

УДК 519.6

ПРЯМОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ПЛАВУЧЕЙ СТРУЕ

В. П. Стаценко, О. Г. Синькова, Ю. В. Янилкин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Численно исследуется развитие в поле тяжести турбулентной плавучей струи при статистически стационарном истечении в однородную несжимаемую среду более легкой жидкости из локального источника. Расчеты проводились с помощью прямого численного моделирования турбулентности по трехмерной газодинамической методике ТРЭЖ. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными данными.

В работе [1] экспериментально исследовалась осесимметричная (в среднем) плавучая струя, создаваемая при вертикальном истечении в атмосферу нагретого воздуха из резервуара. В работе [2] проведено численное моделирование этого опыта по двумерной газодинамической методике ЭГАЗ с использованием полумпирической $k\varepsilon$ -модели турбулентного перемешивания. При достаточной близости некоторых результатов этих расчетов к измерениям имелись расхождения, особенно заметные для профилей турбулентной энергии.

В данной работе с помощью методики ТРЭЖ [3] выполнено прямое трехмерное численное моделирование рассматриваемой задачи, результаты сравниваются с экспериментальными данными [1] и результатами расчета работы [2].

Постановка расчетов

Счетная область имеет следующие размеры: $l_0 \geq x \geq -l_0$, $l_0 \geq y \geq -l_0$, $l_0 = 35$ см; $L_0 \geq z \geq 0$. Источник плавучести описывается заданием продольной компоненты скорости u_z в центральной области нижней грани ($z = 0$) счетного объема (рис. 1).

В этой области выделено квадратное отверстие $l/2 \geq y \geq -l/2$; $l/2 \geq x \geq -l/2$ со стороной $l = 5,63$ см. Площадь его равна площади круглого отверстия диаметром $D = 6,35$ см. В отверстии задается скорость втекания u_{z0} в счетный объем. Среднее значение скорости составляет $u_{z0} = 67$ см/с. В каждый момент времени на это значение с помощью генератора случай-

ных чисел накладываются случайные возмущения, амплитуда которых составляет 10 % от u_{z0} .

Вне этого отверстия, на нижней грани, а также на боковых гранях задается граничное условие типа *жесткой стенки*, на верхней границе — условие *свободного протекания*.

В начальный момент всюду внутри счетной области жидкость покоится.

Плотность втекающего газа $\rho_1 = 0,5585$, невозмущенного воздуха — $\rho_0 = 1$. Единица массы вы-

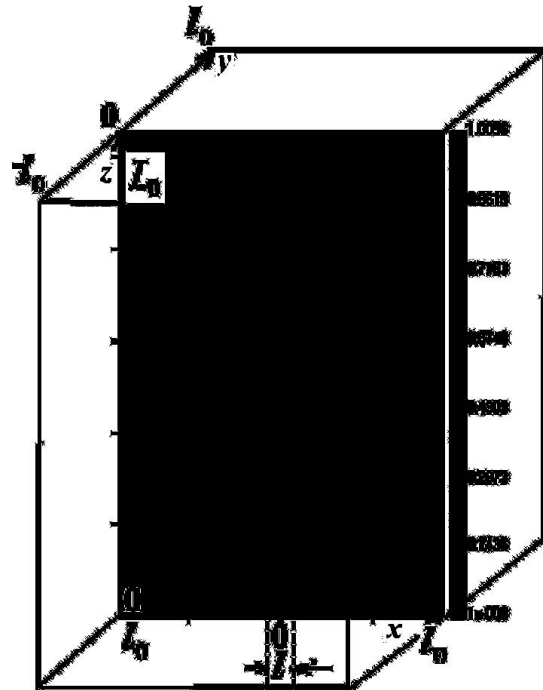


Рис. 1. Начальная геометрия задачи и растровая картина плотности в сечении $y = 0$, $t = 0,1$

брана произвольно, потому что существенной для данного несжимаемого течения является лишь относительная плотность (см. также следующие разделы). По той же причине произвольно задается максимальное давление p_0 в начальном профиле давления:

$$\rho = \left(\rho_0^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma\sigma_0}gz \right)^{1/(\gamma-1)} ; \quad p = \sigma_0\rho^\gamma,$$

где $\sigma_0 \equiv p_0/\rho_0^\gamma$, $\rho_0 \equiv \rho(z=0) = 1$. Значение $p_0 \equiv p(z=0) = 3 \cdot 10^5$ выбрано так, чтобы обеспечить несжимаемость течения: $c^2 = \gamma p/\rho > 4,2 \times 10^5 \gg u_{z0}^2 \approx 4,5 \cdot 10^3$.

Уравнение состояния соответствует идеальному газу с $\gamma = 1,4$, $c_V = 2,34 \cdot 10^3$. Ускорение силы тяжести $g_z = -980$.

Счетная область в разных вариантах имеет размеры, приведенные в табл. 1. Там же приведено количество счетных ячеек по каждой координате, причем $N_x = N_y$, и количество счетных ячеек N_l , приходящееся на сторону отверстия. В табл. 1 также указаны использованные в расчетах методы расчета уравнения адвекции — донорный (DM) и кусочно параболический (PPM).

Для сравнения с измерениями интерес представляют профили средних величин в горизонтальных сечениях струи $z = 8D; 12D; 16D$, где D — указанный выше начальный диаметр струи.

Постановка расчетов

Номер варианта	$N_x \times N_z$	Счетный метод	L_0	N_l
1	83×256	DM	120	12
2	83×256	PPM	120	12
3	165×421	PPM	105	24
4	165×421	DM	105	24

Результаты расчетов

Растровые картины плотности и скорости. В целом картину развития плавучей струи можно наблюдать по приведенным ниже растровым картинам (в сечении $y = 0$) плотности и компонент скоростей для различных вариантов расчета.

Как видно из рис. 2, 3, генерируемые случайные возмущения растут, приводя к появлению возмущений как на передней, так и на боковой поверхности струи. В результате происходит турбулентное перемешивание. При этом на достаточно больших расстояниях z от источника ($z/l \gg 1$) устанавливается зависимость усредненных (по ансамблю) величин лишь от отношения r/z . В следующем разделе приводятся зависимости средних величин от этого отношения.

При сходстве общей картины течения создается впечатление, что метод DM сглаживает мел-

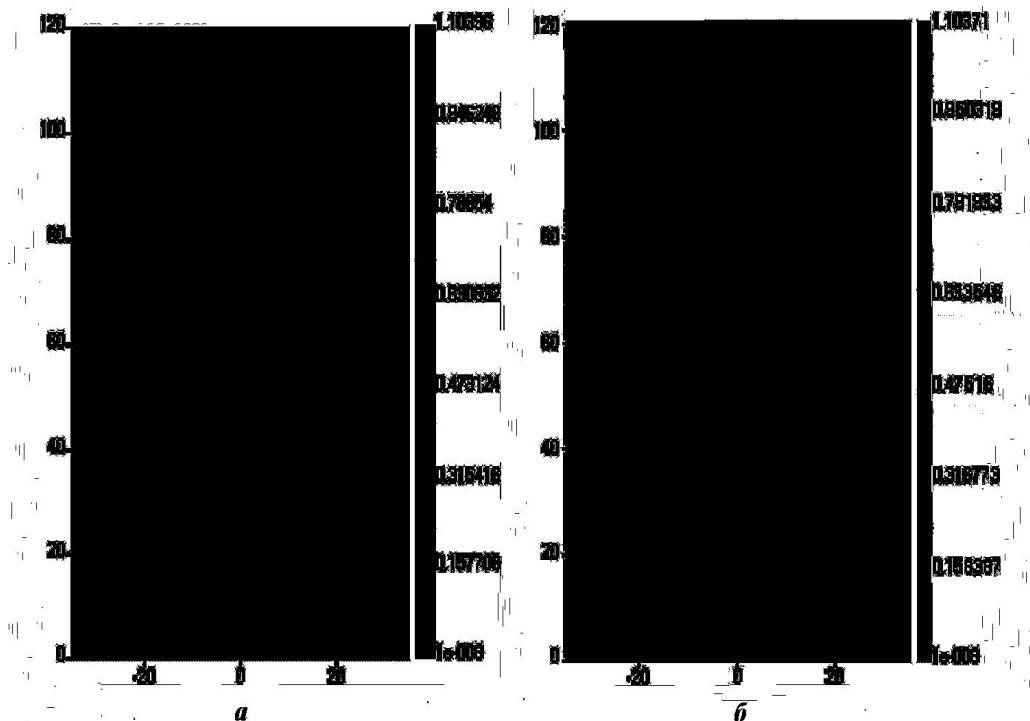


Рис. 2. Растровые картины плотности: a — вариант 1, $t = 2,43$; b — вариант 2, $t = 2,49$

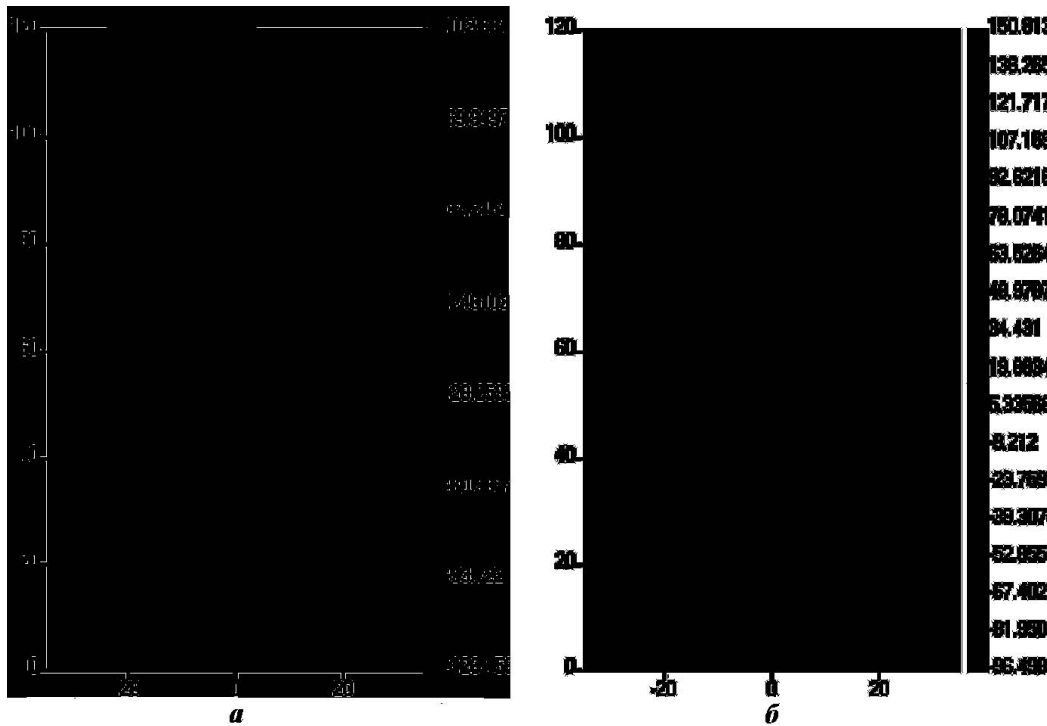


Рис. 3. Растровые картины компоненты скорости u_x : a — вариант 1, $t = 2,43$; b — вариант 2, $t = 2,49$

комасштабные детали, наблюдающиеся в расчетах с использованием метода PPM. Но, как будет видно ниже из спектрального анализа, это верно лишь для пульсаций плотности в сечении $z = 8D$.

Эволюция струи для варианта 3, выполненного методом PPM на подробной сетке, видна из растровых картин плотности (рис. 4), а также компоненты скорости u_z (рис. 5). Растровые картины плотности в варианте 3, выполненном

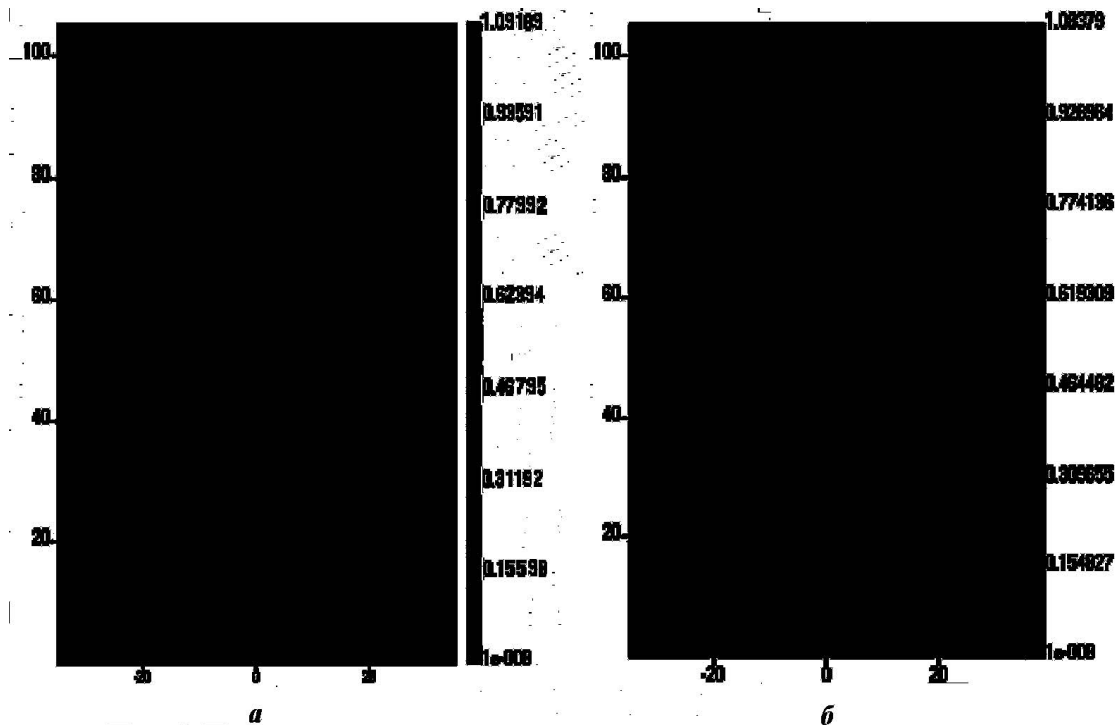


Рис. 4. Растровые картины плотности в сечении $y = 0$: a — вариант 3, $t = 1,96$; b — вариант 4, $t = 2,226$

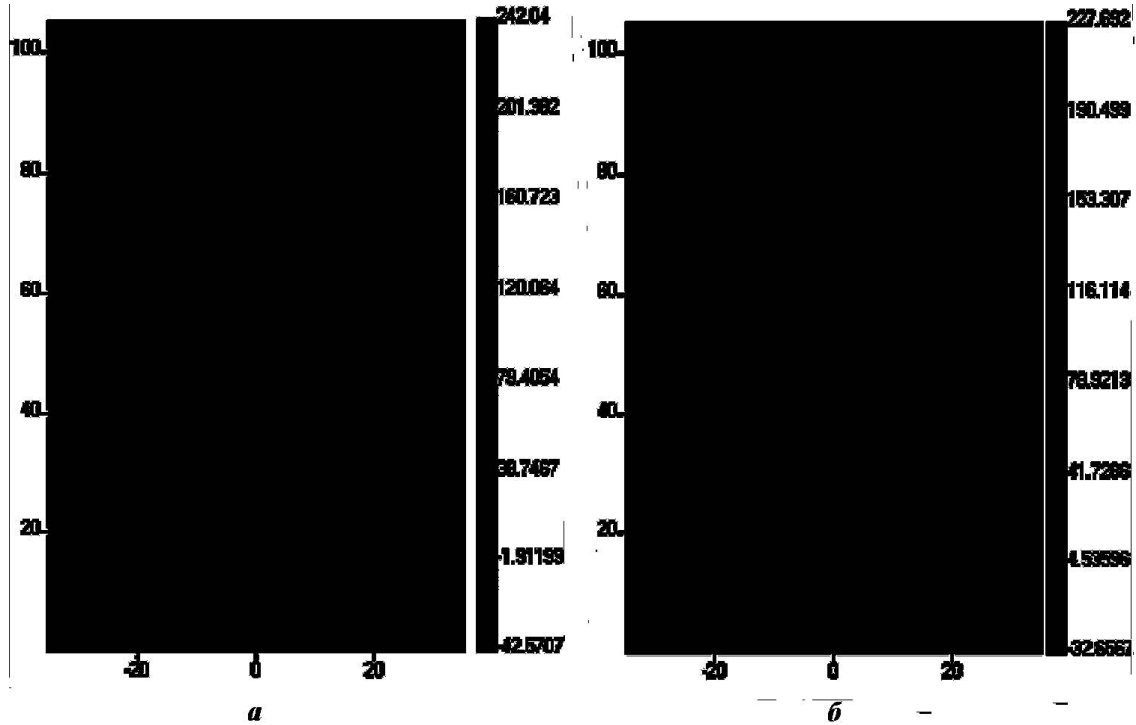


Рис. 5. Растровые картины компоненты скорости u_z в сечении $y = 0$: a — вариант 3, $t = 1,96$; b — вариант 4, $t = 2,226$

методом РРМ на подробной сетке, содержат более мелкие детали по сравнению с вариантом 4, выполненным методом ДМ на такой же сетке (см. рис. 4). То же относится к растровым картинам компонент скорости: в варианте 3 они содержат более мелкие детали по сравнению с вариантом 4 (см. рис. 5).

Отметим, что установление статистически-стационарного режима происходит в разное время для разных z , после момента t_a достижения струей данного z . Так, для первого сечения ($z = 8D = 50,8$) $t_a > 0,68$, поскольку на момент $t = 0,68$ струя достигает $z \approx 43$. Для второго сечения ($z = 12D = 76,2$) $t_a > 1,21$, поскольку на момент $t = 1,21$ струя достигает $z \approx 75$. Для третьего сечения ($z = 16D = 101,6$) $t_a < 1,53$, поскольку на момент $t = 1,53$ струя достигает $z \approx 105$.

Профили средних величин. Количественные результаты эксперимента приводятся в работе [1] в виде соответствующим образом масштабированных величин плавучести, вертикальной скорости и пульсационных моментов для трех сечений струи — 1) $z = 8D$; 2) $z = 12D$; 3) $z = 16D$ — в зависимости от автомодельной переменной $\eta \equiv r/z$ (r, z — цилиндрические координаты):

— профиль средней плавучести

$$F_1 = \left(\frac{z^5}{F_0^2} \right)^{1/3} g \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty}, \quad \Delta \rho = \rho_\infty - \langle \rho \rangle;$$

— профиль средней вертикальной скорости $\langle u_z \rangle$

$$F_2 = \langle u_z \rangle \left(\frac{z}{F_0} \right)^{1/3};$$

— профиль относительных среднеквадратичных пульсаций температуры

$$F_3 = \frac{\langle T'^2 \rangle^{1/2}}{\Delta T}. \quad (1)$$

В данной работе полагаем (учитывая относительную малость пульсаций давления и уравнение состояния идеального газа)

$$\frac{\langle \rho'^2 \rangle^{1/2}}{\Delta \rho} = \frac{\langle T'^2 \rangle^{1/2}}{\Delta T}, \quad (2)$$

$$\Delta T = \langle T \rangle - T,$$

что позволяет записать (1) в виде

$$F_3 = \frac{\langle \rho'^2 \rangle^{1/2}}{\Delta \rho};$$

– среднеквадратичные пульсации скорости

$$F_4 = \frac{\langle u_z'^2 \rangle^{1/2}}{\langle u_z \rangle}.$$

Кроме того, в работе [1] измерялся коэффициент корреляции

$$F_5 = \frac{\langle u_z' T' \rangle}{(\langle u_z'^2 \rangle \langle T'^2 \rangle)^{1/2}}.$$

Это выражение можно записать, используя, как при выводе (2), относительную малость пульсаций давления и уравнение состояния идеального газа, а также относительную малость пульсаций температуры и плотности. Получим

$$F_5 = \frac{\langle u_z' \rho' \rangle}{(\langle u_z'^2 \rangle \langle \rho'^2 \rangle)^{1/2}}.$$

Во всех вышеприведенных формулах $\langle \rangle$ — знак усреднения; $'$ — обозначение пульсационной составляющей; $F_0 \equiv 2\pi \int_0^\infty u_{z0} g \frac{(\Delta\rho)_0}{\rho_\infty} r dr = 10^6 \text{ см}^4/\text{с}^3$ — параметр источника плавучести.

В данной работе, как и в работе [1], усреднение производилось по времени в точках указанных выше сечений ($z = 8D, 12D, 16D$), начиная с момента, когда струя достигала каждого из этих сечений, т. е. находились величины

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{t_0}^t f(t') dt'}{t - t_0}, \quad f = \rho, u_z \text{ и т. д.}$$

На рис. 6 для различных сечений приведены профили величины F_1 , полученные в вариантах 1, 2 с помощью описанного выше преобразования. Как видно, согласие с экспериментом в варианте 2, рассчитанном по методу PPM, лучше, чем в варианте 1 (DM). Аналогичная ситуация наблюдается и для вариантов 3, 4.

То же самое имеет место для величин F_2 и F_3 , профили которых для различных вариантов приведены на рис. 7 и 8 соответственно. Следует отметить лучшее согласие величины F_3 с опытом в варианте 2, рассчитанном по методу PPM.

Рассчитанная величина F_4 , показанная на рис. 9, удовлетворительно согласуется с экспериментом, причем разброс ее значений в первых двух сечениях примерно такой же, как в опыте.

Радиальное распределение коэффициента корреляции плотности и скорости (F_5) показано на рис. 10. Как видно, имеется хорошее согласие с экспериментальными данными для третьего сечения в варианте 3 (метод PPM). В целом решение для данной величины носит нерегулярный характер.

Для лучшего сравнения между собой разных данных для F_2 и F_4 на рис. 11, 12 для второго сечения приводятся результаты трехмерных расчетов, проведенных авторами по двум методам на подробной счетной сетке (варианты 3 и 4), а также результаты двумерного расчета с использованием $k\varepsilon$ -модели из работы [2] и экспериментальные данные. Как видно, значения F_2 и

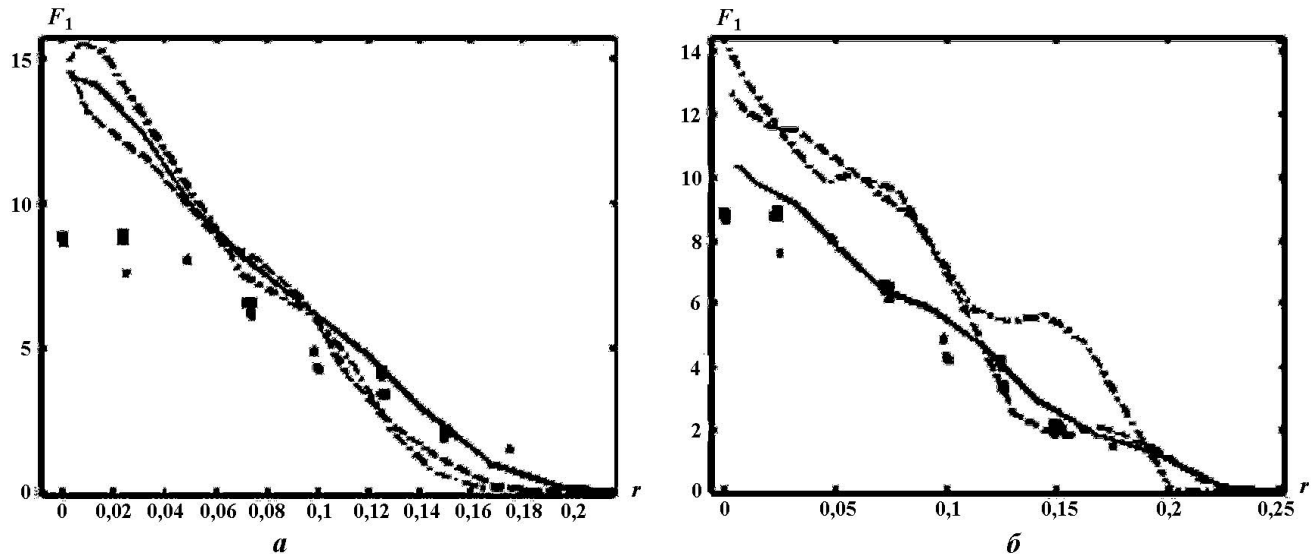


Рис. 6. Радиальное распределение средней плавучести в сечениях: a — вариант 1; b — вариант 2; \circ — $z = 8D$, эксперимент; \bullet — $z = 12D$, эксперимент; \blacksquare — $z = 16D$, эксперимент; — — — $z = 8D$, расчет; - - - - $z = 12D$, расчет; - · - · - $z = 16D$, расчет

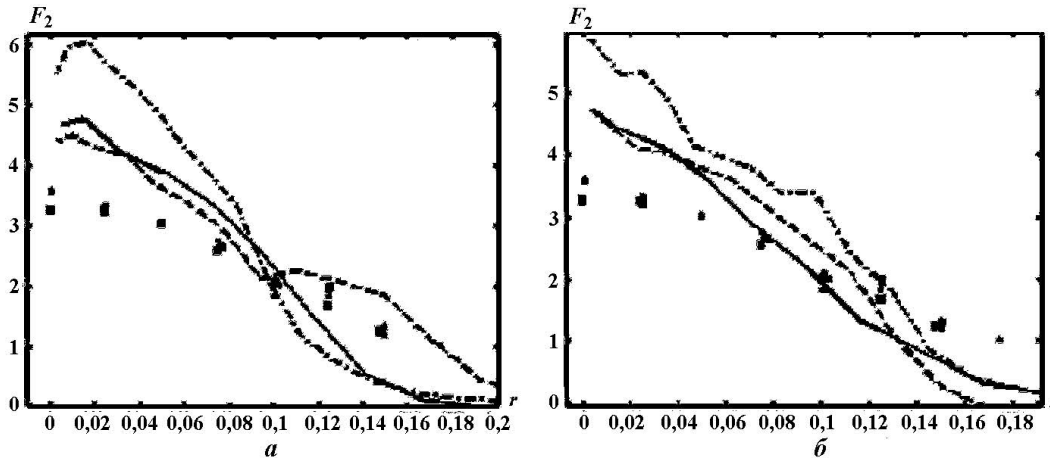


Рис. 7. Радиальное распределение среднего значения вертикальной компоненты скорости в сечениях: a — вариант 3; b — вариант 4; \cdot — $z = 8D$, эксперимент; \bullet — $z = 12D$, эксперимент; \blacksquare — $z = 16D$, эксперимент; — — $z = 8D$, расчет; - - - - $z = 12D$, расчет; - · - · - $z = 16D$, расчет

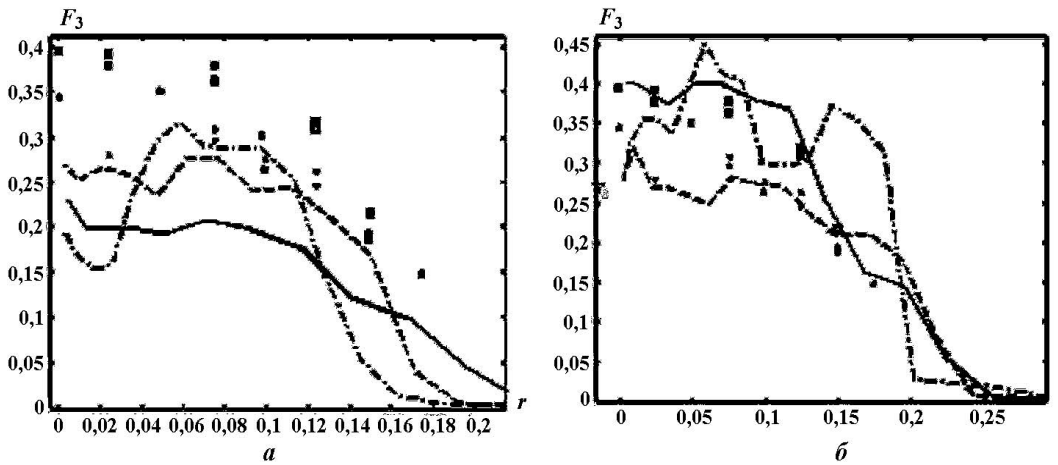


Рис. 8. Радиальное распределение среднеквадратичных пульсаций плотности в сечениях: a — вариант 1; b — вариант 2; \cdot — $z = 8D$, эксперимент; \bullet — $z = 12D$, эксперимент; \blacksquare — $z = 16D$, эксперимент; — — $z = 8D$, расчет; - - - - $z = 12D$, расчет; - · - · - $z = 16D$, расчет

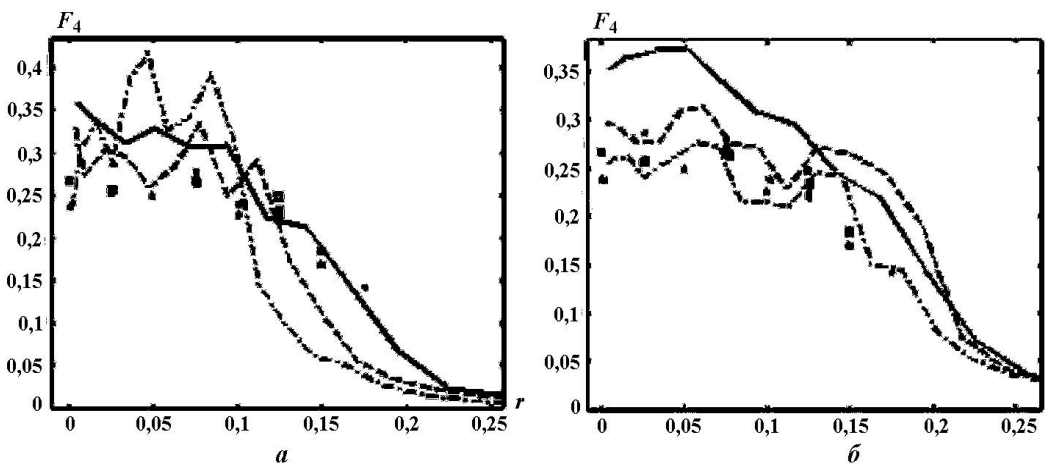


Рис. 9. Радиальное распределение среднеквадратичных пульсаций вертикальной компоненты скорости в сечениях: a — вариант 1; b — вариант 2; \cdot — $z = 8D$, эксперимент; \bullet — $z = 12D$, эксперимент; \blacksquare — $z = 16D$, эксперимент; — — $z = 8D$, расчет; - - - - $z = 12D$, расчет; - · - · - $z = 16D$, расчет

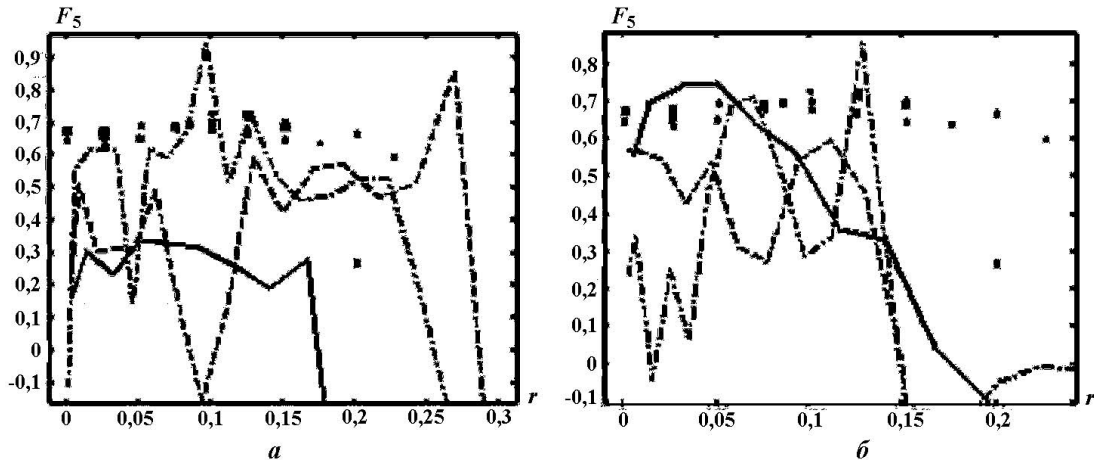


Рис. 10. Радиальное распределение коэффициента корреляции плотности и скорости в сечениях: *a* — вариант 3; *b* — вариант 4; \circ — $z = 8D$, эксперимент; \bullet — $z = 12D$, эксперимент; \blacksquare — $z = 16D$, эксперимент; — — — $z = 8D$, расчет; - - - - $z = 12D$, расчет; - · - · - $z = 16D$, расчет

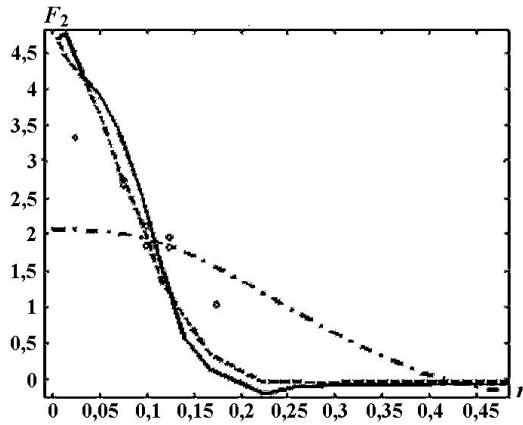


Рис. 11. Радиальное распределение среднего значения вертикальной компоненты скорости в сечении $z = 12D$: \circ — эксперимент [1]; — — — вариант 3; - - - - вариант 4; - · - · - двумерный расчет [2]

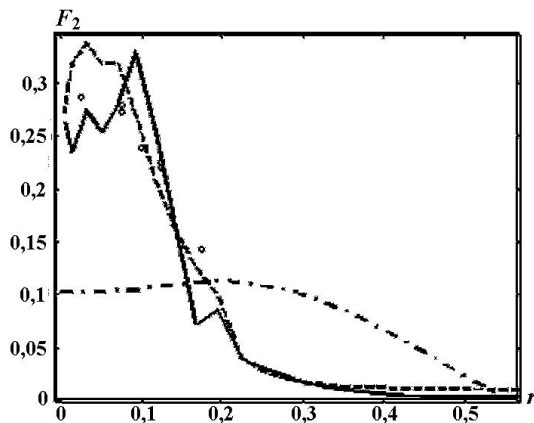


Рис. 12. Радиальное распределение среднеквадратичных пульсаций вертикальной компоненты скорости для точек на оси струи в сечении $z = 12D$: \circ — эксперимент [1]; — — — вариант 3; - - - - вариант 4; - · - · - двумерный расчет [2]

F_4 для второго сечения мало отличаются в расчетах по двум методам (варианты 3 и 4) и в целом ближе к экспериментальным данным [1], чем результаты двумерного расчета [2].

Спектральный анализ. Поскольку исследуемое течение на определенном промежутке времени $t_0 \div t_{N-1}$ можно считать статистически-стационарным, имеет смысл выполнить фурье-разложение по времени для установления близости спектра пульсаций к колмогоровскому.

Для каждой точки имеем исходный массив величин (плотность ρ , компоненты скорости u_i), например,

$$f(x, y, z, t_k) = u_i(x, y, z, t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Далее, если $dt = t_k - t_{k-1} = \text{const}$, то возможно использование быстрого фурье-преобразования (Fast Fourier Transformation — FFT) по времени. Для этого используем следующее: если в промежутке $0 \leq t < T$ функция $f(t)$ известна только в дискретной системе точек

$$t_k = \frac{kT}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

то ее можно приблизить выражением

$$f(t) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \exp(i\omega_l t), \quad \omega_l \equiv \frac{2\pi l}{T},$$

где

$$c_l^{(f)} = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp\left(-i\frac{2\pi l j}{N}\right).$$

Примем $F_f(l) \equiv c_l^{(f)} (c_l^{(f)})^*$, тогда можно записать

$$F(\omega_l) = \sum_i F_i, \quad F_i \equiv c_l^{(u_i)} c_l^{(u_i)*}, \quad i = x, y, z,$$

где F_i — спектральная плотность компонент скорости, т. е. $f = u_i$.

В инерционном интервале волновых чисел, где реализуется колмогоровский спектр, турбулентная энергия

$$E_t(\omega_l) = \int_{\omega_l}^{\infty} F(\omega_l) d\omega_l \sim \omega_l^{-1}.$$

Следовательно, спектральная плотность

$$F(\omega_l) \sim \omega_l^{-2}, \quad (3)$$

что и представляет собой колмогоровский спектр пульсаций скорости в пространстве частот. Аналогичный вывод делается для каждой компоненты F_i .

На рис. 13—18 показаны частотные спектры плотности и z -компоненты скорости, т. е. их разложение Фурье по времени для точек на оси струи в трех сечениях: (1) $z = 8D$; 2) $z = 12D$; 3) $z = 16D$) для вариантов 3 и 4, выполненных на наиболее подробной сетке.

В варианте 3 (РРМ), как можно видеть из рис. 13, имеется неплохое согласие рассчитанного спектра пульсаций плотности в первом сечении с колмогоровским спектром. То же самое

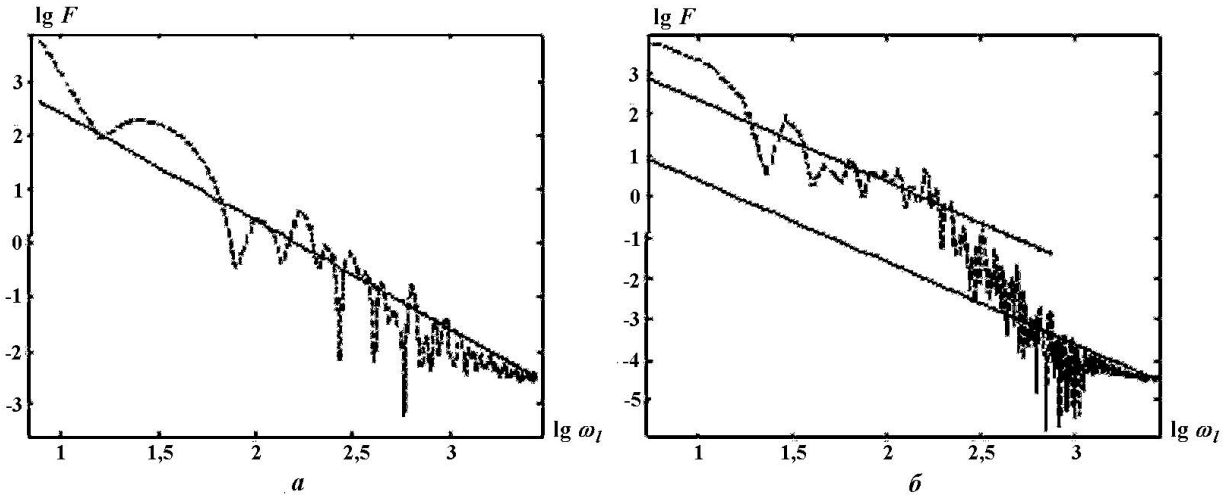


Рис. 13. Фурье-спектр пульсаций плотности в первом сечении: a — вариант 3; b — вариант 4; — — — колмогоровский спектр; - - - - расчет

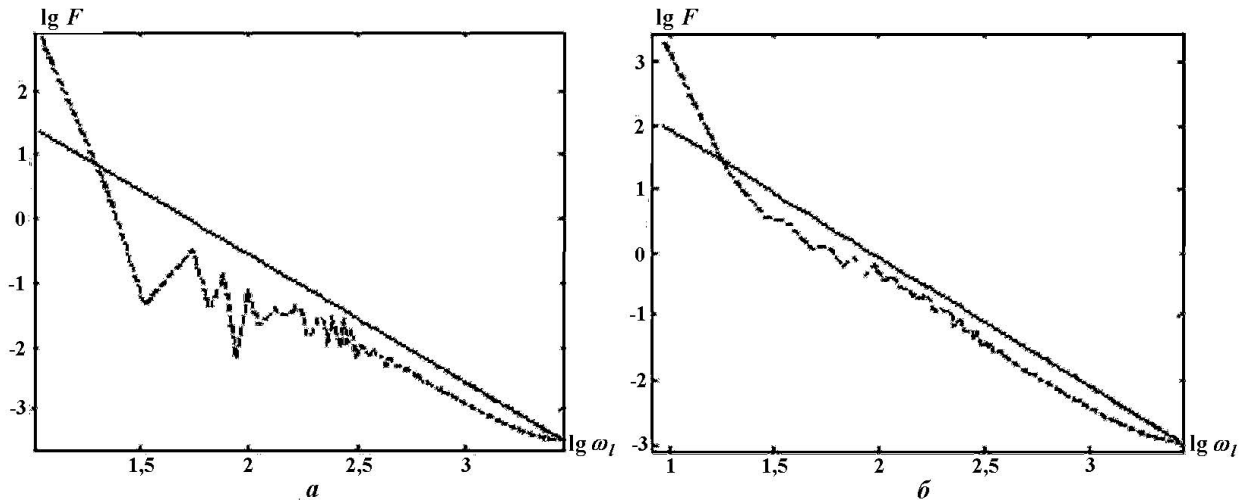


Рис. 14. Фурье-спектр пульсаций плотности во втором сечении: a — вариант 3; b — вариант 4; — — — колмогоровский спектр; - - - - расчет

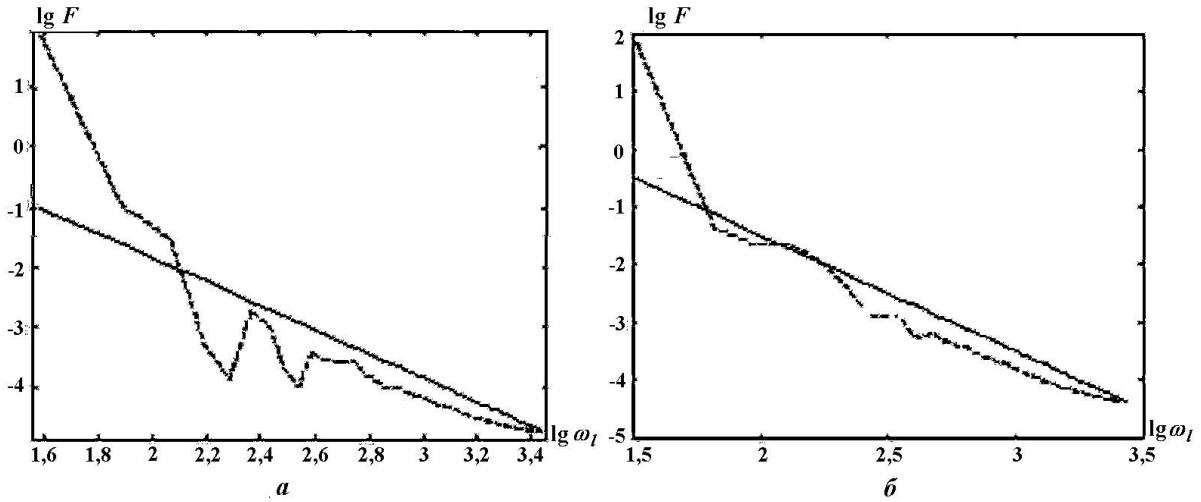


Рис. 15. Фурье-спектр пульсаций плотности в третьем сечении: a — вариант 3; b — вариант 4; — — колмо-
 ровский спектр; - - - - расчет

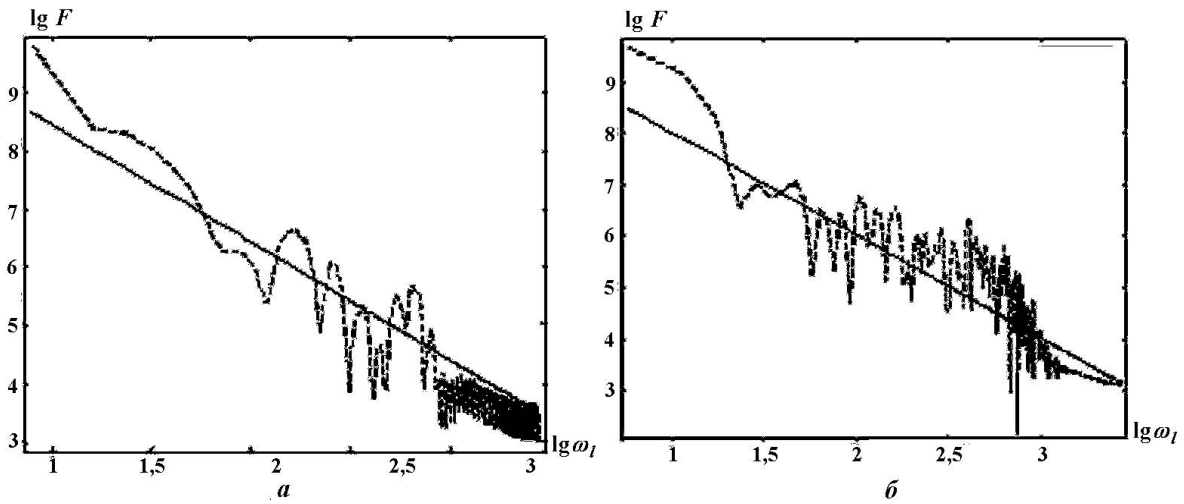


Рис. 16. Фурье-спектр пульсаций скорости в первом сечении: a — вариант 3; b — вариант 4; — — колмого-
 ровский спектр; - - - - расчет

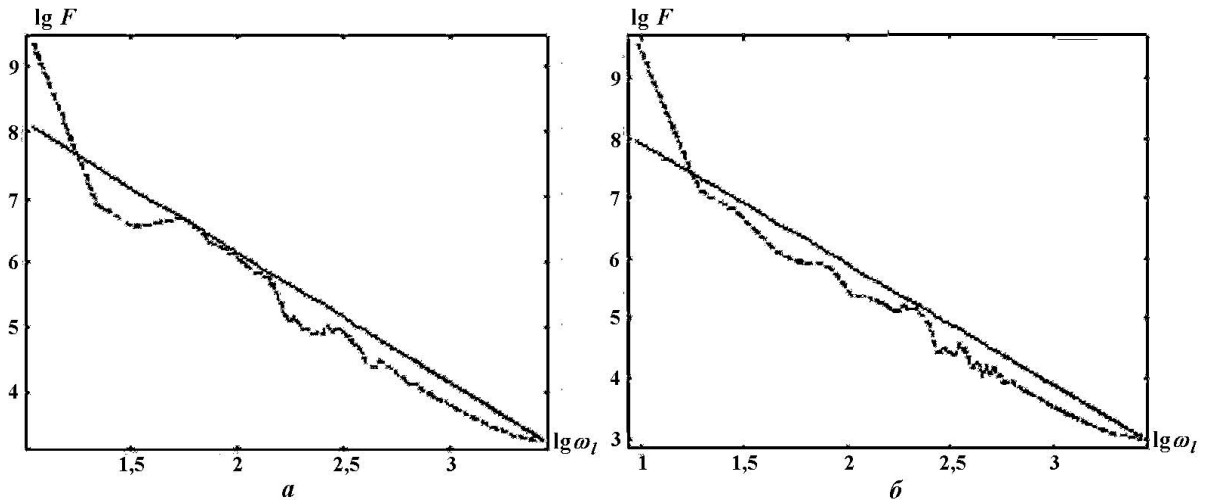


Рис. 17. Фурье-спектр пульсаций скорости во втором сечении: a — вариант 3; b — вариант 4; — — колмого-
 ровский спектр; - - - - расчет

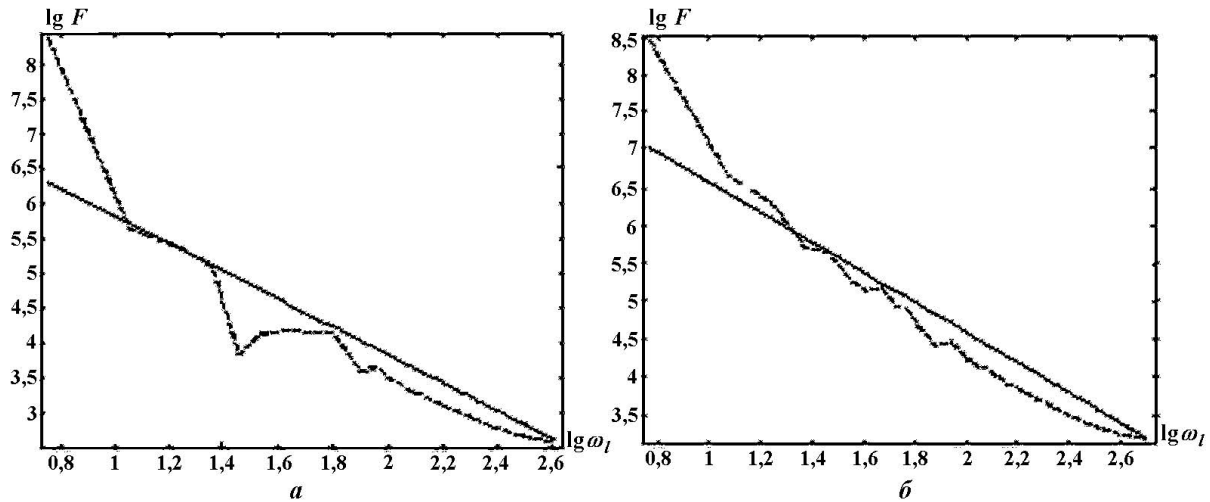


Рис. 18. Фурье-спектр пульсаций скорости в третьем сечении: *a* — вариант 3; *b* — вариант 4; — — колмогоровский спектр; - - - - расчет

можно сказать о результатах для второго сечения (см. рис. 14). И даже для третьего сечения (см. рис. 15) имеется заметный высокочастотный интервал спектра, на котором он близок к колмогоровскому.

Результаты варианта 4 (DM) в первом сечении (см. рис. 13) заметно хуже, чем для метода РРМ, тем не менее имеются участки рассчитанного спектра, где он близок к колмогоровскому. В то же время во втором и третьем сечениях (см. рис. 14, 15) спектр близок к колмогоровскому.

Для пульсаций скорости ситуация аналогична описанной выше для плотности.

В варианте 3 (РРМ) имеется неплохое согласие рассчитанного спектра пульсаций скорости в первом и втором сечении с колмогоровским спектром (рис. 16, 17), и даже для третьего сечения (рис. 18) имеются заметные интервалы спектра, на которых он близок к колмогоровскому.

Для варианта 4 (DM) результаты в первом сечении (см. рис. 16) несколько хуже, чем для метода РРМ, тем не менее в целом спектр близок к колмогоровскому. В то же время во втором и особенно третьем сечениях (см. рис. 17, 18) спектр близок к колмогоровскому.

Заключение

Анализ результатов трехмерных расчетов, выполненных по методике ТРЭЖ, и их сравнение с экспериментальными данными [1], а также с результатами двумерных расчетов [2] позволяют сделать следующие выводы:

1. Профили средних величин и пульсационные моменты оказываются в целом близки к соответствующим измерениям. При этом, как правило, в последнем сечении ($z = 16D$) начинает сказываться влияние верхней границы.
2. Вариация счетной сетки не существенно сказывается на результатах для первого и второго сечений, но при меньшей длине счетной области заметно влияние верхней границы.
3. Фурье-разложение пульсаций плотности и скорости для расчетов по своим методам на наиболее подробной сетке обнаруживает согласие с колмогоровским спектром спектров этих величин во всех сечениях.
4. Прямое трехмерное численное моделирование позволяет получать в целом более близкие к экспериментальным данным результаты по сравнению с полуэмпирической $k\varepsilon$ -моделью.

Список литературы

1. George W. K. Jr., Alpert R. L. and Tamanini F. Turbulence measurements in an axisymmetric bouyant plume // Int. J. Heat Mass Transfer. 1977. Vol. 20. P. 1145—1154.
2. Стаценко В. П., Янилкин Ю. В., Жарова Г. В., Мартин Ф. Д., Кин Лам. Формирование плавучей струи // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1994/1995. Вып. 3/1. С. 54—58.

3. *Стадник А. Л., Шанин А. А., Янцкин Ю. В.* Эйлера методика ТРЭК для расчета трехмерных газодинамических течений многокомпонентной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математи-

ческое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 4. С. 71–78.

Статья поступила в редакцию 24.08.05.
