+1} - \frac{f_i}{a_i \Delta V} - \frac{f_j}{a_j \Delta V} \right],$$
(28)

где $q = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c + \frac{1}{3c} \operatorname{div}_h \vec{u}$. Величины $\varphi_{i,i+1}^\nu$, $\varphi_{j,j+1}^\nu$ входят в f_i , f_j соответственно.

Таким образом, исходя из заданных значений φ^ν на гранях данной ячейки получена формула связи U с B непосредственно на основании разностных формул схемы РОМБ.

Используя выражение (28) в линеаризованном уравнении энергии, получаем формулу для определения температуры вида (17), где

$$U^k = \frac{1}{q} \left[\frac{1}{c\tau} U^n + \left(\alpha_c - \frac{b_i}{a_i \Delta V} - \frac{b_j}{a_j \Delta V} \right) B^k - \frac{f_i}{a_i \Delta V} - \frac{f_j}{a_j \Delta V} \right]; \quad b = \frac{1}{c\tau q} + \frac{b_i}{q a_i \Delta V} + \frac{b_j}{q a_j \Delta V}.$$

3. Численные расчеты

Отработка нового итерационного метода проводилась на задаче, построенной по аналогии со второй задачей Флека [9].

На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см (радиус внутренней сферы 100 см, внешней — 104 см) падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 1$. Слой состоит из трех физических областей: область 1 — $100 < r < 102$; область 2 — $102 < r < 102,4$; область 3 — $102,4 < r < 104$.

Спектральные граничные условия на верхней границе имеют вид $\frac{1}{4}U_g - \frac{1}{2}S_g = 0$. На нижней границе $\frac{1}{4}U_g + \frac{1}{2}S_g = \frac{1}{4}B_g$ ($T = 1$). На боковых границах областей, которые лежат на оси симметрии, задаются теплоизолированные стенки: $S_g = 0$. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле $\alpha_c = \chi(1 - e^{-\varepsilon/T})/\varepsilon^3$, $\chi = 27$ в областях 1, 3, $\chi = 10000$ в области 2. Коэффициент рассеяния $\alpha_s = 0$.

Начальная температура в областях $T_{1,2,3} = 0,00001$; уравнение состояния вещества $E_{1,2,3} = 0,81T$; плотность вещества $\rho_{1,2,3} = 1$.

По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0,0$ (число групп 28). Пространственная сетка — равномерная в каждой области: по радиусу — 28, 16, 24 интервала соответственно в областях 1, 2, 3, по углу — 80 интервалов для всех областей. Шаг по времени $\tau = 0,0002$. Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью 0,001% ($\varepsilon_{cx} = 0,00001$).

Расчеты проводились по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации. Схема 1-го порядка считалась с параметрами $\delta = \sqrt{z}/2; \theta = 1/(2\sqrt{z}); z = 3/\Delta s$, где Δs — площадь разностной ячейки (в одномерном случае Δs заменяется на 1). Схема 2-го порядка считалась с параметрами $\delta = 1/(4m); \theta = 0$, где $m = \theta + M/q_2; q_2 = \beta/(c\tau) + \alpha_c + \alpha_s; M = M_{i+1/2}$ на 1-м этапе ИМСП, $M = L_{i+1/2}$ на 2-м этапе ИМСП (в одномерном случае $M = 1/3h$).

Если после обсчета текущей ячейки на 1-м этапе пересчитывать входящие в соседние ячейки комбинации, то получатся итерации типа Зейделя, скорость которых выше. В таблице приведено среднее число внешних итераций ν и время счета t за 20 первых временных шагов по вариантам метода ВДМ с пересчетом входящих комбинаций по Зейделю.

Среднее число внешних итераций ν и время счета t ($\varepsilon_{cx} = 0,00001$)

Метод	$\tau = 0,0002$		$\tau = 0,002$		$\tau = 0,02$	
	ν	t	ν	t	ν	t
ВДЭ из работы [5]	11	0,11	52	0,69	27	0,60
ВДМ, 1-й вариант ($U/4 \pm S/2$)	15	0,19	61	0,87	45	0,65
ВДМ, 2-й вариант ($U/\sqrt{3} \pm S$)	16	0,19	63	0,80	46	0,68
ВДМ, 3-й вариант ($X^+U + Y^+S, X^-U - Y^-S$)	11	0,11	19	0,16	25	0,30

Из таблицы видно, что наилучшие результаты дает 3-й вариант метода ВДМ.

Список литературы

1. Михалас Д. Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
2. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 910—921.
3. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Там же. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842—1849.
4. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Там же. 1979. Т. 19. С. 1288—1303.
5. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Двумерная методика РОМБ для численного решения уравнений переноса излучения в многогрупповом P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 1. С. 41—47.
6. Шестаков А. А. Об одном варианте метода выделения диагонального элемента // Там же. Вып. 2. С. 71—75.
7. Гаджиев А. Д., Гаджиева В. В., Лебедев С. Н. и др. Комплекс программ ФЕНИКС для математического моделирования динамики сплошных сред и кинетических процессов и его применение для исследования развития одномодового геометрического дефекта в мишенях ЛТС // Там же. 1999. Вып. 2. С. 41—52.

8. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А.* Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339—347.
9. *Fleck J. A., Jr. and Cummings J. D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 9.11.05.
